Istituzioni di Geometria Superiore

Prof. K. O'Grady

Soluzioni della prova in itinere del 5 Novembre 2018

Esercizio 1. Sia M una varietà C^∞ di dimensione n. Sia $x_0 \in M$, e sia $U \subset M$ un aperto contenente x_0, provvisto di un diffeomorfismo $U \xrightarrow{\sim} B_n(0,R)$ che manda x_0 in 0, dove $B_n(0,R)$ è la palla aperta in $\mathbb{R}^n$ di centro 0 e raggio R.

Sia $p > 0$, e $\alpha \in H^p_{DR}(M)$. Dimostrate che dato $0 < r < R$, esiste un rappresentante ω di α con supporto contenuto in $M \setminus B_n(0,r)$ (identifichiamo U con $B_n(0,R)$, e quindi $B_n(0,r)$ è identificato con un aperto di U contenente x_0).

Risoluzione: Sia $\tau \in \Omega^p(M)$ un rappresentante di α. Siccome $H^p_{DR}(U) \cong H^p_{DR}(\mathbb{R}^n) = 0$ (perchè $p > 0$), esiste $\xi \in \Omega^{p-1}(U)$ tale che $d\xi = \tau_{|U}$. Sia $\rho \in C^\infty(M)$ tale che

$$\operatorname{supp}\rho \subset B_n(0,(r+R)/2), \quad \rho_{|B_n(0,r)} = 1.$$

Allora $\rho\xi$ è una $(p-1)$ forma C^∞ su M, dove si intende che vale 0 su $M \setminus B_n(0,R)$. Quindi $\tau - d(\rho\xi)$ è un rappresentante di α, nullo su $B_n(0,r)$, cioè con supporto contenuto in $M \setminus B_n(0,r)$.

Esercizio 2. Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ il cerchio definito da

$$C := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3 = 0\}.$$

Determinate la coomologia di De Rham di $\mathbb{R}^3 \setminus C$.

Risoluzione: Dimostriamo che

$$H^p_{DR}(\mathbb{R}^3 \setminus C) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } 0 \le p \le 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{1}$$

Si vede facilmente che $\mathbb{R}^3 \setminus C$ è connesso, e questo dimostra che $H^p_{DR}(\mathbb{R}^3 \setminus C) \cong \mathbb{R}$.

Sia $U := \mathbb{R}^3 \setminus C$, e sia $V \subset \mathbb{R}^3$ il sottoinsieme dei punti che distano meno di $1/2$ da C, cioè

$$V := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1)^2 + x_3^2 < 1/2\}.$$

Sia U che V sono aperti di $\mathbb{R}^3$, e $\mathbb{R}^3 = U \cap V$. Quindi abbiamo la successione esatta di Mayer-Vietoris

$$\ldots \longrightarrow H^p_{DR}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow H^p_{DR}(U) \oplus H^p_{DR}(V) \longrightarrow H^p_{DR}(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^{p+1}_{DR}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \ldots$$

Siccome la successione degli H^0_{DR} è esatta, e siccome $H^p_{DR}(\mathbb{R}^3) = 0$ per $p > 0$, segue che per ogni $p > 0$ abbiamo un isomorpfismo

$$H^p_{DR}(U) \oplus H^p_{DR}(V) \xrightarrow{\sim} H^p_{DR}(U \cap V). \tag{2}$$

Ora, V è omotopicamente equivalente a C, e quindi

$$H^p_{DR}(V) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } 0 \le p \le 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{3}$$

D'altra parte, $U \cap V$ è omotopicamente equivalente alla sottovarietà C^∞ dei punti di $\mathbb{R}^3$ a distanza da C *uguale* a $1/4$, e quest'ultimo è diffeomorfo a $S^1 \times S^1$, quindi

$$H^p_{DR}(U \cap V) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p \in \{0,2\}, \\ \mathbb{R}^2 & \text{se } p = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{4}$$

L'equazione in (1) segue dall'isomorfismo in (2) e dalle formule in (3) e in (4).

Esercizio 3. Sia M una varietà C^∞ connessa compatta orientabile di dimensione $4r$. Sia $[M]$ una orientazione di M. Per dualità di Poincarè, la forma bilineare simmetrica (detta d'intersezione)

$$\begin{array}{ccc} H^{2r}(M) \times H^{2r}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ([\alpha],[\beta]) & \mapsto & \int_{[M]} \alpha \wedge \beta \end{array}$$

è non degenere. La sua segnatura[1] è la *segnatura della varietà orientata* M. (Notate che se cambiamo l'orientazione di M, la segnatura cambia segno.)

Calcolate la segnatura di $S^2 \times S^2$.

Risoluzione: Sappiamo che

$$H^p_{DR}(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p \in \{0,2\}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per Künneth segue che una base di $H^2_{DR}(S^2 \times S^2)$ è data da $\mathcal{B} = \{[\pi_1^*\alpha], [\pi_2^*\alpha]\}$, dove $[\alpha]$ è un generatore di $H^2_{DR}(S^2)$, cioè $\int_{[S^2]} \alpha \neq 0$. Nella base $\mathcal{B}$, la forma d'intersezione ha matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & (\int_{[S^2]} \alpha)^2 \\ (\int_{[S^2]} \alpha)^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Segue che la segnatura è 0.

Esercizio 4. Sia M una varietà C^∞ connessa e compatta.

1. Supponete che esista un rivestimento topologico $f\colon M \to M$ di grado $d > 1$. Dimostrate che $\chi(M) = 0$.
2. Per ogni dimensione $n > 0$ e grado $d > 1$ definite un rivestimento topologico $f\colon M \to M$ di grado d, dove M è una varietà C^∞ connessa e compatta di dimensione n.

Risoluzione: (1): Siccome $\chi(M) = d \cdot \chi(M)$, segue che $\chi(M) = 0$.
(2) Identifichiamo S^1 con il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ dei numeri di norma 1. L'applicazione $f_d\colon S^1 \to S^1$ definita da $f_d(z) = z^d$ è un rivestimento topologico di grado d. Questo risolve il problema per $n = 1$ e d arbitrario. Se $n > 1$, poniamo $M := S^1 \times S^{n-1}$, e

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^{n-1} & \longrightarrow & S^1 \times S^{n-1} \\ (z,p) & \mapsto & (z^d, p) \end{array}$$

[1] Se in una diagonalizziazione della forma d'intersezione le entrate positive sono a, e quelle negative sono b, la segnatura è $(a - b)$.