Geometria Differenziale,

Prof. K. O'Grady

Soluzioni della prova di esame del 13 Febbraio 2017

Esercizio 1. Siano $n \geq 1$ e $p_1, \ldots, p_d \in \mathbb{R}^n$ d punti distinti. Calcolate i numeri di Betti di

$$\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \ldots, p_d\}.$$

(Ricordate che, se X è una varietà C^∞, il suo p-esimo numero di Betti è $b_p(X) := \dim H^p_{DR}(X)$.)

Risoluzione: Sia $n = 1$; siccome $\mathbb{R}^1 \setminus \{p_1, \ldots, p_d\}$ è l'unione di $d+1$ intervalli (aperti),

$$b_p(\mathbb{R}^1 \setminus \{p_1, \ldots, p_d\}) = \begin{cases} d+1 & \text{se } p = 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ora supponiamo che $n \geq 2$, e dimostriamo per induzione su d che

$$b_p(\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \ldots, p_d\}) = \begin{cases} 1 & \text{se } p = 0, \\ d & \text{se } p = n-1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{1}$$

Se $d = 0$ l'equazione (1) è chiaramente valida. Ora supponiamo che valga (1) per d, e dimostriamo che vale con d sostituito da $d+1$. Possiamo scrivere

$$(\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \ldots, p_{d+1}\}) = U \cup V,$$

dove U è diffeomorfo a $(\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \ldots, p_d\})$, V è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{p_{d+1}\}$, e $U \cap V$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$. (Basta considerare un iperpiano in $\mathbb{R}^n$ che separa $p_1, \ldots, p_d$ da p_{d+1}.)

Esercizio 2.

1. Enunciate il Teorema sulla partizione dell'unità per una varietà C^∞ qualsiasi.
2. Dimostrate il Teorema sulla partizione dell'unità per una varietà C^∞ compatta.

Risoluzione: (1): Sia X una varietà C^∞ , e $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Una partizione dell'unità *subordinata a* $\mathfrak{U}$ è una famiglia $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ di funzioni C^∞ su X, indicizzata dallo stesso insieme di indici di $\mathfrak{U}$, con le seguenti proprietà:

(a) $\varphi(x) \in [0, 1]$ per ogni $x \in X$.

(b) $\operatorname{supp} \varphi_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$.

(c) La famiglia di chiusi $\{\operatorname{supp} \varphi_i\}_{i \in I}$ è localmente finita, cioè dato $x_0 \in X$, esiste un aperto $V \subset X$ contenente x_0 tale che l'insieme
$$\{i \in I \mid \operatorname{supp} \varphi_i \cap V \neq \emptyset\}$$
sia finito.

(d) Per ogni $x \in X$, si ha $\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$. (La somma è finita grazie a (c).)

Il Teorema sulla partizione dell'unità afferma che, dato un ricoprimento aperto di X, esiste una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento.

(2): Supponiamo che X sia compatta, di dimensione n. Per compattezza esistono una famiglia finita $\{V_j\}_{j \in J}$ di aperti di X tali che $V_j \subset U_{i(j)}$ per un certo $i(j) \in I$, e per ogni $j \in J$ un diffeomorfismo $f_j \colon V_j \xrightarrow{\sim} B(0, 3)$ ($B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$ è la palla aperta di centro 0 e raggio r) tali che

$$\bigcup_{j \in J} f_j^{-1} B(0, 1) = X. \tag{2}$$

Per $j \in J$ sia $\psi_j \in C^\infty(X)$ tale che

(a) $\psi_j(x) \in [0,1]$ per ogni $x \in X$.

(b) $\psi_j(x) = 1$ per ogni $x \in f_j^{-1}B(0,1)$.

(c) $\psi_j(x) = 0$ per ogni $x \in (X \setminus f_j^{-1}B(0,2))$.

Sia $\psi(x) := \sum_{j \in J} \psi_j(x)$. Per (2) e (b) $\psi(x) > 0$ per ogni $x \in X$. Ne segue che la funzione $\xi_j = \psi_j/\psi$ è C^∞, $\xi_j(x) \in [0,1]$ per ogni $x \in X$, e

$$\sum_{j \in J} \xi_j(x) = 1 \quad \forall x \in X.$$

Dato $i \in I$, sia φ_i la funzione C^∞ su X definita da

$$\varphi_i(x) := \sum_{i(j)=i} \xi_j(x).$$

(Se non esistono $j \in J$ tali che $i(j) = i$, allora $\varphi_i = 0$.) La collezione $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ è una partizione dell'unità subordinata a $\mathfrak{U}$.

Esercizio 3. Dimostrate la seguente versione del "Five-Lemma". Nel diagramma commutativo di spazi vettoriali

$$\begin{array}{ccccccccc}
V_1 & \xrightarrow{f_1} & V_2 & \xrightarrow{f_2} & V_3 & \xrightarrow{f_3} & V_4 & \xrightarrow{f_4} & V_5 \\
\downarrow{\scriptstyle \phi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_3} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_4} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_5} \\
W_1 & \xrightarrow{g_1} & W_2 & \xrightarrow{g_2} & W_3 & \xrightarrow{g_3} & W_4 & \xrightarrow{g_4} & W_5
\end{array}$$

supponete che le righe siano esatte, e che ϕ_1, ϕ_2, ϕ_4 e ϕ_5 siano isomorfismi. Dimostrate che anche ϕ_3 è un isomorfismo.

Risoluzione: Dimostriamo che ϕ_3 è iniettiva. Supponiamo che $v_3 \in V_3$ e $\phi_3(v_3) = 0$. Siccome $g_3 \circ \phi_3 = \phi_4 \circ f_3$, segue che $\phi_4 \circ f_3(v_3) = 0$, e siccome ϕ_4 è un isomorfismo, ne deduciamo che $f_3(v_3) = 0$. Siccome le righe del diagramma sono esatte, esiste $v_2 \in V_2$ tale che $f_2(v_2) = v_3$. Siccome $g_2 \circ \phi_2 = \phi_3 \circ f_2$, segue che $\phi_2(v_2) \in \ker(g_2)$, e per esattezza delle righe esiste $w_1 \in W_1$ tale che $g_1(w_1) = \phi_2(v_2)$. Sia $v_1 \in V_1$ l'unico vettore tale che $\phi_1(v_1) = w_1$. Siccome $g_1 \circ \phi_1 = \phi_2 \circ f_1$, abbiamo $\phi_2(f_1(v_1)) = \phi_2(v_2)$. Ma ϕ_2 è un isomorfismo, quindi $f_1(v_1) = v_2$, e siccome le righe sono esatte $v_3 = f_2(v_2) = f_2 \circ f_1(v_1) = 0$. Questo dimostra che ϕ_3 è iniettiva.

Per dimostrare che ϕ_3 è suriettiva si può ragionare in modo analogo, oppure si può considerare il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
W_5^\vee & \xrightarrow{g_4^\vee} & W_4^\vee & \xrightarrow{g_3^\vee} & W_3^\vee & \xrightarrow{g_2^\vee} & W_2^\vee & \xrightarrow{g_1^\vee} & W_1^\vee \\
\downarrow{\scriptstyle \phi_5^\vee} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_4^\vee} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_3^\vee} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_2^\vee} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_1^\vee} \\
V_5^\vee & \xrightarrow{f_4^\vee} & V_4^\vee & \xrightarrow{f_3^\vee} & V_3^\vee & \xrightarrow{f_2^\vee} & V_2^\vee & \xrightarrow{f_1^\vee} & V_1^\vee
\end{array}$$

e osservare che $\phi_3^\vee$ è iniettiva per l'argomento precedente, e quindi ϕ_3 è suriettiva.

Esercizio 4. Enunciate il teorema di Künneth per varietà C^∞, e dimostratelo sotto l'ipotesi che le varietà siano di tipo finito.

Risoluzione: Vedi pp. 47-50 del libro di Bott e Tu.