Istituzioni di Geometria Superiore

Prof. K. O'Grady

Soluzioni della prova in itinere del 18 Gennaio 2019

Esercizio 1. Descrivere gli ideali massimali di $\mathbb{C}[X]$ (*motivando la risposta*) per

(a) $X = \mathbb{A}^2 \setminus V(f)$, dove $f \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$;

(b) $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Risoluzione: (a): Sappiamo che X è una varietà affine (è isomorfo al chiuso $V(f(z_1,z_2)\cdot z_3) \subset \mathbb{A}^3$), e quindi, per il Nullstellensatz, gli ideali massimali di X sono gli ideali $\mathfrak{m}_a$ per $a \in X$ ($\mathfrak{m}_a \subset \mathbb{C}[X]$ è l'ideale delle funzioni regolari che svaniscono in a).
(b): Si ha

$$\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[z_1, z_2], \tag{1}$$

cioè ogni funzione regolare su $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è la restrizione di una funzione regolare su $\mathbb{A}^2$. Infatti, sia $\varphi \in \mathbb{C}[X]$. Per definizione, esistono un ricoprimento aperto $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, e $f_i, g_i \in \mathbb{C}[z_1,z_2]$ per ogni $i \in I$, tali che $g_i(a) \neq 0$ per ogni $a \in U_i$ (cioè $U_i \subset (\mathbb{A}^2 \setminus V(g_i))$), e $\varphi_{|U_i} = \frac{f_i}{g_i}$. In effetti, siccome X è irriducibile, segue che $\varphi_{|(\mathbb{A}^2 \setminus V(g_i)} = \frac{f_i}{g_i}$. Siccome le varietà quasi proiettive sono quasi compatte, possimao assumere che I (l'insieme degli indici) sia finito; diciamo $I = \{1,\ldots,r\}$. Siccome $\{U_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento di X, $V(g_1,\ldots,g_r) \subset \{(0,0)\}$. Per il Nullstellensatz, esistono $n \geq 0$, e $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}[z_1,z_2]$, per $i \in \{1,\ldots,r\}$, tali che

$$z_1^n = \sum_{i=1}^r \alpha_i g_i, \qquad z_2^n = \sum_{i=1}^r \beta_i g_i. \tag{2}$$

Moltiplicando le uguaglianze in (2) per φ, otteniamo che

$$\varphi z_1^n = \sum_{i=1}^r \alpha_i f_i, \qquad \varphi z_2^n = \sum_{i=1}^r \beta_i f_i.$$

Quindi, ponendo $p := \sum_{i=1}^r \alpha_i f_i$ e $q := \sum_{i=1}^r \beta_i f_i$, abbiamo che

$$\varphi_{|(\mathbb{A}^2 \setminus V(z_1))} = \frac{p}{z_1^n}, \quad \varphi_{|(\mathbb{A}^2 \setminus V(z_2))} = \frac{q}{z_2^n}. \tag{3}$$

Siccome $\mathbb{A}^2 \setminus V(z_1) \setminus V(z_2)$ è denso in $\mathbb{A}^2$, segue che $p \cdot z_2^n = q \cdot z_1^n$ su $\mathbb{A}^2$. Ma $\mathbb{C}[z_1,z_2]$ è un dominio a fattorizzazione unica, e z_1^n, z_2^n sono coprimi, quindi esiste $h \in \mathbb{C}[z_1,z_2]$ tale che $q = h \cdot z_2^n$ e $p = h \cdot z_1^n$. Da (3) segue che $h_{|X} = \varphi$. Abbiamo dimostrato che vale (1). (Si può dare una dimostrazione più semplice di (1), senza passare per il Nullstellensatz.)

Per (1) e il Nullstellnsatz (per $\mathbb{C}[z_1,z_2]$), gli ideali massimali di $\mathbb{C}[X]$ sono gli ideali $\mathfrak{m}_a$ per $a \in \mathbb{A}^2$ (in particolare l'ideale massimale $\mathfrak{m}_{(0,0)}$ non corriponde ad alcun punto di X).

Esercizio 2. Sia $n \geq 2$, e sia $X \subset \mathbb{P}^n$ la quadrica irriducibile $V(Z_0^2 + \ldots + Z_n^2)$. Dare un'applicazione birazionale $f\colon \mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow X$.

Risoluzione: L'equazione di Q si può scrivere

$$Z_0^2 + \ldots + Z_{n-2}^2 + (Z_{n-1} + iZ_n)(Z_{n-1} - iZ_n) = 0.$$

Quindi nelle coordinate omogenee $[W_0, \ldots, W_n]$ date da

$$W_k := \begin{cases} Z_k & \text{se } 0 \leq k \leq n-2, \\ Z_{n-1} + iZ_n & \text{se } k = n-1, \\ Z_{n-1} - iZ_n & \text{se } k = n, \end{cases}$$

Q ha equazione

$$W_0^2 + \ldots + W_{n-2}^2 + W_{n-1}W_n = 0.$$

L'applicazione (data nelle coordinate omogenee $[W_0, \ldots, W_n]$)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{n-1} & \dashrightarrow & Q \\ [T_0, \ldots, T_{n-1}] & \mapsto & [T_0, \ldots, T_{n-1}, -\frac{T_0^2 + \ldots + T_{n-2}^2}{T_{n-1}}] = [T_0 \cdot T_{n-1}, \ldots, T_{n-1}^2, -(T_0^2 + \ldots + T_{n-2}^2)] \end{array}$$

è birazionale (l'inversa è la proiezione sulle prime n coordinate omogenee). Tornando alle coordinate omogenee $[Z_0, \ldots, Z_n]$, otteniamo l'applicazione birazionale

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{n-1} & \dashrightarrow & Q \\ [T_0, \ldots, T_{n-1}] & \mapsto & [T_0 \cdot T_{n-1}, \ldots, T_{n-2} \cdot T_{n-1}, \frac{1}{2}(T_{n-1}^2 - T_0^2 - \ldots - T_{n-2}^2), \frac{i}{2}(T_0^2 + \ldots + T_{n-1}^2)] \end{array}$$

Esercizio 3. Sia $\mathsf{M}_{3,3}(\mathbb{C})$ lo spazio vettoriale complesso delle matrici 3×3 a entrate in $\mathbb{C}$ (quindi $\dim \mathsf{M}_{3,3}(\mathbb{C}) = 9$). Per $0 \leq r \leq 3$, sia

$$\Delta_r := \{A \in \mathsf{M}_{3,3}(\mathbb{C}) \mid \text{rango}(A) \leq r\}.$$

(a) Dimostrare che Δ_r è un chiuso di Zariski di $\mathsf{M}_{3,3}(\mathbb{C})$.

(b) Dimostrare che la chiusura di $\Delta_r \setminus \Delta_{r-1}$ è uguale a Δ_r.

(c) Dimostrare che Δ_r è irriducibile, e che

$$\dim \Delta_r = \begin{cases} 9 & \text{se } r = 3, \\ 8 & \text{se } r = 2, \\ 5 & \text{se } r = 1, \\ 0 & \text{se } r = 0. \end{cases}$$

(Può essere utile invocare il punto (b).)

(d) Dimostrare che $\operatorname{sing} \Delta_r \subset \Delta_{r-1}$. (In verità $\operatorname{sing} \Delta_r = \Delta_{r-1}$.)

(Per alcuni dei punti, può essere utile osservare che il gruppo algebrico $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ agisce su Δ_r: se $(g_1, g_2) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ e $A \in \Delta_r$, poniamo $(g_1, g_2)A := g_1 \cdot A \cdot g_2$.)

Risoluzione: (a): Δ_r è l'insieme delle matrici i cui minori $(r+1) \times (r+1)$ hanno determinante nullo. Siccome i determinanti dei minori di una matrice sono funzioni polinomiali delle sue entrate, Δ_r è un chiuso di Zariski di $\mathsf{M}_{3,3}(\mathbb{C})$.
(b) Siccome $\Delta_r \setminus \Delta_{r-1}$ è contenuto nel chiuso Δ_r, basta dimostrare che ogni punto di Δ_{r-1} è contenuto nella chiusura di $\Delta_r \setminus \Delta_{r-1}$. Per $1 \leq r \leq 3$, sia $A_{r-1} = (\lambda_i \delta_{ij})$ la matrice diagonale con

$$\lambda_i := \begin{cases} 1 & \text{se } i \leq (r-1), \\ 0 & \text{se } r \leq i \leq 3. \end{cases}$$

Quindi A_{r-1} ha rango $r-1$. Il sottoinsieme localmente chiuso $\{A_{r-1} + tA_r \mid t \in (\mathbb{C} \setminus \{-1, 0\})\}$ di $\Delta_r \setminus \Delta_{r-1}$ contiene A_{r-1} nella chiusura, e quindi A_{r-1} è nella chiusra di $\Delta_r \setminus \Delta_{r-1}$.

Siccome $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ agisce transitivamente su $\Delta_{r-1} \setminus \Delta_{r-2}$, segue che $\Delta_{r-1} \setminus \Delta_{r-2}$ è nella chiusura di $\Delta_r \setminus \Delta_{r-1}$. Iterando, otteniamo che la chiusura di $\Delta_r \setminus \Delta_{r-1}$ è Δ_r, perchè

$$\Delta_r = (\Delta_r \setminus \Delta_{r-1}) \cup (\Delta_{r-1} \setminus \Delta_{r-2}) \cup \ldots \cup \Delta_0.$$

(c) Per $r = 3$ e $r = 0$ l'esercizio è banale. Per (b) è sufficiente dimostrare che $\Delta_r \setminus \Delta_{r-1}$ è irriducibile, e che la sua dimensione è 8 se $r = 2$ e 5 se $r = 1$. Siccome $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ agisce transitivamente su $\Delta_r \setminus \Delta_{r-1}$, abbiamo un'applicazione regolare *suriettiva*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \Delta_r \setminus \Delta_{r-1} \\ (g_1, g_2) & \mapsto & g_1 \cdot A_r \cdot g_2 \end{array}$$

Segue che $\Delta_r \setminus \Delta_{r-1}$ è irriducibile, perchè $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ è irriducibile. Per quanto riguarda la dimensione, Δ_2 è una ipersuperficie, definita dallo svanimento del determinante, e quindi la sua dimensione è

$$\dim \mathsf{M}_{3,3}(\mathbb{C}) - 1 = 8.$$

Per calcolare la dimensione di Δ_1, osserviamo che abbiamo un'applicazione regolare *suriettiva*

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) & \xrightarrow{f} & \Delta_1 \setminus \Delta_0 \\ (A, B) & \mapsto & A^t \cdot B \end{array} \tag{4}$$

L'applicazione f non è iniettiva, più precisamente $f(A, B) = f(A', B')$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tale che $A' = \lambda A$ e $B' = \lambda^{-1} B$. Da questo segue che

$$\dim(\Delta_1 \setminus \Delta_0) = \dim((\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})) - 1 = \dim(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) + \dim(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) - 1 = 5. \tag{5}$$

Noi non abbiamo sviluppato la teoria necessaria per garantire che valga la prima uguaglianza in (5), quindi procediamo come segue. Sia $\Delta_1^1 \subset \Delta^1$ l'aperto delle matrici con prima riga non nulla. Si verifica subito che Sia $\Delta_1^1 \subset (\Delta_1 \setminus \Delta_0)$, e che Δ_1^1 è un aperto denso di $\Delta_1 \setminus \Delta_0$ (ricordate che $\Delta_1 \setminus \Delta_0$ è irriducibile per (c)), e quindi $\dim(\Delta_1 \setminus \Delta_0) = \dim \Delta_1^1$. Sia $\mathcal{S} \subset (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})$ il piano affine dei vettori con prima coordinata 1. Restringendo l'applicazione in (4) a $\mathcal{S} \times (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})$, otteniamo un *isomorfismo* di varietà quasi proiettive

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} \times (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) & \xrightarrow{f} & \Delta_1^1 \\ (A, B) & \mapsto & A^t \cdot B \end{array}$$

Quindi

$$\dim(\Delta_1 \setminus \Delta_0) = \dim \Delta_1^1 = \dim \mathcal{S} + \dim(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) = 5.$$

(d): Siccome $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ agisce transitivamente su $\Delta_r \setminus \Delta_{r-1}$, o Δ_r è liscio in tutti i punti di $\Delta_r \setminus \Delta_{r-1}$, o è singolare in tutti i punti di $\Delta_r \setminus \Delta_{r-1}$. La second apossibilità è esclusa perchè l'insieme dei punti lisci Δ_r^{sm} e $\Delta_r \setminus \Delta_{r-1}$ sono aperti denso di Δ_r (Δ_r^{sm} è un aperto denso per risultati generali, $\Delta_r \setminus \Delta_{r-1}$ è un aperto denso per (b)).

Esercizio 4. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, decidere se è vera o falsa, e *motivare la risposta*:

(a) Se X e Y sono varietà quasi proiettive, e $f \colon X \to Y$ è un'applicazione regolare, allora $f(X)$ è chiuso.

(b) Se $X \subset \mathbb{A}^n$ è un chiuso di dimensione pura $n - 1$ (cioè ogni componente irriducibile di X ha dimensione $n - 1$), allora X è una ipersuperficie.

(c) Sia $X \subset \mathbb{A}^3$ il cono $X := V(z_1 z_2 - z_3^2)$, e sia $R \subset X$ la retta $R := V(z_1, z_3)$. Esiste $f \in \mathbb{C}[X]$ che *genera l'ideale di R in X*, cioè tale che

$$\{\varphi \in \mathbb{C}[X] \mid f_{|R} = 0\} = (f).$$

(Suggerimento: analizzate lo spazio tangente di X e R nell'origine.)

Risoluzione: (a): *Non è vero.* Per esempio, l'inclusione $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ ha immagine non chiusa.
(b): *Vero.* Possiamo supporre che X sia irriducibile, perchè l'unione di ipersuperfici in $\mathbb{A}^n$ è una ipersuperficie in $\mathbb{A}^n$. Siccome $X \neq \mathbb{A}^n$ (perchè ha dimensione $n-1 < n$), esiste un $f \in I(X)$ non nullo. Siccome X non è vuoto, f non è una costante. L'anello dei polinomi $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ è a fattorizzazione unica, sia $f = \prod_{i=1}^r f_i^{m_i}$ la decomposizione in fattori primi. Siccome l'ideale $I(X)$ è primo (per ipotesi X è irriducibile), esiste f_i tale che $f_i \in I(X)$. Quindi l'ipersuperficie irriducibile $V(f_i)$ contiene X, e quindi $X = V(f_i)$ perchè $\dim X = n-1 = \dim V(f_i)$.
(c): *Non è vero.* Supponiamo che f esista. Siccome X è un chiuso di $\mathbb{A}^3$, esiste $\widetilde{f} \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$ tale che $f = \widetilde{f}_{|X}$. Allora lo spazio tangente a R in 0 (immerso nello spazio tangente a $\mathbb{A}^3$ in 0) è

$$\mathrm{Ann}\langle d(z_1 z_2 - z_3^2)(0), d\widetilde{f}(0)\rangle.$$

Siccome $d(z_1 z_2 - z_3^2)(0) = 0$, segue che lo spazio tangente a R in 0 ha dimensione almeno 2, e questo è assurdo.