Geometria (Fisica, Canale A-C),

Proff. A. De Sole, G. Mondello, K. O'Grady, P. Papi

Soluzioni della prova di esame del 18 settembre 2017

Esercizio 1. Siano $v_1, v_2, v_3(t), w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ i vettori

$$\begin{aligned} v_1 &= (3,2,1), \\ v_2 &= (1,-1,2), \\ v_3(t) &= (2,t,3+t), \\ w_1 &= (1,1,0), \\ w_2 &= (1,0,1). \end{aligned}$$

Per quali valori di t il sottospazio $V(t) = \langle v_1, v_2, v_3(t) \rangle$ è uguale al sottospazio $W = \langle w_1, w_2 \rangle$?

Risoluzione:

Se il sottospazio $V(t) = \langle v_1, v_2, v_3(t) \rangle$ *è uguale al sottospazio* $W = \langle w_1, w_2 \rangle$*, allora* $\dim V(t) = \dim W = 2$*. D'altra parte* $v_1, v_2, v_3(t)$ *sono linearmente dipendenti solo se* $t = -5/7$*, e*

$$\langle v_1, v_2, v_3(-5/7) \rangle = \{X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\} = \langle w_1, w_2 \rangle.$$

Quindi $\boxed{V(t) \text{ è uguale a } W \text{ se e solo se } t = -5/7}$.

Esercizio 2. Siano A, B le matrici reali 2×2 definite da

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Stabilite se A, B sono diagonalizzabili.

(b) Stabilite se A e B sono coniugate.

Risoluzione:

(a) I polinomi carattersitici di A e B sono, rispettivamente

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 2, \qquad p_B(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 2.$$

Siccome entrambi i polinomi caratteristici hanno radici distinte, $\boxed{A \text{ e } B \text{ sono diagonalizzabili}}$.

(b) Se A e B fossero coniugate, i loro polinomi caratteristici sarebbero uguali. Siccome $p_A \neq p_B$*, le matrici* $\boxed{A \text{ e } B \text{ non sono coniugate}}$.

Esercizio 3. Sia $q(X) := X^t \cdot A \cdot X$ la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ associata a

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix},$$

Completare $\{e_1\}$ ad una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza q.

Risoluzione:

Per costruire una tale base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, iniziamo ponendo $v_1 := e_1$ e calcoliamo

$$e_1^\perp = \{x_1 + 2x_2 = 0\} = \mathrm{span}(e_3,\ -2e_1 + e_2)$$

dove stiamo denotando con $\perp$ l'ortogonale rispetto alla forma bilineare simmetrica associata a q (la polarizzazione di q).

Come secondo vettore v_2 possiamo scegliere un qualunque vettore non isotropo in $e_1^\perp$, per esempio e_3.

Non resta che scegliere come v_3 un vettore non nullo di $\mathrm{span}(v_1, v_2)^\perp = \{x_1 + 2x_2 = -2x_2 + 5x_3 = 0\}$, *per esempio $v_3 := 10e_1 - 5e_2 - 2e_3$.*

Segue che $\boxed{\text{\underline{una} base che diagonalizza } q \text{ è data da } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}}.$

Esercizio 4. Considerare lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ dei polinomi reali in t di grado al più 2 e sia $Q : V \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da

$$Q(p) := \int_0^1 p(t)p'(t)dt, \qquad \text{dove } p'(t) := \frac{dp}{dt}.$$

(a) Sia g la forma bilineare simmetrica associata a Q (la polarizzazione di Q): calcolare la matrice che rappresenta g rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1,\ t,\ t^2\}$ di V.

(b) Calcolare rango e segnatura di g.

Risoluzione:

(a) La g è data da

$$g(p, q) = \frac{1}{2}\int_0^1 (p(t)q'(t) + p'(t)q(t))dt = \frac{1}{2}[p(t) \cdot q(t)]_0^1 = \frac{1}{2}(p(1) \cdot q(1) - p(0) \cdot q(0)).$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice $M_{\mathcal{B}}(g)$ ha evidentemente rango 2, e il suo nucleo è generato dal polinomio $t - t^2$. Siccome il polinomio 1 è isotropo per Q, e non appartiene al nucleo di g, segue che la segnatura di g è 0.

Riassumendo: $\boxed{\mathrm{r}(g) = 2,\ \mathrm{s}(g) = 0}$.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano euclideo standard con coordinate canoniche (x, y) e sia $\ell \subset \mathbb{R}^2$ la retta affine di equazione $y - 2x = 4$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana della retta affine $r \subset \mathbb{R}^2$ passante per $P = (1, 1)$ e ortogonale a ℓ. Calcolare le coordinate del punto $P' = \ell \cap r$ e la distanza d tra P e P'.

(b) Considerare l'unica isometria affine $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (detta *riflessione ortogonale rispetto a* ℓ) tale che $\rho(Q) = Q$ se e solo se $Q \in \ell$. Determinare una matrice A e un vettore v in modo tale che $\rho(X) = AX + v$ per ogni $X \in \mathbb{R}^2$.

Risoluzione:

(a) I punti $(-2, 0)$ *e* $(0, 4)$ *appartengono ad* ℓ *e dunque il vettore* $(0, 4) - (-2, 0) = 2(1, 2)$ *è parallelo ad* ℓ. *Ne segue che* r *ha equazione* $x + 2y = c$ *per qualche* $c \in \mathbb{R}$. *Imponendo che* r *passi per* P, *otteniamo* $\boxed{r = \{x + 2y = 3\}}$.

Con un calcolo diretto troviamo $\boxed{\ell \cap r = P' = (-1, 2)}$ *e quindi* $\boxed{d = \left\| \overrightarrow{PP'} \right\| = \sqrt{5}}$.

(b) La giacitura $\vec{\ell}$ *di* ℓ *ha equazione* $-2x + y = 0$, *ed è generata da* $v = (1, 2)$. *La giacitura* $\vec{r}$ *di* r *ha equazione* $x + 2y = 0$ *ed è generatra da* $n = (-2, 1)$. *Dunque,* A *deve soddisfare* $Av = v$ *e* $An = -n$, *ossia*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Inoltre, il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in \ell$ *è fissato da* ρ *e dunque* $\rho \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + v = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ *implica*

$$v = (I - A) \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Concludendo, $\boxed{A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad v = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$.