Istituzioni di Geometria Superiore

Prof. K. O'Grady

Prova scritta del 29 Gennaio 2019 - risoluzioni

Esercizio 1. Calcolare la coomologia di De Rham di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. (Potete assumere di sapere la coomologia di De Rham delle sfere.)

Risoluzione: Si ha

$$H^p_{DR}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } 0 \le p \le 2n, \text{ e } p \text{ è pari,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si può dimostrare per induzione su n. Il caso $n = 0$ è banalmente vero, perchè $\mathbb{P}^0_{\mathbb{C}}$ ha un solo elemento. Il passo induttivo si dimostra applicando Mayer-Vietoris al ricoprimento aperto $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} = U \cup V$, dove $U = \mathbb{C}^n = \mathbb{P}^n_{Z_0}$, e $V = (\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus \{[1, 0, \ldots, 0]\})$. Il punto è che U è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$, e quindi ha coomologia banale, V è omotopicamente equivalente a $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$, e quindi conoscete la sua coomologia per ipotesi induttiva, e $U \cap V \cong (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$ è omotopicamente equivalente alla sfera S^{2n+1}.

Esercizio 2. Sia M una varietà C^∞ di dimensione $n \ge 1$, orientabile e compatta. Supponiamo che $\{U_1, \ldots, U_r\}$ sia un buon ricoprimento di M, cioè $M = U_1 \cup \ldots \cup U_r$, e ciascuna intersezione $U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p}$ non vuota è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Dimostrate che $r \ge n + 2$.

Risoluzione: Siccome M è orientabile e compatta di dimensione n, $H^n_{DR}(M) \neq 0$ per la dualità di Poincarè. Quindi basta dimostrare che, se N è una varietà C^∞, e $\{U_1, \ldots, U_r\}$ è un suo buon ricoprimento, allora $\widetilde{H}^p_{DR}(N) = 0$ per $p \ge (r - 1)$ ($\widetilde{H}^p_{DR}(N)$ è la coomologia di De Rham ridotta di N). Questo si dimostra per induzione su r. Il caso $r = 1$ è banale, perchè allora N è diffeomorfo a $\mathbb{R}^{n+1}$, e $\widetilde{H}^p_{DR}(\mathbb{R}^n) = 0$ per ogni p. Il passo induttivo si dimostra applicando Mayer-Vietoris al ricoprimento aperto di N dato da $U_1 \cup \ldots \cup U_{r-1}$ e U_r.

Esercizio 3. Sia $\pi\colon L \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ il fibrato lineare tautologico, cioè

$$L := \{(v, \ell) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid v \in \ell\},$$

e π è la restrizione a L della proiezione $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. (I punti di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ sono sottospazi vettoriali complessi $\ell \subset \mathbb{C}^{n+1}$ di dimensione 1.) Dimostrate che, se $n > 0$, il fibrato lineare tautologico *non* è banale.

Risoluzione: Supponiamo che L sia banale, e che $f\colon L \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ sia un isomorfismo di fibrati ineari. Sia $\sigma_0\colon \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \to L$ la sezione nulla, e $L_0 \subset L$ il complementare dell'immagine di σ_0. Allora la restrizione di f a L_0 definisce un diffeomorfismo $f_0\colon L_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^*$. In particolare

$$H^1_{DR}(L_0) \cong H^1_{DR}(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{R}. \tag{1}$$

(Per Künneth e il calcolo della coomologia di S^1, che è omotopicamente equivalente a $\mathbb{C}^*$.) D'altra parte, la definizione di L dà

$$L_0 := \{(v, \ell) \in (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \mid v \in \ell\}.$$

Sia $(v, \ell) \in L_0$; siccome v non è nullo, ℓ è univocamente determinato da v, e quindi l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} L_0 & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \\ (v, \ell) & \mapsto & v \end{array}$$

è biunivoca. Si vede facilmente che φ è un diffeomorfismo. La conclusione è che L_0 è diffeomorfo a $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})$, e quindi, siccome $n \ge 1$, si ha $H^1_{DR}(L_0) = 0$. Questo contraddice (1).

Esercizio 4. Siano X, Y varietà quasi proiettive, e sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione regolare. Dimostrate che f è Zariski continua.

Risoluzione: Supponiamo che $X \subset \mathbb{P}^n$ e $Y \subset \mathbb{P}^m$ siano Zariski localmente chiusi. Per definizione di applicazione regolare, esistono un ricoprimento Zariski aperto $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$, e per ogni $\alpha \in A$ polinomi omogenei $P_0^\alpha, \ldots, P_m^\alpha \in \mathbb{C}[Z_0, \ldots, Z_n]_{d_\alpha}$ tali che

(a) $(P_0^\alpha(Z), \ldots, P_m^\alpha(Z)) \neq (0, \ldots, 0)$ per ogni $[Z] \in U_\alpha$, e

(b) $f([Z]) = [P_0^\alpha(Z), \ldots, P_m^\alpha(Z)]$ per ogni $[Z] \in U_\alpha$.

Ora sia $W \subset Y$ un chiuso, quindi $W = V(F_1, \ldots, F_r) \cap Y$, dove $F_k \in \mathbb{C}[Z_0, \ldots, Z_m]_{e_k}$ per $k \in \{1, \ldots, r\}$. L'intersezione $f^{-1}(W) \cap U_\alpha$ è data da

$$f^{-1}(W) \cap U_\alpha = \{[Z] \in U_\alpha \mid F_k(P_0^\alpha(Z), \ldots, P_m^\alpha(Z)) = 0, \quad 1 \leq k \leq r\},$$

e quindi è un chiuso di Zariski di U_α (ciascun $F_k(P_0^\alpha(Z), \ldots, P_m^\alpha(Z))$ è un polinomio omogeneo nelle $Z_0, \ldots, Z_n$). Siccome $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è un ricoprimento aperto di X, segue che $f^{-1}(W)$ è Zariski chiuso in X. Questo dimostra che f è Zariski continua.

Esercizio 5. Sia $X \subset \mathbb{P}^3$ l'ipersuperficie $X = V(Z_0Z_1^2 - Z_0Z_2Z_3 + Z_2^3)$. Determinate $\operatorname{sing} X$, cioè il luogo dei punti singolari di X. (Attenzione: a priori non sapete se $I(X) = (Z_0Z_1^2 - Z_0Z_2Z_3 + Z_2^3)$.)

Risoluzione: Sia $F \in \mathbb{C}[Z_0, \ldots, Z_3]_3$ dato da $F := Z_0Z_1^2 - Z_0Z_2Z_3 + Z_2^3$. Quindi $X = V(F)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{Z_0} &= Z_1^2 - Z_2Z_3, && (2)\\ \frac{\partial F}{Z_1} &= 2Z_0Z_1, && (3)\\ \frac{\partial F}{Z_2} &= -Z_0Z_3 + 3Z_2^2, && (4)\\ \frac{\partial F}{Z_3} &= -Z_0Z_2. && (5) \end{aligned}$$

Segue che tutte le derivate parziali di F si annullano in $[Z]$ se e solo se

$$[Z] \in \{[1,0,0,0],\ [0,0,0,1]\}. \tag{6}$$

Infatti si verifica facilmente che se vale (6) allora tutte le derivate parziali di F si annullano in $[Z]$. Viceversa, supponiamo che tutte le derivate parziali di F si annullino in $[Z]$. Supponiamo che $Z_0 \neq 0$. Da (3) e (5) segue che $Z_1 = Z_3 = 0$, e da (4) si ottiene che $Z_2 = 0$, e perciò $[Z] = [1,0,0,0]$. Se $Z_0 = 0$, segue da (5) e (2) che $Z_1 = Z_2 = 0$, e perciò $[Z] = [0,0,0,1]$.

Il risultato appena dimostrato implica che $I(X) = (F)$. Infatti $I(X) = (F)$ se e solo se, nella scomposizione in prodotto di fattori primi di F, non esistono fattori con esponente maggiore di 1. Se esistesse un tale fattore, diciamo $A \in \mathbb{C}[Z_0, \ldots, Z_3]_d$ con $d > 0$, avremmo $F = A^2 \cdot B$, dove $B \in \mathbb{C}[Z_0, \ldots, Z_3]_{3-2d}$ (e quindi segue che $d = 1$), e le derivate parziali di F si annullerebbero su $V(A)$. Siccome $V(A)$ è un insieme infinito, questo contraddice il calcolo appena fatto. Siccome $I(X) = (F)$, i punti singolari di X sono quelli che appaiono in (6), cioè

$$\operatorname{sing} X = \{[1,0,0,0],\ [0,0,0,1],\ [3,0,1,0]\}.$$