Istituzioni di Geometria Superiore

Prof. K. O'Grady

Prova scritta del 23 Luglio 2019 - risoluzioni

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}$ lo spazio totale del fibrato tautologico su $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, cioè

$$\mathbb{E} := \{(v, \ell) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \mid v \in \ell\}.$$

(a) Dimostrare che $\mathbb{E}$ è una sottovarietà C^∞ di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ di dimensione 2.

(b) Dimostrare che gli anelli graduati (più precisamente $\mathbb{R}$ algebre) $H_{DR}(\mathbb{E})$ e $H_{DR}(S^1 \times \mathbb{R})$ sono isomorfi.

(c) Dimostrare che $\mathbb{E}$ non è diffeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.

(d) È vero che $\mathbb{E}$ è omotopicamente equivalente a $S^1 \times \mathbb{R}$?

Risoluzione: (a): $\mathbb{E} = \{(z_0, z_1, [w_0, w_1] \mid z_0 w_1 - z_1 w_0 = 0\}$, quindi l'intersezione di $\mathbb{E}$ con gli aperti $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})_{w_i}$ per $i \in \{0, 1\}$ è data da

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \bigcap \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})_{w_0} &= \{(z_0, z_1, w_1) \in \mathbb{R}^3 \mid z_0 w_1 - z_1 = 0\}, \\ \mathbb{E} \bigcap \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})_{w_1} &= \{(z_0, z_1, w_1) \in \mathbb{R}^3 \mid z_0 - z_1 w_0 = 0\}. \end{aligned}$$

Segue che $\mathbb{E}$ è una sottovarietà C^∞ di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ di dimensione 2.
(b): Sia $\mathbb{E}$ che $S^1 \times \mathbb{R}$ sono omotopicamente equivalenti a S^1, e quindi sono omotopicamente equivalenti tra loro. Segue (per invarianaza omotopica della coomologia di De Rham) che gli anelli graduati $H_{DR}(\mathbb{E})$ e $H_{DR}(S^1 \times \mathbb{R})$ sono isomorfi.
(c): $S^1 \times \mathbb{R}$ è orientabile (il prodotto di varietà orientabili è orientabile), mentre $\mathbb{E}$ non è orientabile.
(d): Sì.

Esercizio 2. Dimostrare che l'aperto di $\mathbb{R}^2$ definito da

$$S := \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

non ha un buon ricoprimento finito.

Risoluzione: Siccome una varietà C^∞ con un buon ricoprimento finito ha coomologia di De Rham di dimensione finita, è sufficiente dimostrare che la coomologia di De Rham S non ha dimensione finita. Dato $a \in \mathbb{Z}$, sia $\theta_a \in \Omega^1(S)$ la forma angolare

$$\theta_a := \frac{x - a}{(x-a)^2 + y^2} dy - \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} dx.$$

Si ha $d\theta_a = 0$, e quindi θ_a rappresenta una classe di De Rham $[\theta_a] \in H^1_{DR}(S)$. Le classi $\{[\theta_a]\}_{a \in \mathbb{Z}}$ sono linearmente indipendenti, e quindi $H^1_{DR}(S)$ non ha dimensione finita. Per dimostrare che le classi $\{[\theta_a]\}_{a \in \mathbb{Z}}$ sono linearmente indipendenti si può considerare, per ogni $b \in \mathbb{Z}$, il cammino *chiuso*

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{\gamma_b} & S \\ t & \mapsto & (b + \frac{\cos 2\pi t}{2}, \frac{\sin 2\pi t}{2}) \end{array}$$

Si ha

$$\int_{\gamma_b} \theta_a = \delta_{ab},$$

e da questo segue che e classi $\{[\theta_a]\}_{a \in \mathbb{Z}}$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 3. Sia $T \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ il sottinsieme chiuso definito da

$$x \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 2x)^2 = 0, \quad y \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 2x)^2 = 0.$$

Determinare i punti lisci di T, e la dimensione di T nei suoi punti lisci.

Risoluzione: T è l'unione della retta $R := V(x, y)$ e della quadrica liscia $Q := V(x^2 + y^2 + z^2 - 2x)$. L'intersezione $R \cap Q$ contiene un unico punto, cioè $p_0 = (0, 0, 0)$. Siccome una varietà è localmente irriducibile in un suo punto liscio, T è singolare in p_0. D'altra parte $T \setminus \{p_0\}$ è liscia. Chiaramente se $p \in R \setminus \{p_0\}$ allora $\dim_p T = \dim R = 1$, e se $p \in Q \setminus \{p_0\}$ allora $\dim_p T = \dim Q = 2$.

Esercizio 4. Rispondere a ciascuna delle seguenti domande, *motivando la risposta*:

(a) È vero che l'immagine di un'applicazione regolare tra varietà quasi proiettive è chiusa ?

(b) Sia $T \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ il chiuso affine $T := V(xy - z^2)$, e sia $R \subset T$ la retta $R := V(x, z)$. Esiste $\varphi \in \mathbb{C}[T]$ tale che

$$\{f \in \mathbb{C}[T] \mid f_{|R} = 0\} = (\varphi)$$

ovvero che *genera l'ideale di R in T* ?

Risoluzione: (1): No. L'inclusione $(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ è regolare ma non chiusa.
(2): No. Lo spazio tangente di T nel punto $p_0 = (0, 0, 0)$ ha dimensione 3, e lo spazio tangente di R nel punto $p_0 = (0, 0, 0)$ ha dimensione 1. Se $\varphi \in \mathbb{C}[T]$ generasse l'ideale di R in T, allora lo spazio tangente di R nel punto $p_0 = (0, 0, 0)$ sarebbe uguale a $\ker(d\varphi(p_0))$, e quindi avrebbe dimensione almeno 2, contraddizione.

Esercizio 5. Calcolate i numeri di Betti della sottovarietà C^∞ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ definita da

$$Q := \{[Z_0, \ldots, Z_3] \mid Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = 0\}.$$

Risoluzione: L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & Q \\ ([S_0, S_1], [T_0, T_1]) & \mapsto & [\frac{1}{2}(S_0T_0 + S_1T_1), -\frac{i}{2}(S_0T_0 - S_1T_1), \frac{1}{2}(S_1T_0 - S_0T_1), \frac{i}{2}(S_1T_0 + S_0T_1) \end{array}$$

è un diffeomorfismo, quindi Q è diffeomorfa a $S^2 \times S^2$. Per Künneth segue che

$$b_p(Q) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \{0, 4\}, \\ 2 & \text{se } p = 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$