# Geometria Differenziale,

*Prof. K. O'Grady*

**Soluzioni della prova di esame del 4 Settembre 2017**

**Esercizio 1.** Sia $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,1)\}$, e siano $\alpha, \beta$ le 1-forme su $M$ definite da

$$\alpha := \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx, \qquad \frac{x-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}dy - \frac{y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}dx.$$

(a) Siano $\Gamma_r, \Omega_r \subset M$ circonferenze di raggio $0 < r < \sqrt{2}$ e centro rispettivamente $(0,0)$ e $(1,1)$, orientate in senso antiorario. Si mostri che

$$\int_{\Gamma_r} \alpha = 2\pi, \quad \int_{\Omega_r} \alpha = 0, \qquad \int_{\Gamma_r} \beta = 0, \quad \int_{\Omega_r} \beta = 2\pi.$$

(b) Si verifichi che $\alpha$ e $\beta$ sono chiuse, e quindi rappresentano classi $[\alpha], [\beta] \in H^1_{DR}(M)$.

(c) Si dimostri che $[\alpha], [\beta] \in H^1_{DR}(M)$ sono linearmente indipendenti.

**Risoluzione:** (a): L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

è $C^\infty$, e preserva le orientazioni standard. Inoltre

$$f^*\alpha = d\theta. \tag{1}$$

Quindi, la parametrizzazione standarad di $\Gamma_r$, data da $\theta \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$, dà che

$$\int_{\Gamma_r} \alpha = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Segue anche che $\int_{\Omega_r} \alpha = 0$, perchè $\Omega_r$ è contenuto in $f(\{(r,\theta) \mid -\pi/4 < \theta < 3\pi/4\})$.

Le formule

$$\int_{\Gamma_r} \beta = 0, \quad \int_{\Omega_r} \beta = 2\pi$$

si dimostrano in modo analogo, considerando l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \mapsto & (1 + r\cos\theta, 1 + r\sin\theta) \end{array}$$

(b):

$$d\alpha := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)dxdy + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)dxdy = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy = 0.$$

Si può anche osservare che, per (1), si ha $f^*d\alpha = 0$, e siccome il differenziale di $f$ è suriettivo per ogni $(r,\theta)$ con $r \neq 0$, segue che $d\alpha = 0$. Siccome $\beta$ è ottenuta da $\alpha$ per traslazione, dall'equazione $d\alpha = 0$ segue che $d\beta = 0$.

(c): Supponiamo che $x, y \in \mathbb{R}$ e $x[\alpha] + y[\beta] = 0$. Quindi $x\alpha + y\beta$ è una 1-forma esatta, e perciò

$$\int_{\Gamma_r} (x\alpha + y\beta) = 0, \quad \int_{\Omega_r} (x\alpha + y\beta) = 0.$$

Per (a) otteniamo che

$$x \cdot 2\pi = 0, \quad y \cdot 2\pi = 0,$$

e quindi $x = y = 0$.

**Esercizio 2.** Enunciate il teorema di Künneth per varietà $C^\infty$, e dimostratelo sotto l'ipotesi che le varietà siano di tipo finito.

**Risoluzione:** Vedi pp. 47-50 del libro di Bott e Tu.

**Esercizio 3.** Siano $M$ una varietà $C^\infty$, e $i\colon M \to M$ un'involuzione, cioè un automorfismo $C^\infty$ tale che $i \circ i = \mathrm{Id}_M$. Supponiamo che $i$ non abbia punti fissi, cioè che $i(p) \neq p$ per ogni $p \in M$. Con queste ipotesi il quoziente topologico $N := M/\langle i \rangle$ (qui $\langle i \rangle$ è il sottogruppo del gruppo degli automorfismi di $M$ generato da $i$, cioè $\{\mathrm{Id}_M, i\}$) ha una struttura naturale di varietà $C^\infty$ tale che l'applicazione quoziente $\pi\colon M \to N$ sia un'applicazione $C^\infty$. (In breve: $\pi\colon M \to N$ ha la proprietà universale del quoziente topologico, ma per applicazioni $C^\infty$. Esplicitamente: dati $X$ varietà $C^\infty$ e $f\colon M \to X$ un'applicazione $C^\infty$ invariante per $i$, cioè tale che $f \circ i = f$, l'applicazione indotta $\overline{f}\colon N \to X$, cioè tale che $\overline{f} \circ \pi = f$, è $C^\infty$.)

(i) Sia $\pi^*\colon \Omega(N) \to \Omega(M)$ il pull-back di forme differenziali. Dimostrate che $\alpha \in \mathrm{Im}(\pi^*)$ se e solo se $i^*(\alpha) = \alpha$, o equivalentemente se solo se esiste $\gamma \in \Omega(M)$ tale che $\alpha = \gamma + i^*(\gamma)$.

(ii) Sia $\pi^*\colon H_{DR}(N) \to H_{DR}(M)$ il pull-back di classi di equivalenza forme differenziali chiuse. Dimostrate che $\pi^*$ è iniettivo, con immagine uguale al sottospazio invariante

$$H_{DR}(M)^i := \{\alpha \in H_{DR}(M) \mid i^*(\alpha) = \alpha\}.$$

**Risoluzione:** (i): Se $\alpha \in \mathrm{Im}(\pi^*)$, cioè esiste $\beta \in \Omega(N)$ tale che $\alpha = \pi^*\beta$, allora

$$i^*\alpha = i^*(\pi^*\beta) = (\pi \circ i)^*\beta = \pi^*\beta = \alpha.$$

Ora supponiamo che $i^*(\alpha) = \alpha$. Sia $q \in N$, e scegliamo $p \in M$ tale che $\pi(p) = q$. Il differenziale $d\pi(p)\colon T_pM \to T_qN$ è un isomorfismo, e quindi ha un'inversa $d\pi(p)^{-1}\colon T_qN \to T_pM$. La trasposta

$$(d\pi(p)^{-1})^*\colon (T_pM)^* \to (T_qN)^*$$

definisce un (isomorfismo)

$$\bigwedge(d\pi(p)^{-1})^*\colon \bigwedge(T_pM)^* \to \bigwedge(T_qN)^*$$

Quindi l'immagine del valore $\alpha(p) \in \bigwedge(T_pM)^*$ di $\alpha$ in $p$ è un elemento $\beta_p$ di $\bigwedge(T_qN)^*$. L'ipotesi $i^*(\alpha) = \alpha$ garantisce che $\beta_{i(p)} = \beta_p$. Quindi possiamo definire per ogni $q \in N$ un elemento $\beta(q) \in \bigwedge(T_qN)^*$ ponendo $\beta(q) := \beta_p$, dove $p \in M$ è uno qualsiasi dei punti tali che $\pi(p) = q$. Associando a $q \in N$ l'elemento $\beta(q) \in \bigwedge(T_qN)^*$ abbiamo definito una forma differenziale $\beta$ su $N$ perchè $\pi$ è un diffeomorfismo locale. Per costruzione $\pi^*\beta = \alpha$.

Per finire dimostriamo che $i^*(\alpha) = \alpha$ se solo se esiste $\gamma \in \Omega(M)$ tale che

$$\alpha = \gamma + i^*(\gamma). \tag{2}$$

Se $i^*(\alpha) = \alpha$, allora vale (2) con $\gamma = \alpha/2$. Se vale (2), allora

$$i^*\alpha = i^*\gamma + i^*(i^*(\gamma)) = i^*\gamma + (i \circ i)^*(\gamma) = i^*\gamma + (\mathrm{Id}_M)^*(\gamma) = i^*\gamma + \gamma = \alpha.$$

(ii): Dimostriamo che $\pi^*$ è iniettiva. Supponiamo che $\alpha \in \Omega(N)$, e che $\pi^*\alpha = d\beta$, dove $\beta \in \Omega(M)$. Allora, siccome $i^*(\pi^*\alpha) = \alpha$, abbiamo

$$\pi^*\alpha = d\left(\frac{1}{2}\beta + i^*\left(\frac{1}{2}\beta\right)\right).$$

Per l'esercizio 3, esiste $\gamma \in \Omega(N)$ tale che $\frac{1}{2}\beta + i^*(\frac{1}{2}\beta) = \pi^*\gamma$, e quindi $\pi^*\alpha = d\pi^*\gamma = \pi^*(d\gamma)$, ovvero $\pi^*(\alpha - d\gamma) = 0$. Siccome $\pi$ è un diffeomorfismo locale, segue che $\alpha - d\gamma = 0$, cioè $\alpha$ è esatta.

Concludiamo dimostrando che $\mathrm{Im}(\pi^*) = H_{DR}(M)^i$. Siccome il pull-back di una forma su $N$ è una forma invariante per $i$, segue che $\mathrm{Im}(\pi^*) \subset H_{DR}(M)^i$. Viceversa, sia $[\alpha] \in H_{DR}(M)^i$. Allora esiste $\beta \in \Omega(M)$ tale che $i^*\alpha = \alpha + d\beta$. Siccome $d\beta = i^*\alpha - \alpha$, segue che $i^*d\beta = -d\beta$, e quindi

$$\alpha + d\left(\frac{1}{2}\beta\right) = i^*\alpha - d\left(\frac{1}{2}\beta\right) = i^*\left(\alpha + d\left(\frac{1}{2}\beta\right)\right).$$

Per l'esercizio 3, segue che esiste $\gamma \in \Omega(N)$ tale che $\pi^*\gamma = \alpha + d\left(\frac{1}{2}\beta\right)$. Siccome $\pi$ è un diffeomorfismo locale, la forma $\gamma$ è chiusa, e $[\alpha] = \pi^*([\gamma])$.

**Esercizio 4.** Sia $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ il cerchio unitario nel campo complesso, e sia

$$T^n := \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$$

il toro di dimensione $n$. Sia $i$ l'involuzione di $T^n$ definita da

$$\begin{array}{ccc} T^n & \xrightarrow{i} & T^n \\ (z_1, z_2, \ldots, z_n) & \mapsto & (-z_1, \overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_n) \end{array}$$

(I) Verificate che $i$ è priva di punti fissi, e quindi il quoziente $K_n := T^n/\langle i \rangle$ è in modo naturale una varietà $C^\infty$ (vedi l'esercizio 3). (Notiamo che $K_1$ è diffeomorfo a $S^1$, e che $K_2$ è nota come la *bottiglia di Klein.*)

(II) Determinate i numeri di Betti della bottiglia di Klein $K_2$ (usate gli *enunciati* dell'esercizio 3).

(III) Determinate i numeri di Betti di $K_n$ (usate gli *enunciati* dell'esercizio 3).

**Risoluzione:** (I): $i$ è priva di punti fissi, perchè $z_1 \neq -z_1$ per ogni $z_1 \in S^1$.

(II): Per Künneth $H_{DR}(T^2) = \bigwedge\left(H^1_{DR}(S^1) \oplus H^1_{DR}(S^1)\right)$. L'involuzione di $S^1$ definita da $z_1 \mapsto -z_1$ agisce banalmente su $H_{DR}(S^1)$, mentre l'involuzione di $S^1$ definita da $z_2 \mapsto \overline{z}_2$ è la moltiplicazione per $-1$ su $H^1_{DR}(S^1)$. Per l'Esercizio 3, abbiamo

$$H_{DR}(K_2) = H_{DR}(T^2)^i,$$

e, per quanto detto,

$$\dim H^p_{DR}(T^2)^i = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \{0,1\}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi $b_p(K_2) = 1$ per $p \in \{0,1\}$, e $b_p(K_2) = 0$ per $p \notin \{0,1\}$.

(III): Ragionando come in (II), troviamo che

$$b_p(K_n) = \begin{cases} \binom{n-1}{p} & \text{se } p \text{ è pari,} \\ \binom{n-1}{p-1} & \text{se } p \text{ è dispari.} \end{cases}$$