Geometria Differenziale,

Prof. K. O'Grady

Soluzioni della prova di esame del 16 Giugno 2017

Esercizio 1. Siano $d, e \in \mathbb{N}$. Si calcolino i numeri di Betti[1] della varietà C^∞ compatta $S^d \times S^e$.

Risoluzione: I numeri di Betti di S^n sono

$$b_p(S^n) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \{0, n\}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per Künneth,

$$H^p_{DR}(S^d \times S^e) \cong \bigoplus_{i=0}^{p} H^i_{DR}(S^d) \otimes_{\mathbb{R}} H^{p-i}_{DR}(S^e).$$

Segue che

(a) se $d \neq e$, allora

$$b_p(S^d \times S^e) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \{0, d, e, d+e\}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

(b) se $d = e$, allora

$$b_p(S^d \times S^e) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \{0, d+e\}, \\ 2 & \text{se } p = d = e, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esercizio 2. Siano $L, J \subset \mathbb{R}^3$ l'asse delle x_3, e la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 nel piano $x_3 = 0$ rispettivamente. Equivalentemente,

$$L := \{(0, 0, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}, \qquad J := \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Sia $U := (\mathbb{R}^3 \setminus L \setminus J)$. Calcolate i numeri di Betti di U.

Risoluzione: Sia d la distanza euclidea tra punti di $\mathbb{R}^3$ (cioè $d(x, y) = ||x - y||$), e siano $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^3$ gli aperti definiti da

$$\begin{aligned} V_1 &:= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1/9\}, \\ V_2 &:= \{(x_1, x_2, x_3) \mid d((x_1, x_2, x_3), \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, 0\right) < 1/3\}. \end{aligned}$$

Notate che $V_1 \supset L$, e L è un retratto di deformazione di V_1 (nella categoria C^∞), e che, analogamente $V_2 \supset J$, e J è un retratto di deformazione di V_2 (nella categoria C^∞). Siccome $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, segue che i numeri di Betti di $V := V_1 \cup V_2$ sono

$$b_0(V) = 2, \quad b_1(V) = 1, \quad b_p(V) = 0 \text{ se } p > 1. \tag{1}$$

Ora calcoliamo $b_p(U)$. Si ha $b_0(U) = 1$, perchè U è connesso per archi. La successione di Mayer-Vietoris del ricoprimento aperto $\mathbb{R}^3 = U \cap V$, dà un isomorfismo

$$H^p_{DR}(U) \oplus H^p_{DR}(V) \xrightarrow{\sim} H^p_{DR}(U \cap V), \quad p \geq 1,$$

[1] Ricordiamo che, se X è una varietà C^∞, il numero di Betti p-esimo è $b_p(X) := \dim_{\mathbb{R}} H^p_{DR}(X)$.

e quindi
$$b_p(U) = b_p(U \cap V) - b_p(V), \quad p \geq 1. \tag{2}$$
Per calcolare i numeri di Betti di $U \cap V$, notiamo che $U \cap V = (U \cap V_1) \sqcup (U \cap V_2)$, e che $U \cap V_1$ è un retratto di deformazione di $\mathbb{R} \times S^1$ (nella categoria C^∞), e che $U \cap V_2$ è un retratto di deformazione di $S^1 \times S^1$ (nella categoria C^∞). Quindi (per Künneth)
$$b_0(U\cap V)=2, \quad b_1(U\cap V)=3, \quad b_2(U\cap V)=1, \quad b_p(U\cap V)=0 \text{ se } p > 2. \tag{3}$$
Da (1), (2), e (3) segue che
$$b_0(U) = 1, \quad b_1(U) = 2, \quad b_2(U) = 1, \quad b_p(V) = 0 \text{ se } p > 2.$$
(Si può anche notare che U è omotopicamente equivalente a un toro.)

Esercizio 3. (a) Dimostrate che il fibrato tautologico $\pi\colon L \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ non è banale. (Ricordiamo che, per definizione, $L \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ è
$$L := \{(v, \ell) \mid v \in \ell\},$$
e che π è la restrizione della proiezione $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.)

(b) Siano X uno spazio topologico e $L \to X$ un $\mathbb{R}$-fibrato (topologico). Dimostrate che $L^{\otimes 2} \to X$ è un fibrato banale.

Risoluzione: (a): Sia $\sigma_0\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to L$ la sezione nulla. Supponiamo che L sia banale. Allora
$$(L \setminus \operatorname{im} \sigma_0) \cong (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}) \sqcup (\mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}),$$
e quindi $L \setminus \operatorname{im} \sigma_0$ non è connesso. Ma
$$(L \setminus \operatorname{im} \sigma_0) \cong \{(v, \ell) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \mid v \neq 0\},$$
e abbiamo un diffeomorfismo
$$\begin{array}{ccc} \{(v, \ell) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \mid v \neq 0\} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ (v, \ell) & \mapsto & v. \end{array}$$
Siccome $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è connesso, siamo arrivati a una contraddizione, e quindi L *non è* banale.

(b): Se $\{\varphi_{ij}\}$ sono funzioni di transizione per L, un sistema di funzioni di transizione per $L^{\otimes 2}$ è dato da $\{\varphi_{ij}^2\}$, che sono sempre strettamente positive. Ricorrendo a una partizione dell'unità, è facile dimostrare che un $\mathbb{R}$-fibrato lineare con funzioni di transizione positive ha una sezione mai nulla, e quindi è banale.

Esercizio 4. Sia
$$X := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$
e sia $a\colon X \to X$ l'applicazione antipodale, cioè $a(x) := -x$. Dimostrate che a *non* è omotopa all'identità (nella categoria C^∞, cioè non esiste una omotopia C^∞ tra a e l'identità[2]).

Risoluzione: Sia ω la 2-forma differenziale C^∞ su X definita da
$$\omega := (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy).$$
Un calcolo dà che $d\omega = 0$, e quindi ω rappresenta un elemento $[\omega] \in H^2_{DR}(X)$. Come abbiamo visto in un esercizio (9 Novembre 2016), la restrizione di ω a S^2 non è esatta, e quindi $[\omega] \neq 0$. Se esistesse una omotopia tra a e l'identità, l'azione di a e l'identità su $[\omega]$ sarebbereo uguali, cioè
$$[\omega] = \mathrm{Id}^*[\omega] = a^*[\omega].$$
Ma un calcolo esplicito mostra che $a^*[\omega] = -[\omega]$. Questa è una contraddizione, perchè $[\omega] \neq 0$.

[2]Non esiste nemmeno una omotopia continua tra a e l'identità, ma non avete a disposizione gli strumenti necessari per dimostrare questo risultato.