Geometria Differenziale,

Prof. K. O'Grady

Soluzioni della prova di esame del 7 Luglio 2017

Esercizio 1. (a) Sia X una varietà connessa, compatta, orientabile, di dimensione $n > 0$, di tipo finito, e sia $x_0 \in X$. Determinare, per ogni p, la relazione tra $\dim H^p_{DR}(X)$ e $\dim H^p_{DR}(X \setminus \{x_0\})$.

(b) Siano X, Y varietà connesse, compatte, orientabili, di dimensione $n > 0$, di tipo finito, e siano $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Supponiamo che Z sia una varietà connessa, compatta, orientabile, di dimensione $n > 0$, di tipo finito, ricoperto da aperti U, V diffeomorfi a $X \setminus \{x_0\}$ e $Y \setminus \{y_0\}$ rispettivamente. Supponiamo anche che $U \cap V$ sia diffeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbb{R}$. Dimostrate che

$$\dim H^p(Z) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \{0, n\}, \\ \dim H^p(X) + \dim H^p(Y) & \text{se } 0 < p < n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{1}$$

Risoluzione: (a): Per semplificare la notazione eliminiamo il sottoindice DR dalla notazione per la coomologia di DeRham. Dimostriamo che

$$\dim H^p(X \setminus \{x_0\}) = \begin{cases} \dim H^p(X) & \text{se } 0 \le p \le n-1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{2}$$

L'uguaglianza per $p = 0$ vale perchè, essendo $n > 0$ e X connessa, $X \setminus \{x_0\}$ è connessa. Se $p = n$, siccome $X \setminus \{x_0\}$ è orientabile (perchè X lo è) di tipo finito e connessa, la dualità di Poincarè dà che $H^n_{DR}(X \setminus \{x_0\}) \cong H^0_c(X \setminus \{x_0\})^\vee = \{0\}$. Inoltre, per motivi di dimensione, $H^p(X) = \{0\}$ per $p > n$. Quindi rimane da dimostrare che vale (2) per $0 < p < n$.

Sia $U := X \setminus \{p\}$. Esiste un aperto $V \subset X$ contenente p tale che

$$V \cong \mathbb{R}^n, \qquad U \cap V \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}. \tag{3}$$

La successione di Mayer Vietoris per il ricoprimento aperto $X = U \cup V$ è

$$\ldots \longrightarrow H^{p-1}(U \cap V) \longrightarrow H^p(X) \longrightarrow H^p(U) \oplus H^p(V) \longrightarrow H^p(U \cap V) \longrightarrow H^{p+1}(X) \longrightarrow H^{p+1}(U) \oplus H^{p+1}(V) \longrightarrow H^{p+1}(U \cap V) \longrightarrow \ldots$$

Notiamo che $H^p(V) = \{0\}$ a meno che $p = 0$, e che $H^0(V) \cong \mathbb{R}$. Analogamente, notiamo che $H^p(U \cap V) = \{0\}$ a meno che $p = 0$ o $p = n-1$, e $H^0(U \cap V) \cong H^{n-1}(U \cap V) \cong \mathbb{R}$. Segue subito che per $1 \le p \le n-2$ abbiamo una successione esatta

$$0 \longrightarrow H^p(X) \longrightarrow H^p(U) \longrightarrow 0,$$

e quindi $\dim H^p(X) = \dim H^p(X \setminus \{x_0\})$.

D'altra parte, Mayer-Vietoris dà la successione esatta

$$0 \longrightarrow H^{n-1}(X) \longrightarrow H^{n-1}(U) \longrightarrow H^{n-1}(U \cap V)(\cong \mathbb{R}) \longrightarrow H^n(X)(\cong \mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

Segue che $\dim H^{n-1}(X) = \dim H^{n-1}(X \setminus \{x_0\})$. Abbiamo dimostrato che vale (2).

(b): Si scrive la successione di Mayer Vietoris per il ricoprimento aperto $X = U \cup V$. Usando il risultato di (a) si dimostra che vale (1).

Esercizio 2. Dimostrate "*ab initio*" che $H^1_c(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.

Risoluzione: Sia $\omega = \alpha(x)dx$ una 1 forma C^∞ a supporto compatto su $\mathbb{R}$. Siano $a < b$ numeri reali tali che il supporto di ω sia contenuto in $[a, b]$. L'integrale $\int_a^b \alpha(x)dx$ *non* dipende dalla scelta di a, b (purchè $\operatorname{supp}\omega \subset [a, b]$); denotiamolo con $\int_{[\mathbb{R}]} \omega$. Supponiamo che la classe di ω in $H^1_c(\mathbb{R})$ sia nulla, cioè che esista $f \in C^\infty$ a *supporto compatto* tale che

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} dx = df = \omega = \alpha(x)dx. \tag{4}$$

Siano $a < b$ numeri reali tali che $\operatorname{supp}\omega \subset [a, b]$; allora

$$\int_{[\mathbb{R}]} \omega = \int_a^b \omega = \int_a^b \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx = f(b) - f(a) = 0 - 0 = 0.$$

Questo dimostra che abbiamo una ben definita applicazione lineare

$$\begin{array}{ccc} H^1_c(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ [\omega] & \mapsto & \int_{[\mathbb{R}]} \omega. \end{array} \tag{5}$$

Dimostriamo che quest'applicazione è un isomorfismo. Se $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ è una funzione a dosso[1], l'integrale $\int_{[\mathbb{R}]} \alpha(x)dx$ è strettamente positivo, e quindi l'applicazione in (5) è suriettiva. D'altra parte, supponiamo che $[\alpha(x)dx] \in H^1_c(\mathbb{R})$ vada in 0, e siano $a < b$ numeri reali tali che $\operatorname{supp}(\alpha(x)dx) \subset [a, b]$; allora per il Teorema fondamentale del Calcolo,

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x \alpha(t)dt \right) dx = \alpha(x)dx,$$

e $\int_a^x \alpha(t)d$ è una funzione C^∞ a supporto contenuto in $[a, b]$. Quindi l'applicazione in (5) è anche iniettiva.

Esercizio 3. (i) Sia ω la $(n+1)$-forma differenziale su $\mathbb{R}^{n+1}$ definita da

$$\omega := \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_{n+1}.$$

(La notazione $\widehat{dx_i}$ significa che dx_i *non è presente.*) Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ data da $f(x) := ||x||^2$. Si verifichi che $df \wedge \omega$ è una forma di volume su $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$, e si concluda che la restrizione di ω a S^n è una forma di volume.

(ii) Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ tale che *non esistono* soluzioni simultanee delle equazioni

$$f(x) = 0, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_{n+1}} = 0,$$

e perciò

$$M := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) = 0\}$$

è una sottovarietà C^∞ di dimensione n di $\mathbb{R}^n$ (supponiamo che M non sia vuota!). Sia ω la $(n+1)$-forma differenziale su $\mathbb{R}^{n+1}$ definita da

$$\omega := \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_{n+1}.$$

Ragionando per analogia con (i), dimostrare che la restrizione di ω a M è una forma di volume, e quindi M è orienatbile.

[1] Per esempio $\alpha(x) = \varphi(1 + x) \cdot \varphi(1 - x)$, dove $\varphi(x)$ è uguale a 0 se $x \leq 0$, e uguale a e^{-1/x^2} se $x > 0$.

Risoluzione: (i): Calcolando, si trova che

$$df \wedge \omega = 2||x||^2 dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n+1}.$$

Questo implica che $\omega|_{S^n}$ è una forma di volume, perchè df si annulla su S^n. Esplicitamente, sia $a \in S^n$. Il differenziale $df(a)$ è non nullo, e si annulla sul piano tangente $T_a S^n$ a S^n in a. Quindi possiamo completare $df(a)$ a una base $\{df(a), \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ dello spazio cotangente a $\mathbb{R}^{n+1}$ in a, e i "pull-back" $\{d\iota(a)^*(\phi_1), \ldots, d\iota(a)^*(\phi_n)\}$, dove $\iota \colon S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ è l'inclusione, formano una base dello spazio cotangente a S^n in a. Ora, la collezione di tutti i prodotti esterni di n dei $\{df(a), \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ dà una base di $\Omega_a(\mathbb{R}^{n+1}$. Quindi esistono $c_1, \ldots c_{n+1} \in \mathbb{R}$ tali che

$$\omega = df(a) \wedge c_1 \widehat{\phi}_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n + df(a) \wedge c_2 \phi_1 \wedge \widehat{\phi}_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n + c_n df(a) \wedge c_n \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{\phi}_n + c_{n+1} \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n.$$

Siccome $df(a) \wedge \omega(a) \neq 0$, si ha che $c_{n+1} \neq 0$, e quindi la restrizione di ω a S^n è non zero in a. Ma a è un punto arbitrario di S^n, quindi la restrizione di ω a S^n è una forma di volume.
(ii): Calcolando, si trova che

$$df \wedge \omega = ||\nabla f(x)||^2 dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n+1}.$$

Per l'ipotesi fatta su f, segue che $df(a) \wedge \omega(a) \neq 0$ per ogni $a \in M$. Il resto del ragionamento è come sopra.

Esercizio 4. Sia

$$T^n := \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$$

il toro di dimensione n, cioè il prodotto di n cerchi.

1. Dare una base dello *spazio vettoriale reale* $H_{DR}(T^n)$.
2. Definire un isomorfismo tra l'*algebra reale* $H_{DR}(T^n)$ e l'algebra esterna $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$.

Risoluzione: (1): Sappiamo che $H^p_{DR}(S^1)$ ha dimensione 1 se $p \in \{0, 1\}$, e che ha dimensione 0 altrimenti. Come generatore di $H^0_{DR}(S^1)$ prendiamo la funzione costante 1, che denotimao 1 (è l'unità nell'algebra $H_{DR}(S^1)$), e denotiamo θ un generatore di $H^1_{DR}(S^1)$. Sia $\pi_i \colon T^n \to S^1$ l'i-esima proiezione, e $\theta_i := \pi_i^* \theta$. Per Künneth, una base dello spazio vettoriale reale $H_{DR}(T^n)$ è data da

$$\{1, \theta_1, \ldots, \theta_n, \theta_1 \wedge \theta_2, \ldots, \theta_{n-1} \wedge \theta_n, \ldots, \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_n\}.$$

(2): Sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di $\mathbb{R}^n$. L'applicazione lineare $\varphi \colon H_{DR}(T^n) \to \bigwedge(\mathbb{R}^n)$ che manda $\theta_{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta_{i_p}$ in $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ (per $1 \leq i_p < \ldots < i_p \leq n$) è un isomorfimso di algebre $H_{DR}(T^n) \xrightarrow{\sim} \bigwedge(\mathbb{R}^n)$.