# Geometria Differenziale,

*Prof. K. O'Grady*

## Soluzioni della prova di esame del 23 Gennaio 2017

**Esercizio 1.** Denoteremo $X, Y$ varietà $C^\infty$.

1. Definire la coomologia di De Rham $H_{DR}(X)$, e notate che il prodotto esterno di forme dà a $H_{DR}(X)$ una struttura di *anello graduato*.

2. Supponiamo che *non* esista un isomorfismo $H_{DR}(X) \cong H_{DR}(Y)$ di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali che sia anche un isomorfismo di anelli graduati: dimostrate che $X$ *non* è diffeomeorfa a $Y$.

**Risoluzione:** (1): Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, e $\omega = (\sum_I a_I dx^I) \in \Omega^p(U)$ una $p$-forma $C^\infty$ su $U$. (Qui $I = \{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le n\}$ è un multiindice, e $dx^I := dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$.) Il differenziale esterno di $\omega$ è definito come segue:

$$d\omega := \sum_I (\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j) \wedge dx^I.$$

L'uguaglianza delle derivate parziali miste dà che

$$d \circ d = 0. \tag{1}$$

Se $\alpha \in \Omega^p(U)$, e $\beta \in \Omega^*(U)$, la regola di Leibnitz dà che

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta. \tag{2}$$

Ora sia $V \subset \mathbb{R}^m$ un aperto, e sia $f\colon U \to V$ un'applicazione $C^\infty$. Se $\omega \in \Omega^*(V)$, allora

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega) \tag{3}$$

per la regola sulla derivata di una funzione composta. Ora sia $X$ una varietà $C^\infty$. L'equazione (3) dà, in particolare, che esiste un ben definito operatore di differenziazione esterna

$$d\colon \Omega^p(X) \longrightarrow \Omega^{p+1}(X).$$

Per la (1) vale $d \circ d = 0$, e quindi

$$\mathrm{im}(d\colon \Omega^{p-1}(X) \longrightarrow \Omega^p(X)) \subset \ker(d\colon \Omega^p(X) \longrightarrow \Omega^{p+1}(X)).$$

Il $p$-esimo gruppo di coomologia di De Rham è il quoziente

$$H^p_{DR}(X) := \{\omega \in \Omega^p(X) \mid d\omega = 0\}/\{d\alpha \mid \alpha \in \Omega^{p-1}(X)\}.$$

La coomologia di De Rham di $X$ è la somma diretta

$$H_{DR}(X) := \bigoplus_p H^p_{DR}(X).$$

Per costruzione $H_{DR}(X)$ è uno spazio vettoriale reale, con graduazione data sopra. L'equazione (2) dà che il prodotto esterno di forme chiuse è chiuso, e che il prodotto di una forma esatta per una forma chiusa è esatto; segue che abbiamo un ben definito prodotto su $H_{DR}(X)$ definito da

$$[\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta].$$

Con questo prodotto $H_{DR}(X)$ è un anello (in generale non commutativo).

(2): Siano $X, Y$ varietà $C^\infty$, e sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione $C^\infty$. L'equazione (3) mostra che abbiamo un ben definito "pull-back"

$$\begin{array}{ccc} H^p_{DR}(Y) & \xrightarrow{f^*} & H^p_{DR}(X) \\ [\omega] & \mapsto & [f^*\omega] \end{array}$$

Il pull-back è chiaramente lineare. Inoltre, segue banalmente dalla definizione che, se $\alpha, \beta \in H_{DR}(Y)$, allora $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$. Quindi il pull-back è un omomorfismo

$$f^*\colon H_{DR}(Y) \longrightarrow H_{DR}(X)$$

di anelli graduati. Ora sia $Z$ una terza varietà $C^\infty$, e sia $g\colon Y \to Z$ un'applicazione $C^\infty$; la regola per la derivata di una funzione composta dà che $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Supponimao che $X$ e $Y$ siano diffeomorfe, e sia $f\colon X \to Y$ un diffeomorfismo, con inversa $g\colon Y \to X$. Allora

$$\mathrm{Id}_{H_{DR}(X)} = \mathrm{Id}^*_X = (g \circ f)^* = f^* \circ g^*, \qquad \mathrm{Id}_{H_{DR}(Y)} = \mathrm{Id}^*_Y = (f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

Quindi $f^*\colon H_{DR}(Y) \longrightarrow H_{DR}(X)$ è un *isomorfismo* di anelli graduati. Ne segue che, se non esiste un isomorfismo di anelli graduati $H_{DR}(Y) \longrightarrow H_{DR}(X)$, allora $X$ e $Y$ *non* sono diffeomorfi.

**Esercizio 2.** 1. Calcolate *ab initio* la coomologia di De Rham del cerchio $S^1$.

2. Sia $i\colon S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ l'inclusione, e

$$\alpha := i^*(x_1 dx_2 - x_2 dx_1), \qquad \beta := i^*(x_1 dx_2).$$

Siccome $S^1$ ha dimensione 1 le forme $\alpha$ e $\beta$ sono chiuse, e quindi rappresentano classi di De Rham $[\alpha], [\beta] \in H^1_{DR}(S^1)$. Determinate $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$[\alpha] = k[\beta].$$

**Risoluzione:** (1): Dimostriamo che $H^0_{DR}(S^1) \cong \mathbb{R}$. Per definizione

$$H^0_{DR}(S^1) = \{f \in \Omega^0(S^1) \mid df = 0\}.$$

Se $f \in \Omega^0(S^1)$ e $df = 0$, allora $f$ è localmente costante; siccome $S^1$ è connesso, segue che $f$ è costante. L'isomorfismo $H^0_{DR}(S^1) \cong \mathbb{R}$ si ottiene associando a $f$ il suo valore in un qualsiasi punto. Ora dimostriamo che $H^1_{DR}(S^1) \cong \mathbb{R}$. Per definizione

$$H^1_{DR}(S^1) = \{\gamma \in \Omega^1(S^1)\}/\{df \mid f \in \Omega^0(S^1)\}.$$

Sia

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & S^1 \\ \theta & \mapsto & (\cos\theta, \sin\theta) \end{array} \tag{4}$$

la parametrizzazione usuale di $S^1$. Se $f \in \Omega^0(S^1)$, allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^*(df) = \int_{-\pi}^{\pi} d(\varphi^* f) = \varphi^* f(\pi) - \varphi^* f(-\pi),$$

e, siccome $\varphi^* f$ è una funzione $C^\infty$ su $\mathbb{R}$, periodica di periodo $2\pi$, segue che $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^* df = 0$. Quindi abbiamo un'applicazione lineare ben definita

$$\begin{array}{ccc} H^1_{DR}(S^1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [\gamma] & \mapsto & \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^*\gamma \end{array} \tag{5}$$

ed è sufficiente dimostrare che è un isomorfismo. La suriettività segue dal calcolo

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^*\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi.$$

Rimane da dimostrare che l'applicazione (5) è iniettiva. Supponiamo che $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^*(\gamma) = 0$, e sia

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\widetilde{g}} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x \varphi^*(\gamma) \end{array}$$

La funzione $\widetilde{g}$ è $C^\infty$ e per il Teorema Fondamentale del Calcolo

$$d\widetilde{g} = \varphi^*\gamma. \tag{6}$$

Siccome $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^*(\gamma) = 0$, la funzione $\widetilde{g}$ è periodica di periodo $2\pi$. Quindi esiste una $g \in \Omega^0(S^1)$ tale che $\varphi^*(g) = \widetilde{g}$. Dall'equazione (6) segue che $dg = \gamma$.

(2): Siccome l'applicazione (5) è un isomorfismo, è sufficiente calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^*\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^*\beta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta^2 d\theta = \pi.$$

Segue che $k = 2$.

**Esercizio 3.** Pierino ha calcolato alcuni dei numeri di Betti[1] di 3 varietà $C^\infty$ ($X$, $Y$ e $Z$) compatte, orientabili, di dimensione 6. I risultati di Pierino sono i seguenti:

1. $b_1(X) = 3$, $b_5(X) = 4$,
2. $b_3(Y) = 4$,
3. $b_3(Z) = 5$.

I calcoli fatti da Pierino per due delle varietà sono sbagliati: dite quali sono.

**Risoluzione:** Siccome le varietà sono compatte, la coomologia a supporto compatto è uguale alla coomologia di De Rham. La dualità di Poincarè vale perchè le varietà sono orientabili (e di tipo finito perchè compatte). Quindi, per $M \in \{X, Y, Z\}$ (scelta una orientazione $[M]$) e per ogni $p$, abbiamo una dualità perfetta

$$\begin{array}{ccc} H^p_{DR}(M) \times H^{6-p}_{DR}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ([\alpha], [\beta]) & \mapsto & \int_{[M]} \alpha \wedge \beta \end{array} \tag{7}$$

In particolare $b^p(M) = b^{6-p}(M)$, e questo mostra che i numeri in (1) sono sbagliati (più precisamente almeno uno dei due è sbagliato). Ora, osservando che per $p = 3$ l'applicazione bilineare in (7) è antisimmetrica, concludiamo che $b_3(M)$ è pari (non esiste una forma antisimmetrica non degenere su uno spazio vettoriale reale di dimensione dispari), e perciò il calcolo riportato in (3) è sbagliato.

**Esercizio 4.** Calcolate la coomologia di De Rham dello spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ usando la successione esatta di Mayer-Vietoris.

**Risoluzione:** Siano $U, V \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ gli aperti

$$U := \{[X] \mid X_0 \neq 0\} \cong \mathbb{C}^n, \qquad V := (\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus \{[1, 0, \ldots, 0]\}.$$

Siccome $U \cup V = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, abbiamo la successione esatta di Mayer-Vietoris

$$\ldots \longrightarrow H^{p-1}_{DR}(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^p_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \longrightarrow H^p_{DR}(U) \oplus H^p_{DR}(V) \longrightarrow H^p_{DR}(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^{p+1}_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \ldots$$

Siccome $U \cong \mathbb{C}^n$, abbiamo

$$H^p_{DR}(U) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p = 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{8}$$

[1] Ricordiamo che il numero di Betti $m$-esimo di $X$ è $b_m(X) := \dim_{\mathbb{R}} H^m_{DR}(X)$.

D'altra parte, dimostriamo che

$$V \text{ è omotopicamente equivalente a } \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}. \tag{9}$$

Siano

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{j} & V \\ [X_0,\ldots,X_{n-1}] & \mapsto & [0,X_0,\ldots,X_{n-1}] \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}} \\ [X_0,\ldots,X_n] & \mapsto & [X_1,\ldots,X_n] \end{array}$$

Si ha che $\pi \circ j = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}}$. La composizione $j \circ \pi$ *non* è l'identità, ma è omotopicamente equivalente all'identità. Infatti sia $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $C^\infty$ tale che

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \le 0, \\ 0 & \text{se } t \ge 1. \end{cases}$$

L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} V \times \mathbb{R} & \xrightarrow{j} & V \\ ([X],t) & \mapsto & [\varphi(t)X_0, X_1,\ldots,X_n] \end{array}$$

è una omotopia tra $\mathrm{Id}_V$ (per $t \le 0$) e $j \circ \pi$ (per $t \ge 1$). Questo dimostra che vale (9). In modo simile si dimostra che

$$U \cap V \text{ è omotopicamente equivalente a } S^{2n-1}. \tag{10}$$

Infatti, sia $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ la sfera delle $n$-uple di vettori di norma 1 (cioè $\sum_{s=1}^n |x_s|^2 = 1$), e siano

$$\begin{array}{ccc} S^{2n-1} & \xrightarrow{k} & U \cap V \\ (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & [1,x_1,\ldots,x_n] \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{\rho} & S^{2n-1} \\ [1,x_1,\ldots,x_n] & \mapsto & (\frac{x_1}{||x||},\ldots,\frac{x_n}{||x||}) \end{array}$$

La composizione $\rho \circ k$ è uguale all'identità di $S^{2n-1}$, e ragionando come sopra si verifica che la composizione $k \circ \rho$ è omotopa all'identità di $U \cap V$. Ora dimostriamo per induzione su $n$ che

$$H^p_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p \text{ è pari, e } 0 \le p \le 2n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{11}$$

Per $n = 0$ la (11) vale, quindi rimane da dimostrare il passo induttivo. Quindi supponiamo che valga (11) con $n$ sostituito da $(n-1)$, e dimostriamo che vale (11). Innanzitutto $H^0_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{R}$ perchè $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è connesso. Inoltre, siccome anche $U$, $V$ e $U \cap V$ sono connessi, la successione

$$H^0_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \longrightarrow H^0_{DR}(U) \oplus H^0_{DR}(V) \longrightarrow H^0_{DR}(U \cap V)$$

è esatta, e quindi la successione ottenuta eliminando questi termini da Mayer-Vietoris è ancora esatta. Esaminando la successione di Mayer-Vietoris, e tenendo conto di (8), (9) e (10), otteniamo che l'applicazione (di restrizione)

$$H^p_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \longrightarrow H^p_{DR}(V) \cong H^p_{DR}(\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}})$$

è un isomorfismo, eccetto per $p = 2n$, e che

$$H^{2n-1}_{DR}(S^{2n-1}) \xrightarrow{\partial} H^{2n}_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$$

è un isomorfismo. Segue dall'ipotesi induttiva che vale (11) per $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.