Istituzioni di Geometria Superiore

Prof. K. O'Grady

Prova scritta del 18 Febbraio 2019 - risoluzioni

Esercizio 1. (a) Calcolare la coomologia di De Rham di S^n.

(b) Dimostrare che l'applicazione antipodale

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\iota} & S^n \\ x & \mapsto & -x \end{array}$$

è omotopa all'identità se e solo se n è dispari.

Risoluzione: (a): Si ha

$$\widetilde{H}^p_{DR}(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p = n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si può dimostrare per induzione su n. Il caso $n = 0$ è banalmente vero, perchè S^0 consiste di due punti. Il passo induttivo si dimostra applicando Mayer-Vietoris al ricoprimento aperto $S^n = U \cup V$, dove

$$U := S^n \setminus \{(1, 0, \ldots, 0)\}, \quad V := S^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 1)\}.$$

Sia U che V sono diffeomorfi a $\mathbb{R}^n$, e $U \cap V$ è omotopicamente equivalente alla sfera S^{n-1}. Quindi la successione esatta di Mayer-Vietoris dà che l'applicazione di cobordo

$$\widetilde{H}^{p-1}_{DR}(S^{n-1}) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}^p_{DR}(S^n)$$

è un isomorfismo per ogni p.

(b): Se n è dispari, scriviamo $n+1 = 2m$, e denotiamo le coordinate su $\mathbb{R}^{n+1}$ così: $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_m, y_m)$. Siano $\alpha, \beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni C^∞ tali che $\alpha(t)^2 + \beta(t)^2 = 1$ per ogni t, e

$$\alpha(t) = 1 \ \forall t \in (-\infty, 0], \quad \alpha(t) = -1 \ \forall t \in [1, +\infty), \quad \beta(t) = 0 \ \forall t \in (-\infty, 0], \quad \beta(t) = 0 \ \forall t \in [1, +\infty).$$

(Non è difficile costruire tali funzioni.) L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} S^{2m} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\Phi} & S^{2m} \\ (v, t) & \mapsto & (\alpha(t)x_1 - \beta(t)y_1, \beta(t)x_1 + \alpha(t)y_1, \ldots, \alpha(t)x_m - \beta(t)y_m, \beta(t)x_m + \alpha(t)y_m) \end{array}$$

è un'omotopia C^∞ tra l'identità di S^n e l'applicazione antipodale.

Se n è pari, supponiamo che esista un'omotopia C^∞ tra l'identità di S^n e l'applicazione antipodale ι. Ne segue che $H^n_{DR}(\iota) = H^n_{DR}(\mathrm{Id}_{S^n}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Ma un calcolo espicito mostra che $H^n_{DR}(\iota) = (-1)^{n+1}$, e quindi $H^n_{DR}(\iota) = -1$ se n è pari. Per il calcolo esplicito, si può ricordare che la restrizione a S^n della n forma differenziale

$$\omega_n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i dx_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

è un generatore di $H^n_{DR}(S^n) \cong \mathbb{R}$. Siccome la moltiplicazione per (-1) moltiplica ω_n per $(-1)^{n+1}$, questo finisce il calcolo espicito.

Esercizio 2. Dimostrare che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è orientabile se e solo se n è dispari.

Risoluzione: $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è il quoziente di S^n per l'azione di $\mathbb{Z}/(2)$ definita dall'applicazione antipodale ι. Siccome S^n è connesso orientabile, il quoziente $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è orientabile se e solo se $H^n(\iota)$ è l'identità. Per il calcolo fatto nella risoluzione dell'esercizio 1, $H^n(\iota)$ è l'identità se e solo se n è dispari.

Esercizio 3. Calcolare l'*omologia singolare* di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Risoluzione: Siano $A, B \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ gli aperti

$$A := \{[1, y, z]\} \cong \mathbb{R}^2, \quad B := \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus \{[1, 0, 0]\} \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}.$$

Si ha $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = A \cup B$, e

$$A \cap B \cong S^1 \times \mathbb{R}.$$

La successione di Mayer-Vietoris per l'omologia singolare definita dal ricoprimento $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = A \cup B$ dà la successione esatta

$$0 \to H_2(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}) \to H_1(A \cap B) \to H_1(A) \oplus H_1(B) \to H_1(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}) \to 0.$$

Ora, $H_1(A) = 0$, e $H_1(A \cap B) \cong H_1(B) \cong \mathbb{Z}$. L'applicazione $H_1(A \cap B) \to H_1(B)$ è identificata con l'applicazione $H_1(S^1) \to H_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}})$ indotta dall'applicazione quoaziente $S^1 \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$, e quindi è la moltiplicazione per 2. Segue che

$$H_p(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } p = 0, \\ \mathbb{Z}/(2) & \text{se } p = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esercizio 4. Sia $X := V(Z_1^2(Z_1 + Z_0) - Z_0 Z_2^2) \subset \mathbb{P}^2$.

(a) Dimostrare che X è irriducibile.

(b) Definire un'applicazione birazionale $f \colon \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$. (Può essere di aiuto ricordare come si definisce un'applicazione birazionale tra una conica liscia e $\mathbb{P}^1$.)

(c) Dimostrare che *non* esiste un isomorfismo $f \colon \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} X$.

Risoluzione: (a): È sufficiente dimostrare che il polinomio che definisce X, cioè $F := Z_1^2(Z_1+Z_0)-Z_0 Z_2^2$ è primo (nell'anello a fattorizzazione unica $\mathbb{C}[Z_0, Z_1, Z_2]$). Possiamo considerare F come polinomio in Z_0 a coefficienti nell'anello a fattorizzazione unica $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$. Supponiamo che

$$(Z_1^2 - Z_2^2)Z_0 + Z_1^3 = (aZ_0 + b) \cdot c, \quad a, b, c \in \mathbb{C}[Z_1, Z_2]$$

sia una fattorizzazione. Allora $Z_1^3 = b \cdot c$, quindi b e c sono ottenuti moltiplicando scalari non nulli per potenze di Z_1. Ma allora, siccome $(Z_1^2 - Z_2^2) = a \cdot c$, segue che $(Z_1^2 - Z_2^2)$ si annulla per $Z_1 = 0$, e questo è assurdo.
(b): Ogni retta per il punto $p = [1, 0, 0]$, cioè di equazione

$$\alpha Z_1 - \beta Z_2 = 0,$$

incontra X in p con molteplicità 2, e in un terzo punto q (eventualmente coincidente con p). Infatti ponendo

$$[Z_0, Z_1, Z_2] = [s, \beta t, \alpha t]$$

nell'equazione che definisce X (quindi $[s, t]$ sono coordinate proiettive sulla retta), otteniamo che

$$q = [\beta^3, (\alpha^2 - \beta^2)\beta, (\alpha^2 - \beta^2)\alpha].$$

Quindi abbiamo un'applicazione regolare

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{f} & X \\ [\alpha, \beta] & \mapsto & [\beta^3, (\alpha^2 - \beta^2)\beta, (\alpha^2 - \beta^2)\alpha], \end{array}$$

con inversa razionale

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{f}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^1 \\ [Z_0, Z_1, Z_2] & \mapsto & [Z_2, Z_1]. \end{array}$$

(c): Siccome F è primo, le sue derivate parziali calcolano lo spazio tangente di Zariski di X in un suo punto. Segue che X è singolare in p, perchè lo spazio tangente ha dimensione 2 (mentre X ha dimensione 1). D'altra parte $\mathbb{P}^1$ è liscio, quindi non può esistere un isomorfismo tra $\mathbb{P}^1$ e X, che è uno spazio che ha un punto singolare.

Esercizio 5. Dimostrare che un chiuso (di Zariski) $X \subset \mathbb{A}^n$ ha dimensione pura $n-1$ (cioè ogni sua componente irriducibile ha dimensione $n-1$) se e solo se è una ipersuperficie.

Risoluzione: Se $X \subset \mathbb{A}^n$ è una ipersuperficie irriducibile, allora è chiusa per definizione, e abbiamo visto che il campo delle frazioni $\mathbb{C}(X)$ ha grado di trascendenza $n-1$ su $\mathbb{C}$. Siccome ogni componente irriducibile di una ipersuperficie è una ipersuperficie, segue che una ipersuperficie $X \subset \mathbb{A}^n$ ha dimensione pura $n-1$.

Viceversa, sia $X \subset \mathbb{A}^n$ un chiuso di dimensione pura $n-1$, e dimostriamo che è una ipersuperficie. Siccome una unione di ipersuperfici è una ipersuperficie, possiamo supporre che X sia irriducibile. Siccome X è chiuso, e $X \neq \mathbb{A}^n$, esiste un polinomio non nullo $f \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ che si annulla su X. Siano $f_1, \ldots, f_r$ i fattori primi di f. Siccome X è irriducibile, almeno uno dei fattori si annulla su X, possiamo supporre che sia f_1. Allora $X \subset V(f_1)$, $\dim X = \dim V(f_1)$, X è chiuso in $V(f_1)$, e $V(f_1)$ è irriducibile. Segue che $X = V(f_1)$.