

Università degli studi di Roma “La Sapienza”
a.a. 2003/04



Note per il corso

Derivate ed Integrali

II parte

versione 2.0 (November 11, 2003)

L. Lamberti & C. Mascia

con l'indispensabile consulenza di
C. Cassisa, E. Montefusco e V. Nesi

Corsi di laurea in Fisica, Fisica ed Astrofisica,
Tecnologie Fisiche e dell'Informazione

Indice

Capitolo 7. Analisi locale e analisi globale	1
1. Punti stazionari	1
2. Analisi al microscopio	5
3. Comportamento asintotico	7
4. A caccia di massimi e minimi assoluti	11
5. Funzioni convesse	14
Appendice A. Problemi concreti di massimo e di minimo	19
Appendice B. Le funzioni iperboliche	25
Capitolo 8. Ordini di grandezza e la formula di Taylor	29
1. Verso lo zero e ad un passo dall'infinito	29
2. Il Teorema di de l'Hôpital	37
3. La formula di Taylor: punto e basta	43
4. Espressioni del resto	47
Capitolo 9. Zoologia dell'integrazione	51
1. Integrali elementari	52
2. Metodo di sostituzione	53
3. Integrazione per parti	58
4. Integrazione di funzioni razionali	62
Appendice A. Corpi in caduta libera	70
Appendice B. Cenni alle derivate deboli	73
Capitolo 10. I numeri complessi	77
1. Nascita dei numeri complessi e loro infanzia	77
2. Successioni, serie e continuità nei complessi	81
3. L'esponenziale complesso	86
Capitolo 11. Equazioni differenziali	89
1. Equazioni lineari del I ordine a coefficiente costante	89
2. Equazioni lineari del II ordine a coefficienti costanti omogenee	92
3. Equazioni lineari del II ordine a coefficienti costanti non omogenee	98
4. Equazioni lineari a coefficienti variabili	103

CAPITOLO 7

Analisi locale e analisi globale

Con limiti e derivate è possibile analizzare con relativa precisione una classe ampia di funzioni, in modo da determinarne proprietà qualitative importanti. Una proprietà di una funzione f è *locale* se dipende dal comportamento della funzione nell'intorno di un punto x . Continuità e derivabilità in x sono proprietà locali. Una proprietà di una funzione f è *globale* se vale in tutto l'insieme di definizione della f . Ad esempio le funzioni e^x , $\arctan x$, x^3 , ... sono funzioni globalmente monotone crescenti e pertanto (globalmente) invertibili. Nella prima parte di questo capitolo approfondiamo l'uso della derivazione per determinare proprietà locali di funzioni: massimi/minimi relativi, punti di singolarità,... Torneremo più avanti sulle proprietà globali, concentrandoci sul problema di determinare massimi e minimi (assoluti) di una funzione assegnata.

1. Punti stazionari

Abbiamo già definito massimo e minimo di una funzione: data $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in D$ è PUNTO DI MASSIMO di f se $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in D$. Il valore $f(x_0) = \max_{x \in D} f(x)$ è il MASSIMO DELLA FUNZIONE f IN D . Analogo per i minimi.

OSSERVAZIONE 1.1. Il massimo ed il minimo di una funzione sono, rispettivamente il massimo ed il minimo dell'insieme immagine della funzione stessa:

$$\begin{aligned}\max_{x \in D} f(x) &= \max f(D) = \max\{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in D\}, \\ \min_{x \in D} f(x) &= \min f(D) = \min\{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in D\}.\end{aligned}$$

L'esistenza di massimo e/o minimo è una proprietà globale della funzione. E' utile introdurre un analogo locale del concetto di massimo e di minimo.

DEFINIZIONE 1.2. Massimo e minimo locale. Il punto $x_0 \in D$ è un PUNTO DI MASSIMO LOCALE (o RELATIVO) e il valore $f(x_0)$ è un MASSIMO LOCALE (o RELATIVO) di f se esiste un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ del punto x_0 tale che $f(x_0)$ è il massimo di f in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Analogamente per il MINIMO LOCALE.

Un punto x_0 che sia o di massimo o minimo locale è un PUNTO DI ESTREMO LOCALE.

Per distinguere in modo più chiaro il massimo e il minimo dagli analoghi concetti locali, si parla di MASSIMO GLOBALE (o ASSOLUTO) e di MINIMO GLOBALE (o ASSOLUTO). Dalla definizione segue immediatamente che se x_0 è punto di massimo globale, allora è anche punto di massimo locale. Il viceversa invece non è vero, come nel caso del grafico

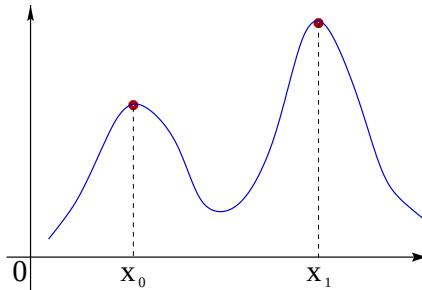


FIGURA 1. Il punto x_0 è di massimo locale, ma non globale; il punto x_1 è di massimo globale.

raccontato in Figura 1. Per un esempio analitico, si può considerare la funzione $f(x) = x^4 - x^2$. Dato che $f(0) = 0$ e $f(x) \leq 0$ per $x \in (-1, 1)$, il punto $x = 0$ è un punto di massimo locale, ma non è di massimo globale dato che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$.

DEFINIZIONE 1.3. Sia $D \subset \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è INTERNO A D se esiste un intorno di x_0 interamente contenuto in D , cioè se esiste $\delta > 0$ per cui $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$.

Se una funzione f ha un massimo o un minimo locale in corrispondenza di un punto x_0 interno all'insieme di definizione e in cui la funzione è derivabile, necessariamente

$$f'(x_0) = 0.$$

Basta infatti pensare alla necessaria posizione orizzontale della retta tangente (Fig.2(a)). Per una dimostrazione analitica, sia x_0 un punto di massimo locale interno e supponiamo f derivabile in x_0 . Dato che $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & \forall x_0 < x < x_0 + \delta, \\ \geq 0 & \forall x_0 - \delta < x < x_0, \end{cases}$$

Passando al limite per $x \rightarrow x_0$ si deduce $f'(x_0) = 0$ (si ragiona come per la dimostrazione del Teorema di Rolle).

Nel caso in cui il punto x_0 non sia interno al dominio, non è detto che la retta tangente sia orizzontale (Fig.2(b)). Conclusioni analoghe per i punti di minimo.

Pertanto, risolvere l'equazione $f'(x) = 0$ permette di determinare i possibili candidati a punti di minimo o massimo locale *interno* in cui f è *derivabile*. È comunque possibile che un estremo locale cada in un punto in cui la funzione non è derivabile; ad esempio $f(x) = |x|$ ha un minimo (globale) in $x = 0$ dove non ha retta tangente.

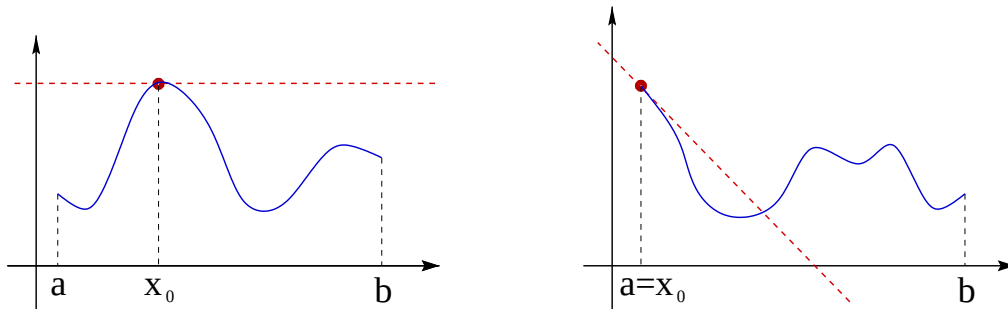


FIGURA 2. Se il punto di massimo locale è interno, la tangente è orizzontale. Se, invece, si trova sul bordo... non è detto!

DEFINIZIONE 1.4. Punto stazionario. Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Un punto x_0 , interno a D , tale che $f'(x_0) = 0$ si dice **PUNTO STAZIONARIO** (o **PUNTO CRITICO**) della funzione f .

Equivalentemente, si può affermare che i punti critici di f sono i punti x per cui la tangente al grafico di f in $(x, f(x))$ è orizzontale.

Il termine stazionario è ereditato dalla cinematica. Se x è la posizione di un punto su cui agisce una forza conservativa con potenziale dato dalla funzione $f = f(x)$, allora l'accelerazione del punto è proporzionale a f' . Se il punto viene collocato a riposo nella posizione x_0 e $f'(x_0) = 0$, allora, dato che l'accelerazione (cioè la variazione di velocità) è nulla, il punto stazionerà nella posizione x_0 per ogni tempo successivo.

ESERCIZIO 1.5. Determinare i punti critici di $f(x) = x^7 + 14x^4 + 1$.

Soluzione. La derivata di f è $f'(x) = 7x^3(x^3 + 8)$, quindi

$$f'(x) = 0 \iff x^3 = 0 \text{ o } x^3 + 8 = 0 \iff x \in \{0, -2\}.$$

La funzione f ha due punti stazionari: $x = 0$ e $x = -2$. $\square$

Classificazione dei punti stazionari. Se x_0 è un punto di massimo o di minimo locale interno e f è derivabile in x_0 , necessariamente x_0 è un punto critico, cioè $f'(x_0) = 0$. *Il viceversa non è vero:* esistono punti x_0 tali che $f'(x_0) = 0$, ma che non sono né punti di massimo locale, né punti di minimo locale. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente (quindi non ha né punti di massimo né punti di minimo in $\mathbb{R}$), ma $f'(x) = 3x^2$ si azzera nel punto $x = 0$.

Conoscendo il segno della derivata prima alla destra e alla sinistra del punto in questione, si può individuare quando un punto stazionario sia di massimo o di minimo. Supponiamo f derivabile in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $\delta > 0$, allora

$$f'(x) \begin{cases} \geq 0 & x_0 - \delta < x < x_0, \\ \leq 0 & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases} \implies x_0 \text{ punto di massimo locale.}$$

Analogamente, per il minimo, vale

$$f'(x) \begin{cases} \leq 0 & x_0 - \delta < x < x_0, \\ \geq 0 & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases} \implies x_0 \text{ punto di minimo locale.}$$

Queste affermazioni seguono dal legame tra monotonia e segno di f'

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \implies f \text{ non decrescente in } (a, b),$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \implies f \text{ non crescente in } (a, b),$$

che abbiamo già visto come conseguenze del Teorema di Lagrange.

ESERCIZIO 1.6. *Determinare i punti critici della funzione $f(x) = x^2(3x^2 - 8x + 6)$ e dire quali di essi sono punti di massimo o di minimo.*

Soluzione. La derivata prima della funzione è

$$f'(x) = 2x(3x^2 - 8x + 6) + x^2(6x - 8) = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x - 1)^2.$$

I punti critici sono $x = 0$ e $x = 1$; il punto $x = 0$ è punto di minimo, mentre il punto $x = 1$ non è né di massimo né di minimo. Il grafico qualitativo della funzione f è in Figura 3. $\square$

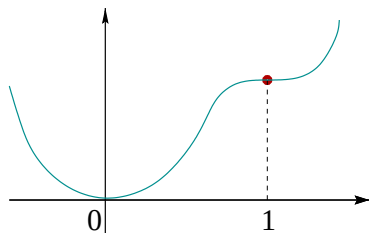


FIGURA 3. Il grafico di $f(x) = x^2(3x^2 - 8x + 6)$ dell'Esercizio 1.6.

Se x_0 è un punto critico di f , per riconoscere se f' cambia segno attraversando x_0 , basta considerare il segno di f'' , qualora esista:

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0 \implies x_0 \text{ punto di minimo locale;}$$

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0 \implies x_0 \text{ punto di massimo locale.}$$

Nota bene! Si tratta solo di condizioni sufficienti: ad esempio, la funzione $f(x) = x^4$ ha un punto di minimo in 0, ma $f''(0) = 0$.

OSSERVAZIONE 1.7. Studiare il segno della derivata prima o il valore della derivata seconda? Quale delle sue strade è preferibile? Ovviamente dipende da caso a caso. Seguendo la prima strada, basta derivare una volta sola, ma poi il compito è di risolvere una disequazione... Nel secondo caso, si paga il prezzo di dover derivare due volte, ma il passo finale è più semplice: basta determinare il segno della derivata seconda nel solo punto x_0 (a meno che tale valore non sia nullo...) In linea di principio, il secondo approccio è più algoritmico, il primo può richiedere qualche accortezza tecnica in più.

Una raffinatezza per buongustai. In genere, si immagina il grafico di una funzione vicino al punto di minimo come se valgano le ipotesi scritte in precedenza, cioè con $f'(x) \leq 0$ per $x_0 - \delta < x < x_0$ e $f'(x) \geq 0$ per $x_0 < x < x_0 + \delta$. Esistono però anche situazioni in cui una funzione alla sinistra del punto di minimo non è decrescente e alla destra non è crescente. Scetticismo? Ecco un esempio:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 - \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

La funzione f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

Il punto $x = 0$ è punto di minimo globale, e quindi di minimo locale. Necessariamente $f'(0) = 0$ (come si può ottenere anche tramite il calcolo del limite del rapporto incrementale). La derivata prima di f nei punti $x \neq 0$ è

$$f'(x) = 2x \left(2 - \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) + \cos \left(\frac{1}{x} \right),$$

quindi, per $x \approx 0$, si ha $f'(x) \approx \cos \left(\frac{1}{x} \right)$, che assume valori sia positivi che negativi.

L'esempio appena presentato è una variante della funzione $\sin(1/x)$, una pietra miliare delle funzioni di una variabile. La proprietà fondamentale (e poco intuitiva) di questa funzione è di avere un numero infinito di oscillazioni che si accumulano vicino al punto $x = 0$. Ora... correre al computer a plottare il grafico della funzione f ! (Provate ad “avvicinarvi” sempre più ad $x = 0$...)

2. Analisi al microscopio

Nello studio dell'andamento qualitativo del grafico di una funzione, è interessante approfondire quello che succede in prossimità di certi punti significativi. Qui consideriamo come punti “significativi” quelli che corrispondono ad una delle seguenti situazioni:

- (a) punti x_0 che non sono nell'insieme di definizione di f , ma che sono sul “bordo” (ad esempio, se $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, il punto $x_0 = a$, oppure se $f : [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 = c$);
- (b) punti x_0 dell'insieme di definizione in cui f non è continua;
- (c) punti x_0 in cui f è continua, ma non derivabile.

Nei casi (b) e (c) si parla talvolta di *punti di singolarità*.

Asintoti verticali. Sia nel caso (a) che nel caso (b), si calcola il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Se il limite è $+\infty$ o $-\infty$, la funzione ha in $x = x_0$ un ASINTOTO VERTICALE. Lo stesso è vero nel caso in cui sia il limite destro che il limite sinistro tendano a $+\infty$ o $-\infty$, ma con segni opposti. In generale, zeri del denominatore di una funzione razionale (che non siano anche zeri del numeratore), corrispondono a punti di asintoto verticale.

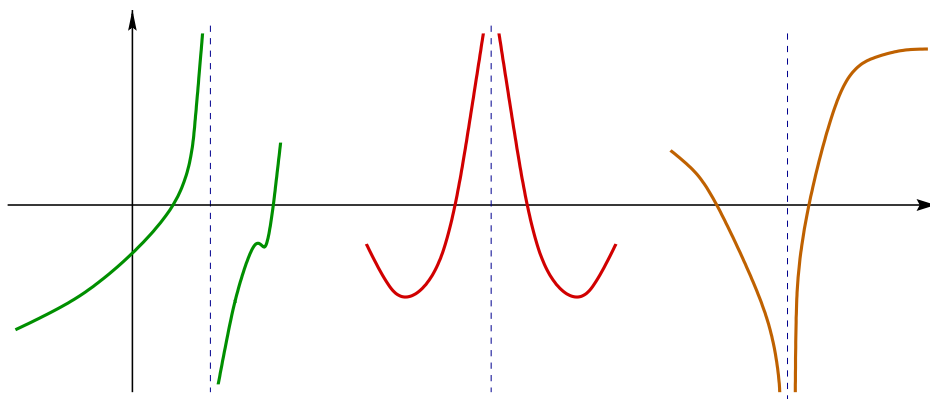


FIGURA 4. Alcuni esempi di asintoti verticali.

Le situazioni in cui il limite non esista o non esista finito o esistano i limiti destro e sinistro, ma con valori diversi, danno luogo a discontinuità evidenti.

Punti angolosi e cuspidi. Consideriamo il caso (b), quindi supponiamo x_0 tale che la funzione f sia continua in x_0 , ma non derivabile. Se esistono finiti i limiti destro e sinistro della derivata prima

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f'(x) = \ell^\pm,$$

dato che f non è derivabile in x_0 , deve essere $\ell^+ \neq \ell^-$. Un punto di questo genere si chiama PUNTO ANGOLOSO (o SPIGOLO). Per disegnarlo correttamente è possibile tracciare le rette tangenti destra e sinistra, cioè le rette di equazione

$$y = f(x_0) + \ell^\pm(x - x_0).$$

Nel caso in cui i limiti destro e sinistro siano $\pm\infty$ si possono avere due situazioni differenti. Se entrambi sono $+\infty$ (o $-\infty$), cioè se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f'(x) = +\infty \quad (-\infty),$$

il punto x_0 è un punto a tangente verticale. Se invece i limiti destro e sinistro sono $\pm\infty$, ma con segni opposti, il punto x_0 è una CUSPIDE del grafico di f . Per un esempio di cuspidi, si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$. In questo caso

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{2\sqrt{-x}} = -\infty.$$

Ovviamente sono possibili comportamenti analoghi a quelli descritti, ma misti: ad esempio, una funzione può avere derivata prima che tende ad un valore dato da destra e che diverge da sinistra, o tutte le varianti che la mente è in grado di inventare.

Un altro esempio. Consideriamo a mo' d'esempio, la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad x \neq 0.$$

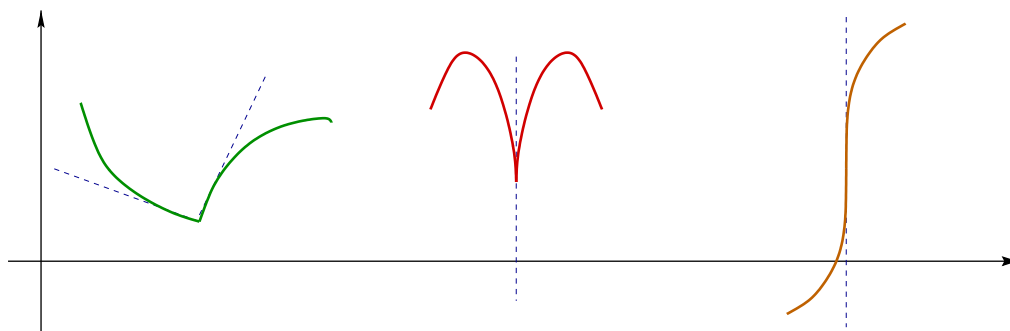
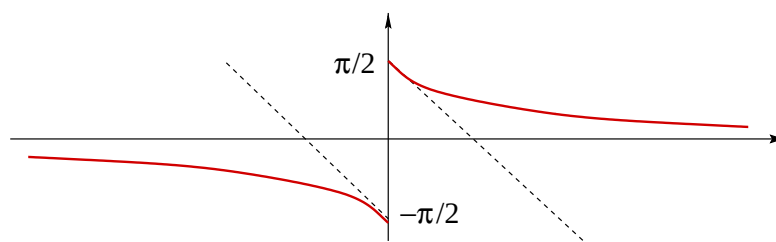


FIGURA 5. Da sinistra: un punto angoloso, una cuspid e un punto a tangente verticale.

Nel punto $x = 0$ la funzione non è definita. E' immediato verificare che

FIGURA 6. Il grafico di $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Inoltre

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \rightarrow -1 \quad \text{per } x \rightarrow 0^\pm.$$

Quindi la funzione f ha una tangente destra ed una tangente sinistra (diverse) in $x = 0$ e, vicino a 0, si comporta come la funzione g

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - x & x < 0, \\ \frac{\pi}{2} - x & x > 0. \end{cases}$$

3. Comportamento asintotico

Se la funzione f è definita in insiemi illimitati, è interessante studiarne il comportamento per $x \rightarrow \pm\infty$. Per fissare le idee, consideriamo una funzione f definita su una semiretta $[a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$. In questo caso si vuole stabilire cosa succeda per $x \rightarrow +\infty$, cioè determinare il *comportamento asintotico* per $x \rightarrow +\infty$. Considerazioni analoghe valgono per il caso di semirette del tipo $(-\infty, a]$, per $\mathbb{R}$, e, in generale, per domini illimitati.

La prima operazione sensata è il calcolo del limite per $x \rightarrow +\infty$. Se

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

si dice che la funzione f **TENDE ASINTOTICAMENTE AD ℓ** , oppure che f ha un **ASINTOTO ORIZZONTALE** (di equazione $y = \ell$) per $x \rightarrow +\infty$. Il grafico della funzione f si avvicina alla retta di equazione $y = \ell$ per x sempre più grandi. Per un disegno più preciso, si può studiare il segno della funzione $f(x) - \ell$, che indica se il grafico della funzione f sia al di sopra o al di sotto dell'asintoto.

ESEMPIO 3.1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} \quad x \in [1, +\infty).$$

In questo caso,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2,$$

quindi la funzione ha l'asintoto orizzontale di equazione $y = 2$. Dato che

$$f(x) - \ell = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - 2 = -\frac{2}{x^2 + 1} < 0,$$

quindi f tende a $y = 2$ dal basso. A voi il gusto di tracciare il grafico di questa funzione.

Invece, la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 \sin x}{x^2 + 1} \quad x \in [1, +\infty),$$

non ha limite per $x \rightarrow +\infty$ e quindi non ha asintoto orizzontale.

Se il limite della funzione f esiste, ma è $+\infty$ o $-\infty$, evidentemente non c'è asintoto orizzontale. Che cosa si può dire in questo caso? È possibile che la funzione tenda ad un **ASINTOTO OBLIQUO**, ossia è possibile che esistano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$(3.1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Questa proprietà indica che il grafico della funzione f si avvicina al grafico della retta $y = ax + b$ per $x \rightarrow +\infty$. Il problema è: *come determinare (qualora esistano) le costanti a e b ?* Supponiamo che valga (3.1), allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - ax}{x} + a = a.$$

Una volta noto a , è possibile determinare b (qualora esista) calcolando

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b.$$

Ecco, quindi, le istruzioni per determinare la presenza di un asintoto obliquo:

- (i) calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: se il limite esiste finito, c'è un asintoto orizzontale (fine dello studio a $+\infty$), se il limite non esiste, non c'è né asintoto obliquo, né asintoto orizzontale (fine dello studio a $+\infty$), se il limite è $+\infty$ o $-\infty$ si va al punto (ii);

- (ii) calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x$: se il limite esiste finito, il suo valore è a e si va al punto (iii), se il limite non esiste o se vale $\pm\infty$, non c'è asintoto obliquo (fine dello studio a $+\infty$);
- (iii) calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$: se il limite esiste finito, il suo valore è b , la funzione ha asintoto obliquo di equazione $y = ax + b$, se il limite non esiste o se vale $\pm\infty$, non c'è asintoto obliquo (fine dello studio a $+\infty$).

ESEMPIO 3.2. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x + 1} \quad x \in [0, +\infty).$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{3x + 1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{3x(x + 1)} = \frac{1}{3} =: a,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{x}{3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{3x + 1} - \frac{x}{3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 - x}{3(3x + 1)} = -\frac{1}{9} =: b.$$

Quindi la funzione ha un asintoto obliquo di equazione $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$. Anche in questo caso, per disegnare un grafico più preciso, si può studiare il segno della funzione

$$f(x) - (ax + b) = \frac{x^2 - 1}{3x + 1} - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) = -\frac{8}{9(3x + 1)} < 0 \quad \forall x > -\frac{1}{3}.$$

La differenza è negativa, quindi la funzione tende all'asintoto dal basso.

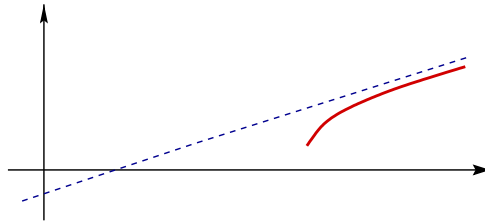


FIGURA 7. Il grafico di $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x + 1}$ per x grandi.

Dopo il punto (i), se esiste finito $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$, allora a è uguale al valore di questo limite e si può proseguire direttamente dal punto (iii). Se invece il limite di f' non esiste, bisogna necessariamente seguire il procedimento esposto sopra. Ad esempio, per $f(x) = x + \frac{\sin(x^2)}{x}$, si ha

$$f'(x) = 1 + 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2},$$

che non ammette limite per $x \rightarrow +\infty$, ma è facile vedere che la funzione ha un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ di equazione $y = x$.

ESERCIZIO 3.3. Sia $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con p polinomio di grado k e q polinomio di grado h . Dimostrare che:

- (i) f ha un asintoto orizzontale se e solo se $k \leq h$;
- (ii) f ha un asintoto obliquo, non orizzontale, se e solo se $k = h + 1$.

Altri profili asintotici. Il caso dell'asintoto obliquo è solo una situazione molto particolare: può capitare che una funzione tenda asintoticamente ad una funzione, che non sia un polinomio di primo grado. Consideriamo, ad esempio,

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 2}.$$

Grazie all'algoritmo di divisione di polinomi, possiamo riscrivere questa funzione come

$$f(x) = x^2 + 2x + 4 + \frac{9}{x - 2}.$$

Da questa espressione è immediato vedere che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x^2 + 2x + 4)] = 0,$$

e quindi il grafico di f tende asintoticamente alla parabola $y = x^2 + 2x + 4$.

Riconsideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 \sin x}{x^2 + 1} \quad x \in [1, +\infty).$$

Dato che $\frac{2x^2}{x^2+1} \rightarrow 2$ per $x \rightarrow +\infty$, è sensato immaginare che questa funzione “assomigli” alla funzione $f(x) = 2 \sin x$ per $x \rightarrow +\infty$. Calcoliamo la differenza tra $f(x)$ e $2 \sin x$ e vediamo se è infinitesima:

$$\left| \frac{2x^2 \sin x}{x^2 + 1} - 2 \sin x \right| = \frac{2 |\sin x|}{1 + x^2} \leq \frac{2}{1 + x^2} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Quindi

$$f(x) = \frac{2x^2 \sin x}{x^2 + 1} = 2 \sin x + h(x) \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0.$$

In generale se siamo in grado di riscrivere la funzione f nella forma

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

con g funzione di cui si conosce il grafico e $h \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \infty$, il grafico della funzione f tende verso quello della funzione g . Non esiste alcuna strategia generale per determinare una

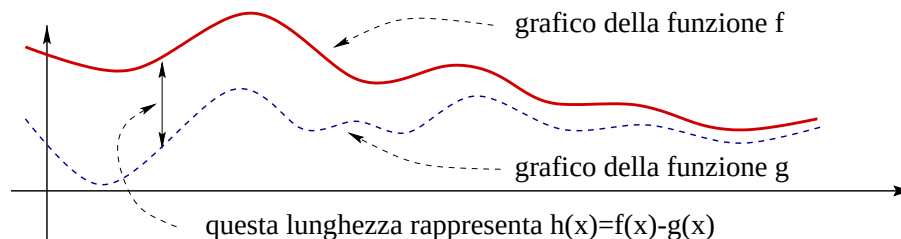


FIGURA 8. Il grafico di f con $f(x) = g(x) + h(x)$ e h infinitesima per $x \rightarrow +\infty$.

decomposizione di questo genere.

4. A caccia di massimi e minimi assoluti

PROBLEMA 1. Abbiamo già considerato il problema di determinare il cilindro di volume $V = k = \text{costante}$ con superficie totale S minima, con l'obiettivo (malcelato) di diventare ricchi grazie all'uso della matematica, applicando il risultato alla costruzione di scatole di fagioli, o, più in generale, di confezioni cilindriche con minima spesa di materiali. La speranza si era presto infranta quando ci siamo resi conto che per via elementare non riuscivamo a determinare il minimo della funzione S , cioè a risolvere il problema ($r = \text{raggio della base del cilindro}$)

$$\text{determinare il minimo di } S(r) = 2\pi \left(r^2 + \frac{k}{\pi r} \right) \quad r > 0.$$

Torniamo al problema con la conoscenza delle derivate e studiamo la monotonia di S :

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi \left(2r - \frac{k}{\pi r^2} \right) = \frac{4\pi}{r^2} \left(r^3 - \frac{k}{2\pi} \right).$$

Perciò $S'(r) \geq 0$ se e solo se $r \geq r^*$ dove $r^* = (k/2\pi)^{1/3}$. Quindi la funzione S è decrescente

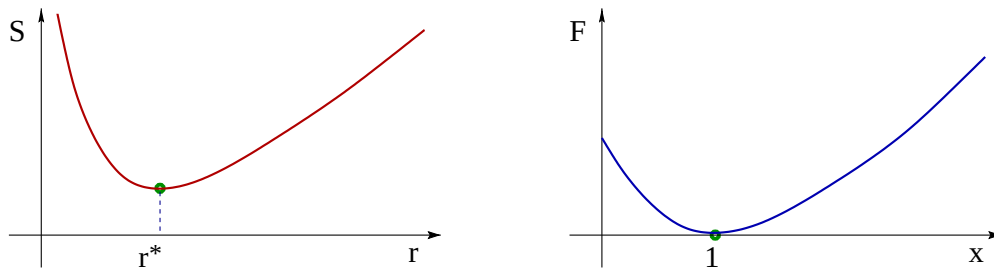


FIGURA 9. (a) Il grafico di $S(r)$; (b) il grafico di $F(x)$.

in $(0, r^*)$ ed è crescente in (r^*, ∞) . Ne segue che il punto di minimo richiesto esiste ed è proprio $r = r^*$ (Fig.9(a)). Problema risolto, corriamo in fabbrica!

PROBLEMA 2. Vogliamo dimostrare la disequazione

$$x^p - 1 \geq p(x - 1) \quad \forall p > 1, \quad \forall x \geq 0.$$

Fissiamo $p > 1$ e consideriamo la funzione

$$F(x) = x^p - 1 - p(x - 1) \quad x \geq 0.$$

Dato che $F'(x) = p(x^{p-1} - 1)$ ne segue che $F'(x) < 0$ per $x \in (0, 1)$ e $F'(x) > 0$ per $x \in (1, +\infty)$. Quindi la funzione F è decrescente in $[0, 1)$ e crescente in $(1, +\infty)$ e $x = 1$ è un punto di minimo. Ne segue che

$$F(x) \geq F(1) = 0,$$

da cui la conclusione (Fig.9(b)).

PROBLEMA 3. Siano $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ assegnati. Supponiamo di voler determinare $x \in \mathbb{R}$ tale che sia minima la quantità

$$(4.1) \quad \sum_{i=1}^n (a_i - x)^2.$$

Possiamo immaginare che i valori a_i provengano da misurazioni di un fenomeno sotto osservazione e che si stia cercando un valore medio per questi numeri, che minimizzi l'errore commesso misurato dal valore in (4.1). Consideriamo la funzione $F(x) = \sum_{i=1}^n (a_i - x)^2$ e calcoliamone la derivata:

$$F'(x) = -2 \sum_{i=1}^n (a_i - x) = -2 \left[\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n x \right] = 2n \left[x - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right].$$

La funzione F è decrescente a sinistra di $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ e crescente a destra. Il valore

$$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

è il punto di minimo (e coincide con la media aritmetica di $a_1, \dots, a_n$).

ESERCIZIO 4.1. Dati $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, determinare x che minimizzi $\sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i - x)^2$ dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ sono pesi (positivi) assegnati.

I problemi che abbiamo appena presentato mostrano alcune tra le miriadi di situazioni in cui si pone il problema: data una funzione f , come determinarne massimo e minimo globali (qualora esistano)? Proviamo ad affrontare il problema in generale.

Supponiamo di lavorare con una funzione f definita nell'intervallo $[a, b]$ e continua. Grazie al teorema di Weierstrass, l'ipotesi di continuità garantisce l'esistenza del massimo e del minimo assoluti. Abbiamo già visto che le soluzioni di $f'(x) = 0$ (cioè i punti critici di f) permettono di determinare i possibili candidati a punti di minimo o massimo locale *interno derivabile*. Chiaramente, è possibile che un estremo locale cada in un punto in cui la funzione non è derivabile. Quindi, la strategia per individuare il massimo ed il minimo di una funzione continua in $[a, b]$ è la seguente:

- ★ determinare l'insieme $\mathcal{S}$ dei punti stazionari in (a, b) ;
- ★ determinare l'eventuale insieme $\mathcal{N}$ dei punti in cui f non è derivabile;
- ★ calcolare la funzione in $\mathcal{S}$, in $\mathcal{N}$ e negli estremi dell'intervallo a e b .
- ★ individuare il più grande e il più piccolo tra i valori calcolati.

ESERCIZIO 4.2. Determinare il massimo ed il minimo assoluti di

$$f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x \quad x \in [0, 2].$$

Soluzione. La funzione f è derivabile dappertutto. Per determinare i punti singolari:

$$f'(x) = (2x - 5)e^x + (x^2 - 5x + 7)e^x = (x^2 - 3x + 2)e^x = (x - 2)(x - 1)e^x.$$

Quindi $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 1$ o $x = 2$. L'insieme dei punti critici *interni* è $\mathcal{S} = \{1\}$. Dato che $f(0) = 7 < f(2) = e^2 < f(1) = 3e$, si ha

$$\min_{x \in [0, 2]} f(x) = f(0) = 7, \quad \max_{x \in [0, 2]} f(x) = f(1) = 3e,$$

che è quanto richiesto dall'esercizio. $\square$

Spesso è utile conoscere il massimo del modulo di una funzione assegnata f , cioè risolvere il problema

$$\text{data } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua, calcolare } \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

In questo caso, si può procedere come detto sopra, o, alternativamente, determinare il massimo ed il minimo della funzione f in $[a, b]$ e poi sfruttare la relazione (evidente?)

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x)| = \max \left\{ \left| \max_{x \in [a, b]} f(x) \right|, \left| \min_{x \in [a, b]} f(x) \right| \right\}.$$

ESERCIZIO 4.3. Calcolare $\max\{|x^2 - 1| : x \in [-1, 2]\}$.

Soluzione. Il minimo ed il massimo di $x^2 - 1$ in $[-1, 2]$ sono -1 (in $x = 0$) e 3 (in $x = 2$). Quindi

$$\max_{x \in [-1, 2]} |x^2 - 1| = \max\{|-1|, |3|\} = 3.$$

Un buon esercizio è determinare il massimo di $|x^2 - 1|$ in $[-1, 2]$ usando la strategia (punti critici/punti non derivabili/estremi) direttamente sulla funzione con il modulo. $\square$

Nel caso in cui si studi una funzione f continua, ma definita su un dominio illimitato (ad esempio, $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$), le ipotesi del Teorema di Weierstrass non sono soddisfatte e quindi non è detto che esistano il massimo ed il minimo della funzione. Comunque ha senso domandarsi: *quanto valgono l'estremo superiore e l'estremo inferiore? Nel caso in cui siano finiti, si tratta di massimo o di minimo?* La strategia per risolvere questo problema è simile a quanto appena visto. Il punto che bisogna modificare è quello relativo al calcolo della funzione negli estremi dell'intervallo. In questo caso almeno uno degli estremi dell'intervallo sarà $+\infty$ o $-\infty$ e le espressioni $f(+\infty)$ e $f(-\infty)$, in generale, non hanno senso, ma vanno sostituite con $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. Vediamo la procedura negli esercizi che seguono.

ESERCIZIO 4.4. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione $f(x) = e^{x^2}$ in $\mathbb{R}$ e dire se si tratta di massimo e minimo.

Soluzione. L'estremo superiore è presto detto: dato che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, è chiaro che $\sup f = +\infty$. Che possiamo dire sull'estremo inferiore? Visto che la funzione f è continua su $\mathbb{R}$, esistono massimo e minimo di f in $[-M, M]$ per ogni scelta di $M > 0$. Quindi

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min \left\{ \min_{|x| \leq M} f(x), \inf_{|x| > M} f(x) \right\}.$$

Inoltre, dato che $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$, per M grande, $\min_{|x| \leq M} f(x) \leq \inf_{|x| > M} f(x)$. Non resta che cercare i punti di minimo relativo in $[-M, M]$. Derivando, $f'(x) = 2xe^{x^2}$ che si azzera se e solo se $x = 0$, quindi l'unico punto di minimo relativo è $x = 0$ che, per quanto detto, è anche minimo assoluto: $\min_{x \in \mathbb{R}} e^{x^2} = e^0 = 1$. $\square$

ESERCIZIO 4.5. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Dimostrare che la funzione f ammette minimo assoluto su $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 4.6. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione $f(x) = e^{-x^2}$ in $\mathbb{R}$ e dire se si tratta di massimo e minimo.

Soluzione. La funzione è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e la derivata vale $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. Quindi c'è un unico punto critico $x = 0$ in cui la funzione vale $f(0) = 1$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0.$$

Confrontando i valori deduciamo che

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} e^{-x^2} = 0 \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{-x^2} = f(0) = 1.$$

Dato che l'estremo superiore fa parte dell'insieme immagine, l'estremo superiore è massimo. Invece l'estremo inferiore non è minimo, perchè la funzione f è strettamente positiva. $\square$

Analogamente nel caso di funzioni continue definite in insiemi non chiusi, cioè $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ oppure $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, o varianti, non si applica il Teorema di Weierstrass. Anche in questi casi, per determinare l'estremo superiore/inferiore bisogna considerare i limiti agli estremi.

5. Funzioni convesse

Fino a questo punto, abbiamo individuato quali proprietà siano fornite dalla derivata prima. Che indicazioni dà la derivata seconda? Per rispondere a questo angosciante interrogativo, introduciamo la nozione di *convessità*.

Un sottoinsieme E del piano è CONVESSO se scelta una qualsiasi coppia di punti P e Q appartenenti ad E , il segmento che li congiunge è interamente contenuto in E (Fig.10(a)).

Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è CONVESSA IN $[a, b]$ se l'insieme $E := \{(x, y) : y \geq f(x)\}$, composto dai punti che si trovano sopra il suo grafico (detto EPIGRAFICO) è un insieme convesso. Posta in questi termini, la definizione di convessità di una funzione non è particolarmente comoda. Partiamo perciò da una definizione diversa (a voi far vedere che si tratta di due definizioni equivalenti).

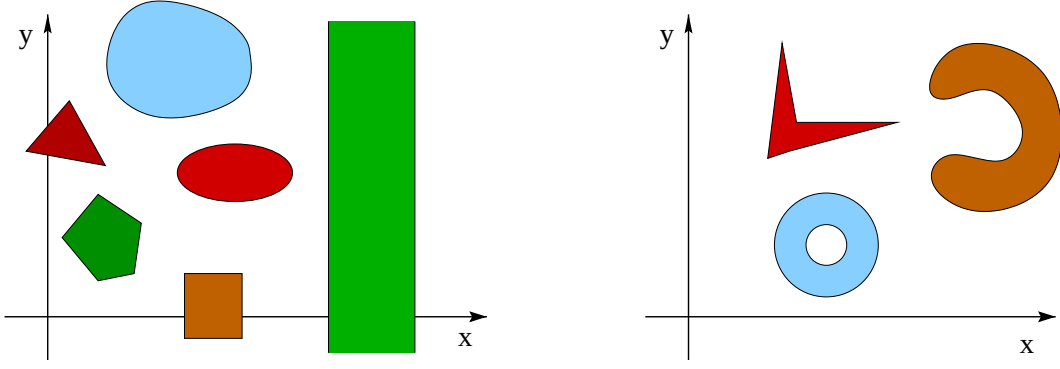


FIGURA 10. (a) Insiemi convessi, (b) insiemi non convessi.

DEFINIZIONE 5.1. Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è CONVESSA IN $[a, b]$ se

$$(5.1) \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad \forall x, y \in [a, b] \quad \forall t \in (0, 1).$$

Una funzione per cui valga la disuguaglianza opposta si dice CONCAVA.

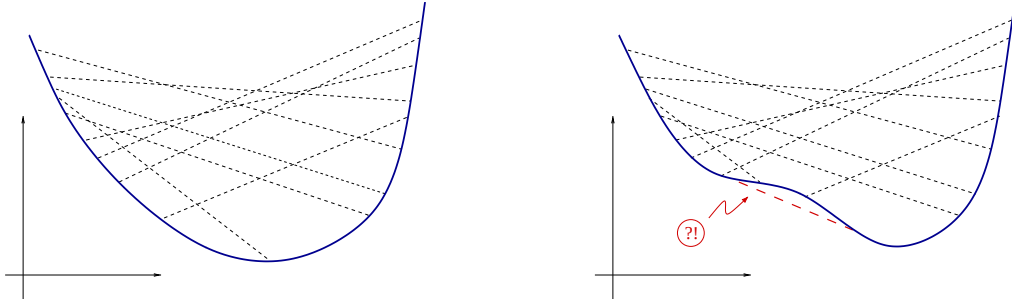


FIGURA 11. Una funzione convessa ed una non convessa.

Dalla definizione segue che se f è concava, allora $-f$ è convessa, e viceversa. Quindi studiare la convessità è sufficiente per comprendere anche la concavità.

Cerchiamo di capire il significato geometrico della condizione (5.1). Fissiamo $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$ con $\bar{x} < \bar{y}$. Per $t \in (0, 1)$, definiamo $z(t) := t\bar{x} + (1-t)\bar{y} \in (\bar{x}, \bar{y})$. Scriviamo la retta che passa per $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ e $(\bar{y}, f(\bar{y}))$:

$$\Phi(x) = f(\bar{x}) + \frac{f(\bar{y}) - f(\bar{x})}{\bar{y} - \bar{x}}(x - \bar{x}),$$

e calcoliamo questa funzione in $z(t)$. Dato che

$$\begin{aligned} \Phi(z(t)) &= f(\bar{x}) + \frac{f(\bar{y}) - f(\bar{x})}{\bar{y} - \bar{x}}(t\bar{x} + (1-t)\bar{y} - \bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) + \frac{f(\bar{y}) - f(\bar{x})}{\bar{y} - \bar{x}}(1-t)(\bar{y} - \bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) + (f(\bar{y}) - f(\bar{x}))(1-t) = tf(\bar{x}) + (1-t)f(\bar{y}), \end{aligned}$$

la condizione (5.1), si può riscrivere come

$$f(z(t)) \leq \Phi(z(t)) \quad \forall x, y \in [a, b] \quad \forall t \in (0, 1).$$

Questa scrittura ha un'interpretazione in termini di grafico immediata: *una funzione f è convessa, se per ogni scelta di x e y , il grafico di f giace al di sotto della retta secante che congiunge i punti $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ nell'intervallo di estremi x e y .*

ESERCIZIO 5.2. *Se f e g sono due funzioni convesse in $[a, b]$, allora una tra $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ è convessa. Sapete dire quale?*

PROPOSIZIONE 5.3. *Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa in $[a, b]$ se e solo se*

$$(5.2) \quad \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

per ogni x, y, z tali che $a \leq x < z < y \leq b$.

La dimostrazione di questa proprietà si ottiene semplicemente riscrivendo in termini di rapporti incrementali la formula (5.1). I dettagli sono lasciati alla buona volontà del lettore.

La proprietà (5.2) può essere interpretata graficamente in termini di monotonía delle pendenze delle secanti: fissato y , la funzione

$$\phi(x) := \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

è crescente in x . Quando la funzione è derivabile, questa proprietà diviene una richiesta di monotonía della derivata prima f' . Nel caso in cui la funzione f sia derivabile due volte, la monotonía della f' può essere tradotta in termini di segno della derivata seconda f'' .

TEOREMA 5.4. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Allora*

(i) se f è derivabile una volta, la funzione f è convessa in $[a, b]$ se e solo se f' è non decrescente in $[a, b]$;

(ii) se f è derivabile due volte, la funzione f è convessa in $[a, b]$ se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

Per le funzioni concave, vale un risultato analogo sostituendo a “ f' crescente” la frase “ f' non crescente” e a “ $f'' \geq 0$ ” la frase “ $f'' \leq 0$ ”.

Dal Teorema 5.4(i) discende un'altra interpretazione geometrica della convessità: *se la funzione f è derivabile e convessa, il suo grafico è interamente al di sopra di ogni retta tangente ad esso.* Infatti, scriviamo la differenza tra f e la retta tangente in $(x_0, f(x_0))$

$$R(x; x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

con l'obiettivo di dimostrare che se f è convessa, la funzione $R(x; x_0)$ è positiva. Appliciamo il Teorema di Lagrange e riscriviamo $R(x; x_0)$ come

$$R(x; x_0) = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Se $x > x_0$ allora $\xi > x_0$ e quindi, essendo f' crescente, $f'(\xi) > f'(x_0)$. Ne segue che il termine a destra è positivo perché prodotto di termini positivi. Se $x < x_0$ allora $\xi < x_0$ e, sempre per la monotonía di f' , $f'(\xi) < f'(x_0)$. Questa volta i due termini sono entrambi negativi, ma comunque il loro prodotto è positivo.

Dimostrazione del Teorema 5.4. (i) Supponiamo che f sia convessa, allora vale la (5.2). Quindi, passando al limite per $z \rightarrow x^+$ si ottiene

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Analogamente, passando al limite nella (5.2) per $z \rightarrow y^-$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y).$$

Ne segue che $f'(x) \leq f'(y)$ per ogni $x \leq y$.

Viceversa, supponiamo che la funzione f' sia crescente e dimostriamo la (5.1) studiando la funzione differenza

$$F(t) := tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y), \quad t \in [0, 1],$$

con x, y fissati. Consideriamo il caso $y < x$ (l'altro è analogo). Calcolando la derivata di F e applicando il Teorema di Lagrange, si deduce che esiste $\xi \in (y, x)$ tale che

$$F'(t) = f(x) - f(y) - f'(tx + (1-t)y)(x - y) = [f'(\xi) - f'(tx + (1-t)y)](x - y).$$

Dato che, per $t \in [0, 1]$, il punto $tx + (1-t)y$ descrive l'intervallo $[y, x]$, esiste t^* tale che $t^*x + (1-t^*)y = \xi$. Inoltre, dato che f' è debolmente crescente, $f'(tx + (1-t)y) \leq f'(\xi)$ per $t \in [0, t^*]$ e $f'(tx + (1-t)y) \geq f'(\xi)$ per $t \in [t^*, 1]$. Perciò:

$$F'(t) \geq 0 \quad \text{per } t \in [0, t^*] \quad \text{e} \quad F'(t) \leq 0 \quad \text{per } t \in [t^*, 1].$$

Perciò il minimo globale della funzione F è assunto in uno degli estremi $t = 0$ o $t = 1$ e, dato che $F(0) = F(1) = 0$, $F(t) \geq 0$ per ogni $t \in [0, 1]$, cioè la formula (5.1). ■

ESERCIZIO 5.5. Sia f una funzione convessa e derivabile in $[a, b]$. Se esistono $x_0, x_1 \in [a, b]$ con $x_0 \neq x_1$ tali che $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$, che cosa si può dedurre sulla funzione f ?

Riassumendo, per la convessità abbiamo quattro interpretazioni:

- convessità dell'epigrafico;
- relazione tra il grafico di f e il grafico delle secanti;
- monotonía delle pendenze delle secanti;
- relazione tra il grafico di f e quello delle sue tangenti.

In corrispondenza abbiamo varie maniere per studiare la convessità di una funzione. Le più semplici da utilizzare in concreto sono quelle contenute nel Teorema 5.4. In particolare, la caratterizzazione delle funzioni convesse derivabili due volte è estremamente comoda perché riduce il problema alla risoluzione di una disequazione: $f''(x) \geq 0$.

DEFINIZIONE 5.6. Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte. Se x_0 è tale che f'' cambia segno in x_0 (cioè è negativa da una parte e positiva dall'altra), allora x_0 si chiama **PUNTO DI FLESSO** della funzione f .

Grazie al Teorema 5.4, se f'' ha segno opposto alla destra e alla sinistra di x_0 , necessariamente x_0 è un punto di flesso.

ESEMPIO 5.7. Consideriamo la funzione $f(x) = \sin x$. La sua derivata seconda è $f''(x) = -\sin x$, quindi tutti punti della forma $x = k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di flesso.

Per la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, si ha

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \quad \implies \quad f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3},$$

e quindi i punti di flesso di f sono $x = \pm 1/\sqrt{3}$. La funzione f è convessa in $(-\infty, -1/\sqrt{3})$ e in $(1/\sqrt{3}, +\infty)$ e concava in $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

La convessità è utile per determinare l'esistenza di minimi di una funzione. Infatti, vale la seguente implicazione

$$f \text{ convessa, } f'(x_0) = 0 \quad \implies \quad x_0 \text{ punto di minimo globale.}$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio. Analogamente, per le funzioni concave ed i punti di massimo. Chiaramente se la convessità è solo locale (cioè in un intorno del punto x_0), x_0 è punto di minimo locale.

ESERCIZIO 5.8. Dimostrare la seguente implicazione

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ convessa} \quad \implies \quad f \text{ continua in } (a, b).$$

Soluzione. Fissato $x \in (a, b)$, per $y \in (x, b)$ valgono

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad \text{e} \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x},$$

da cui segue

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a}(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}(y - x).$$

La seconda delle due disequazioni è estremamente utile: quando $y \rightarrow x$, il termine a destra tende ad 0. Ora occorre una stima dal basso. Il problema della prima disequazione è che la dipendenza da y è sia nel termine $y - x$ (che ci fa comodo) che nel rapporto incrementale $\frac{f(y)-f(a)}{y-a}$. Il problema è: siamo in grado di controllare il valore del rapporto incrementale $\frac{f(y)-f(a)}{y-a}$ per $y \approx x$? Dato che il rapporto incrementale $\frac{f(y)-f(a)}{y-a}$ è crescente in y , riesce $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$, quindi, per $y > x$,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}(y - x).$$

Per $y \rightarrow x^+$, ne segue che $\lim_{y \rightarrow x^+} f(y) - f(x) = 0$. In maniera analoga si deduce $\lim_{y \rightarrow x^-} f(y) = f(x)$.

E' vero o è falso che una funzione convessa in $[a, b]$ è continua in tutto l'intervallo $[a, b]$? $\square$

Appendice A. Problemi concreti di massimo e di minimo

LA PULEGGIA DI DE L'HÔPITAL. Il problema che segue è un problema di statica: considerata una certa struttura che ha *a priori* un certo numero di parametri liberi, qual'è la configurazione d'equilibrio in cui essa, per sua autonoma volontà, si dispone? L'esempio concreto spiegherà meglio questa frase sibillina. Consideriamo i soliti assi cartesiani (x, y) e supponiamo che l'asse y sia posto in verticale rispetto al suolo di modo che la forza di gravità sia direzionata nel verso delle y negative. Indichiamo con $O = (0, 0)$ e con $A = (a, 0)$ dove $a > 0$ è una lunghezza fissata. Nel punto O , fissiamo una corda di lunghezza b e all'estremità B di questa corda fissiamo una puleggia. Lasciamo pendere per fatti suoi la puleggia e fissiamo una seconda corda di lunghezza ℓ al punto A . Dopo aver fatto passare la seconda corda attraverso la puleggia (quindi facendola passare per il punto B) fissiamo un peso M all'altra estremità. La configurazione finale è disegnata in Figura 12. Il problema è: in quale punto (x, y) si posizionerà il peso M ?

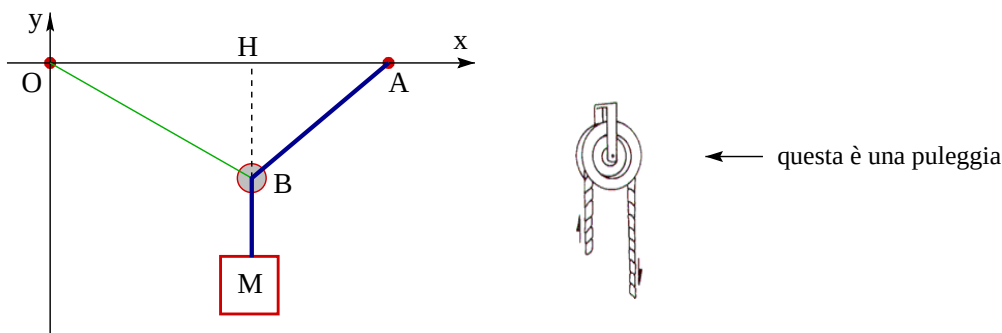


FIGURA 12. La puleggia di De L'Hôpital.

Qui stiamo supponendo che l'unica forza esterna che agisce sul sistema è la forza di gravità. Se, inoltre, supponiamo che il peso delle corde e della puleggia sia trascurabile rispetto al peso di M , e che non sia presente nessun tipo di attrito, il peso M si collocherà nella posizione più bassa possibile, cioè minimizzerà il valore y . Quest'affermazione discende dal principio seguente: *la posizione d'equilibrio (stabile) del sistema minimizza l'energia potenziale di M* . Dato che l'energia potenziale di M è della forma $Ay + B$ con $A > 0$, minimizzare l'energia potenziale equivale a minimizzare l'altezza y .

Riscriviamo per chiarezza i dati del problema:

$$\overline{OA} = a, \quad \overline{OB} = b, \quad \overline{AB} + \overline{BM} = \ell.$$

L'incognita è la posizione di $M = (x, y)$. Supponiamo inoltre $0 < b < a < \ell$. La soluzione del problema può essere divisa in due passi:

passo 1. assegnata la coordinata x di M , determinare la coordinata $y = f(x)$;

passo 2. calcolare (se esiste) il minimo della funzione f .

Da brave persone ordinate, partiamo dal primo passo. Indichiamo con H la proiezione ortogonale di M sull'asse x , cioè $H = (x, 0)$. Allora

$$y = -(\overline{HB} + \overline{BM}) = -(\overline{HB} + \ell - \overline{AB}) = \overline{AB} - \overline{HB} - \ell.$$

Si tratta ora di scrivere le lunghezze $\overline{AB}$ e $\overline{HB}$ in funzione di x . Basta usare il Teorema di Pitagora per ottenere:

$$\overline{HB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{b^2 - x^2}, \quad \overline{AB} = \sqrt{\overline{HB}^2 + \overline{HA}^2} = \sqrt{b^2 - x^2 + (a - x)^2}$$

Quindi la funzione da studiare è

$$y = f(x) = \sqrt{b^2 - x^2 + (a - x)^2} - \sqrt{b^2 - x^2} - \ell \quad x \in [0, b].$$

L'intervallo di variazione di x si deduce direttamente dal problema considerato.

Secondo passo: qual'è la scelta di x che minimizza y ? Dato che la funzione è continua in $[0, b]$ e l'intervallo è chiuso e limitato, il Teorema di Weierstrass ci assicura che il problema ha soluzione, ma non ci dà nessuna informazione su quale sia il punto di minimo. Perciò seguiamo la strategia proposta nella Sezione 4.

Prima di tutto, notiamo che la funzione f non è derivabile nei punti in cui si azzerava l'argomento di una delle due radici. Dato che $b < a$, il termine $b^2 - x^2 + (a - x)^2$ è sempre non nullo. La seconda radice $\sqrt{b^2 - x^2}$ si azzerava per $x = \pm b$. Di questi due punti, $-b$ va scartato perché è fuori da $[0, b]$ e b è uno degli estremi dell'intervallo.

Determiniamo l'insieme $\mathcal{S}$ dei punti stazionari di f in $(0, b)$. Dato che

$$f'(x) = -\frac{a}{\sqrt{b^2 - x^2 + (a - x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

i punti stazionari $x \in (0, b)$ verificano

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 - x^2 + (a - x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}},$$

e, passando ai quadrati,

$$\frac{a^2}{b^2 + a^2 - 2ax} = \frac{x^2}{b^2 - x^2}.$$

Ora ci vogliono un po' di conti: l'equazione precedente è equivalente a

$$2ax^3 - 2a^2x^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2ax^2(x - a) - b^2(x + a)(x - a) = 0.$$

Dividendo per $x - a \neq 0$,

$$2ax^2 - b^2x - ab^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = x_{\pm} := \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 + 8a^2b^2}}{4a}$$

Dato che $x_- < 0 < x_+ < b$ (verificare!), c'è un unico punto critico in $(0, b)$: $\mathcal{S} = \{x_+\}$.

Ricapitolando, la nostra strategia propone tre punti di minimo assoluto possibili: $0, x_+, b$. Per determinare chi di questi sia il punto di minimo bisognerebbe confrontare i tre valori $f(0)$, $f(x_+)$ e $f(b)$. Fattibile, ma non particolarmente semplice. Seguiamo una strada diversa. Dato che

$$f'(0) = -\frac{a}{a - b} < 0$$

il punto 0 non può essere di minimo relativo e dunque nemmeno di minimo assoluto! La lotta rimane tra x_+ e b . In b non possiamo ragionare come in 0 dato che la funzione f non è derivabile in b , quindi $f'(b)$ non ha senso. Ma non perdiamoci d'animo: dato che

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} -\frac{a}{\sqrt{b^2 - x^2 + (a - x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}} = +\infty$$

la funzione f è crescente in un intorno (sinistro) di b , quindi nemmeno b può essere il punto di minimo richiesto. Perfetto: resta un unico sopravvissuto x_+ che è il punto di

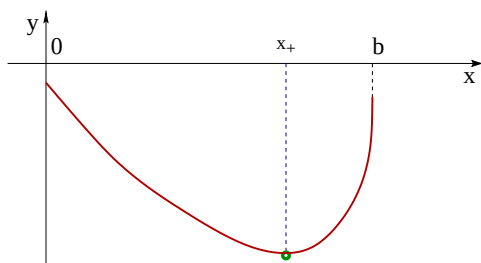


FIGURA 13. Il grafico della funzione f .

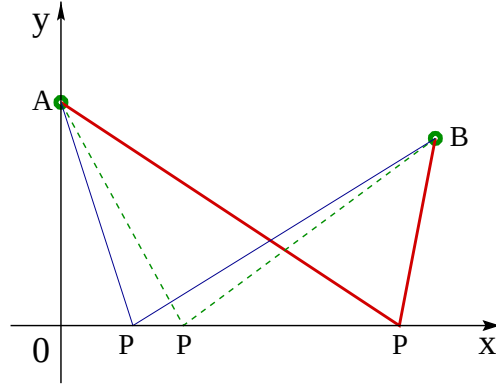
minimo cercato. Il peso M si collocherà nella posizione di coordinate $(x_+, f(x_+))$. In alternativa, per stabilire che x_+ è il punto di minimo assoluto, si sarebbe potuto anche notare che $f'' \geq 0$, quindi la funzione f è convessa e, necessariamente, il suo punto critico x_+ è di minimo assoluto.

IL PRINCIPIO DI FERMAT. Passiamo ora a considerare due problemi di *ottica geometrica* che si traducono nella ricerca del punto di minimo assoluto di certe funzioni. In quel che segue, considereremo un raggio di luce in maniera naïf: come un qualcosa che viaggia da un punto ad un altro, si riflette sugli oggetti, entra nell'occhio...

Il problema fondamentale è stabilire quale sia il tragitto percorso dal raggio per passare da un punto A ad un punto B . Il principio, proposto da Fermat, è il seguente: *il tragitto prescelto è quello che minimizza il tempo di percorrenza*. Se il raggio viaggia sempre nello stesso mezzo, la sua velocità v è costante, quindi minimizzare il tempo di percorrenza T equivale a minimizzare la lunghezza del percorso. Perciò il raggio percorre linee rette. Che succede in situazioni un po' più complicate?

Riflessione. Consideriamo un raggio di luce che parta dal punto $A = (0, a)$ e che si diriga verso l'asse delle x dove immaginiamo collocato uno specchio. Il raggio viene riflesso nel punto $P = (x, 0)$ e da lì arriva nel punto $B = (b, c)$. I tragitti da A a P e da P a B sono percorsi lungo segmenti. Supponendo assegnati $a, b, c > 0$ e quindi assegnati i punti A e B , qual'è il punto P prescelto dal raggio luminoso?

Ad ogni scelta di $P = (x, 0)$, corrisponde un certo tempo di percorrenza $T = T(x)$. Il principio di Fermat afferma che il punto di riflessione $(x_0, 0)$ è tale che $T(x_0) = \min T(x)$. Bene, non resta che determinare l'espressione esplicita di $T = T(x)$ e trovare in quale punto sia assunto il minimo. Indicando con T_{AP} e T_{PB} , il tempo impiegato dal raggio per

FIGURA 14. Quale sarà il punto P prescelto da un raggio riflesso in uno specchio?

andare da A a P e da P a B rispettivamente, e con v la velocità della luce nel mezzo in considerazione,

$$T(x) = T_{AP}(x) + T_{PB}(x) = \frac{\overline{AP}}{v} + \frac{\overline{PB}}{v}.$$

Quindi, grazie al teorema di Pitagora,

$$T(x) = \frac{1}{v} \left(\sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(b-x)^2 + c^2} \right) \quad x \in [0, b].$$

Dato che la funzione T è derivabile infinite volte, applicando la strategia per il calcolo di massimi e minimi assoluti, il punto di minimo x_0 sarà o 0 , o b , o tale che $T'(x_0) = 0$. Cerchiamo quindi i punti critici di T :

$$T'(x) = \frac{1}{v} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}} \right),$$

la derivata T' si azzera se e solo se

$$x^2[(b-x)^2 + c^2] = (b-x)^2(x^2 + a^2) \quad \Longleftrightarrow \quad c^2x^2 = a^2(b-x)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad cx = a(b-x),$$

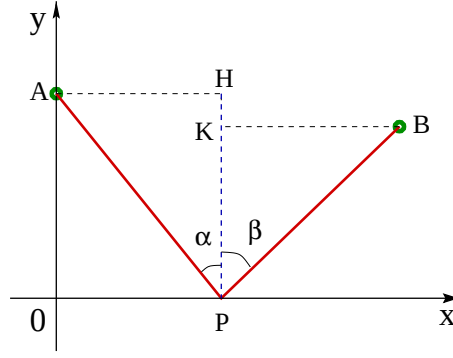
cioè

$$T'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = x_* := \frac{ab}{a+c}.$$

Invece di confrontare i valori di T per $x = 0, x_*, b$, si può notare che

$$T'(0) = -\frac{b}{v\sqrt{b^2 + c^2}} < 0 \quad \text{e} \quad T'(b) = \frac{b}{v\sqrt{b^2 + a^2}} > 0,$$

quindi nessuno dei due estremi dell'intervallo è di minimo. Pertanto il punto x_* è il punto di minimo assoluto. Il punto di riflessione P è individuato da una condizione geometrica semplice. Sia α l'angolo, detto di *incidenza*, determinato dal segmento AP e dalla semiretta da P , perpendicolare all'asse x , contenuta nel semipiano $y > 0$, e sia β l'angolo, detto di *riflessione*, determinato dal segmento PB e dalla stessa semiretta


 FIGURA 15. Gli angoli di incidenza α e di riflessione β coincidono.

di prima. Allora, indicando con H il punto di coordinate (x_*, a) e con K il punto di coordinate (x_*, c) ,

$$\tan \alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{PH}} = \frac{x_*}{a} = \frac{b}{a+c} \quad \tan \beta = \frac{\overline{BK}}{\overline{PK}} = \frac{b-x_*}{c} = \frac{ab+bc-ab}{a+c} \frac{1}{c} = \frac{b}{a+c}$$

Quindi $\tan \alpha = \tan \beta$ e, dato che $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$, ne segue che $\alpha = \beta$. In definitiva, il principio di Fermat implica che *l'angolo di riflessione coincide con l'angolo di incidenza*.

Rifrazione. Cambiamo tipo di esperimento. Consideriamo un raggio luminoso che viaggi in due mezzi differenti in cui la sua velocità è v_+ e v_- . Per semplicità, supponiamo che il mezzo in cui la velocità è v_+ corrisponda alla regione di piano con $y > 0$ e quello in cui la velocità è v_- corrisponda a $y < 0$. Se un raggio parte da $A = (0, a)$ con $a > 0$ ed arriva a $B = (b, c)$ con $c < 0 < b$, che tragitto sceglie?

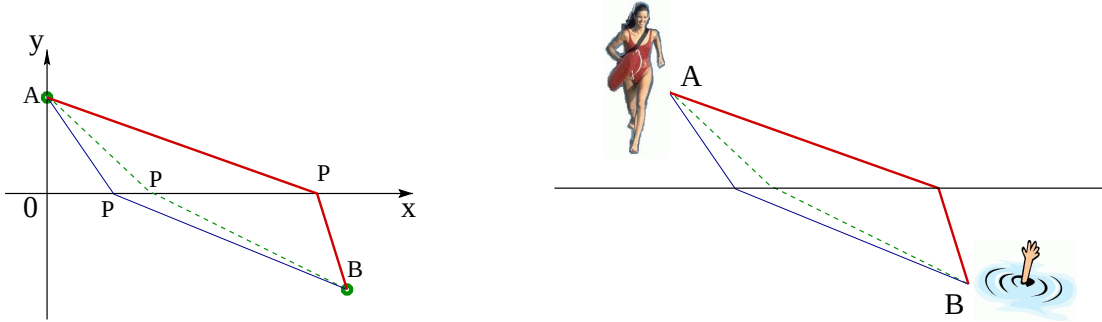


FIGURA 16. Quale percorso scegliere?

La versione di Baywatch. Cambiamo i protagonisti della vicenda: supponiamo che nel semipiano $y > 0$ ci sia la terra ferma e il mare nel semipiano $y < 0$. Nel punto A c'è la prestante bagnina di Baywatch pronta ad intervenire in caso di necessità. Improvvisamente, si vede emergere dall'acqua, nel punto B , una mano che si agita: una persona sta affogando! Sapendo che la nostra eroina quando corre sulla spiaggia va a velocità v_+ e quando nuota in mare va a velocità v_- , qual'è il percorso che le permette di soccorrere il malcapito nel minor tempo possibile?

Esattamente come prima, utilizziamo il principio di Fermat. Indicando con T_{AP} e T_{PB} , il tempo impiegato dal raggio per andare da A a P e da P a B rispettivamente, il tempo impiegato per andare da A a B è

$$T(x) = T_{AP}(x) + T_{PB}(x) = \frac{\overline{AP}}{v_+} + \frac{\overline{PB}}{v_-}.$$

e, di nuovo per il teorema di Pitagora,

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_+} + \frac{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}}{v_-} \quad x \in [0, b].$$

Anche questa funzione è derivabile infinite volte in $[0, b]$. Inoltre la sua derivata prima è

$$T'(x) = \frac{x}{v_+ \sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{b-x}{v_- \sqrt{(b-x)^2 + c^2}}.$$

Quindi $T'(0) < 0 < T'(b)$ e anche in questo caso gli estremi non sono punti di minimo. Perciò il minimo è in $(0, b)$. Inoltre, con un po' di pazienza, si ottiene

$$T''(x) = \frac{a^2}{v_+ (x^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{c^2}{v_- [(b-x)^2 + c^2]^{3/2}} > 0$$

Dato che la derivata seconda è (strettamente) positiva, la derivata prima T' è strettamente crescente, quindi esiste un unico x_* tale che $T'(x_*) = 0$ (si ricordi che $T'(0) < 0 < T'(b)$). Necessariamente x_* è il punto di minimo che andiamo cercando. Tertium non datur. Come individuarlo? Per ora sappiamo solo che x_* è individuato in maniera univoca dalla relazione $T'(x_*) = 0$, cioè x_* è l'unico valore per cui

$$(5.3) \quad \frac{1}{v_+} \frac{x_*}{\sqrt{x_*^2 + a^2}} = \frac{1}{v_-} \frac{b-x_*}{\sqrt{(b-x_*)^2 + c^2}}.$$

Come nel caso della riflessione, ragioniamo in termini di angoli. Sia α , *angolo di incidenza*,

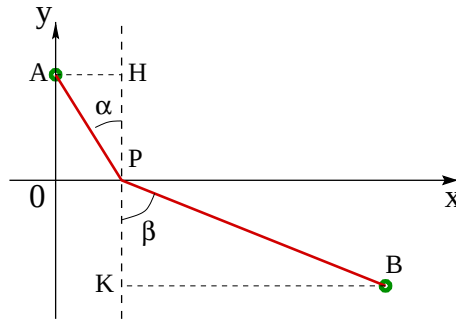


FIGURA 17. Gli angoli di incidenza e di rifrazione.

l'angolo formato dal segmento AP con la semiretta verticale per P contenuta in $y > 0$, e sia β , *angolo di rifrazione*, l'angolo formato dal segmento PB con la semiretta verticale

per P contenuta in $y < 0$. Se H è la proiezione di A sulla retta $x = x_*$ e K quella di B sulla stessa retta, i triangoli APH e BPK sono rettangoli e quindi

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{AP}} = \frac{x_*}{\sqrt{x_*^2 + a^2}} \quad \sin \beta = \frac{\overline{BK}}{\overline{BP}} = \frac{b - x_*}{\sqrt{(b - x_*)^2 + c^2}}.$$

Sostituendo nella formula (5.3), si deduce che il punto di rifrazione P è scelto in modo che valga la *legge di rifrazione di Snell*

$$\frac{\sin \alpha}{v_+} = \frac{\sin \beta}{v_-}.$$

Appendice B. Le funzioni iperboliche

Tramite la funzione esponenziale si definiscono le funzioni $\sinh x$, SENO IPERBOLICO DI x , $\cosh x$, COSENO IPERBOLICO DI x , $\tanh x$, TANGENTE IPERBOLICA DI x , $\coth x$, COTANGENTE IPERBOLICA DI x :

$$\begin{aligned} \sinh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \cosh x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \tanh x &:= \frac{\sinh x}{\cosh x}, & \coth x &:= \frac{\cosh x}{\sinh x}. \end{aligned}$$

Alle naturali domande: “perché battezzare in questo modo queste funzioni? E quale vantaggio ce ne viene dal definirle?” non c’è altra soluzione che appellarsi alla fiducia del lettore nei confronti di chi scrive... Consideriamole prima le funzioni seno e coseno iperboliche.

Seno e coseno iperboliche. Le funzioni $\sinh$ e $\cosh$ sono definite per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre valgono le seguenti proprietà (verificatele come esercizio):

- (i) $\sinh x = 0$ se e solo se $x = 0$ e $\cosh x \neq 0$ per ogni x ;
- (ii) $\sinh x \geq 0$ se solo se $x \geq 0$ e $\cosh x > 0$ per ogni x ;
- (iii) $\sinh x$ è dispari e $\cosh x$ è pari.

Per determinarne il grafico in maniera qualitativa, restano da studiarne le derivate ed il comportamento asintotico. Derivare le funzioni seno e coseno iperbolico è molto facile. Guardate un po’:

$$\begin{aligned} (\sinh x)' &= \frac{(e^x - e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x, \\ (\cosh x)' &= \frac{(e^x + e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x. \end{aligned}$$

Quindi la derivata prima del seno iperbolico è il coseno iperbolico e viceversa. Grazie al segno di $\sinh x$ e $\cosh x$, possiamo allungare l’elenco di proprietà:

- (iv) $\cosh x$ ha un unico punto critico in $x = 0$ e $\sinh x$ non ha punti critici;
- (v) $\cosh x$ è decrescente in $(-\infty, 0)$ e crescente in $(0, +\infty)$, $\sinh x$ è crescente in $\mathbb{R}$.

In particolare, $x = 0$ è un punto di minimo assoluto per $\cosh x$ e quindi $\cosh x \geq \cosh 0 = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Riapplicando le formule di derivazione,

$$(\sinh x)'' = \sinh x \quad \text{e} \quad (\cosh x)'' = \cosh x,$$

quindi, per quanto riguarda la convessità:

(v) $\sinh x$ è convessa in $(0, +\infty)$ e concava in $(-\infty, 0)$, $\cosh x$ è convessa in $\mathbb{R}$.

Per quanto riguarda il comportamento per $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sinh x = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cosh x = +\infty.$$

Dalla definizione, è facile anche dedurre il profilo asintotico di seno e coseno iperbolici:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \sinh x - \frac{1}{2} e^x \right| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \cosh x - \frac{1}{2} e^x \right| = 0,$$

e, per $x \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \sinh x + \frac{1}{2} e^{-x} \right| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \cosh x - \frac{1}{2} e^{-x} \right| = 0.$$

Per un disegno preciso vicino a $x = 0$ della funzione $\sinh x$, si può notare che l'equazione

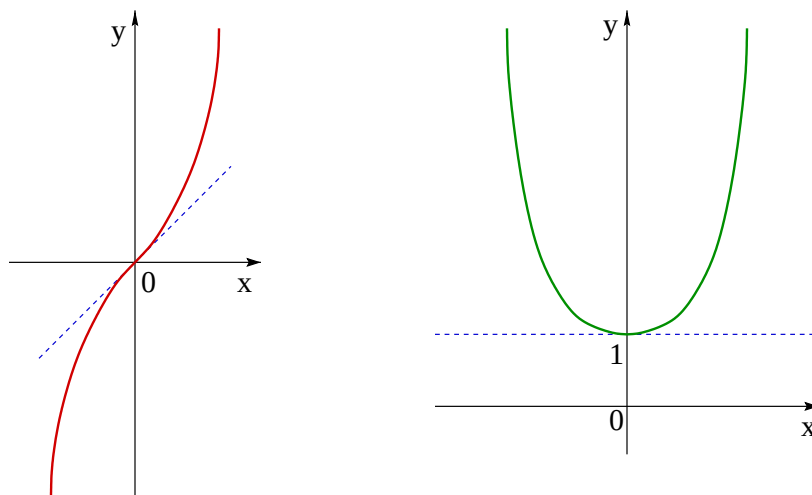


FIGURA 18. I grafici delle funzioni seno e coseno iperbolici.

della retta tangente è $y = \sinh 0 + \cosh 0 x = x$, cioè si tratta della bisettrice del primo e terzo quadrante.

Le funzioni $\sinh$ e $\cosh$ godono di una proprietà interessanti che le rende (in qualche modo) complementari alle usuali funzioni trigonometriche $\sin$ e $\cos$:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da questa proprietà segue che l'insieme $\gamma := \{(X, Y) : X = \cosh t, Y = \sinh t, \quad t \in \mathbb{R}\}$ è l'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = 1$. Da qui l'aggettivo *iperbolico*.

Infine anche per le funzioni iperboliche valgono formule di addizione/sottrazione:

$$\begin{aligned}\sinh(\alpha \pm \beta) &= \sinh(\alpha) \cosh(\beta) \pm \cosh(\alpha) \sinh(\beta), \\ \cosh(\alpha \pm \beta) &= \cosh(\alpha) \cosh(\beta) \pm \sinh(\alpha) \sinh(\beta).\end{aligned}$$

Funzioni inverse. Dalle proprietà di monotonìa segue che la funzione $\sinh x$ è invertibile su $\mathbb{R}$, mentre $\cosh x$; invece, la restrizione di $\cosh x$ all'insieme $[0, +\infty)$ è invertibile. La funzione inversa di $\sinh x$ si chiama SETTORE SENO IPERBOLICO e si indica con $\text{settsinh } x$; la funzione inversa di $\cosh x$ ristretta a $[0, +\infty)$ si chiama SETTORE COSENO IPERBOLICO e si indica con $\text{settcosh } x$. Occupiamoci di determinare le formule esplicite per queste due nuove funzioni. Come sempre, si tratta di esplicitare le relazioni $y = \sinh x$ e $y = \cosh x$ in funzione di y (con un po' di accortezza per la seconda, in cui bisogna tener conto di $x \geq 0$):

$$\begin{aligned}y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} &\iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 &\iff e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ & &\iff x = \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right). \\ y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} &\iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 &\iff e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \\ & &\iff x = \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right).\end{aligned}$$

Quindi

$$\text{settsinh } x = \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right) \quad \text{e} \quad \text{settcosh } x = \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right).$$

Tangente e cotangente iperboliche. Per definizione,

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

quindi è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e valgono

- (a) $\tanh x \geq 0$ se e solo se $x \geq 0$ e $\tanh x = 0$ se e solo se $x = 0$;
- (b) $\tanh x$ è dispari.

Le derivata prima e seconda della tangente iperbolica sono

$$(\tanh x)' = \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x (\cosh x)'}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

e, dato che $1/\cosh^2 x = 1 - \tanh^2 x$,

$$(\tanh x)'' = -2 \tanh x (\tanh x)' = -2 \frac{\tanh x}{\cosh^2 x}.$$

quindi

- (c) $\tanh x$ è crescente in $\mathbb{R}$;
- (d) $\tanh x$ è concava in $(0, +\infty)$ e convessa in $(-\infty, 0)$.

Per $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tanh x = \pm 1,$$

che, insieme alla monotonia (b), indica che la funzione $\tanh$ è limitata:

$$|\tanh x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se ci vogliamo divertire a determinare in che maniera la tangente iperbolica tende a $+1$ per $x \rightarrow +\infty$, basta considerare la funzione $\tanh x - 1$:

$$\tanh x - 1 = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - 1 = -\frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \approx -2e^{-2x} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Per le proprietà di $\coth x$ si può ragionare in maniera simile, oppure notare che

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x},$$

e dedurre tutto dalle proprietà note della tangente iperbolica.

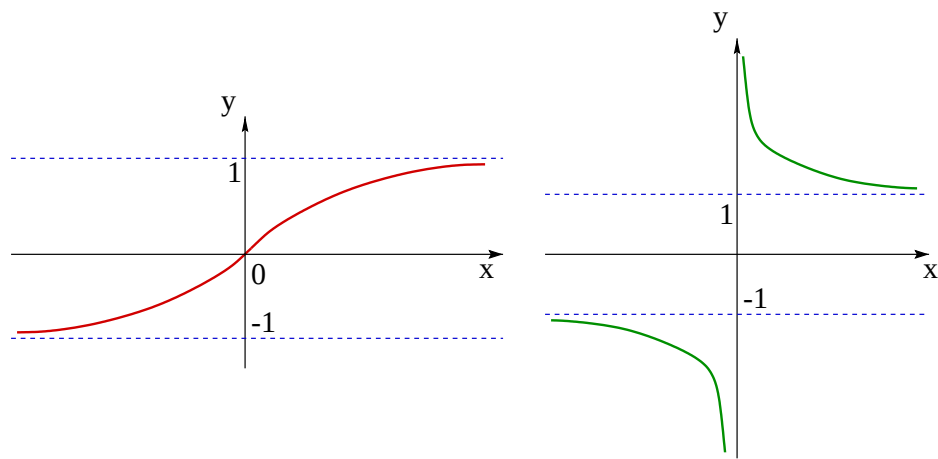


FIGURA 19. I grafici delle funzioni tangente e cotangente iperbolica.

ESERCIZIO 5.9. *Determinare le espressioni esplicite delle inverse di $\tanh x$ e $\coth x$.*

Ordini di grandezza e la formula di Taylor

1. Verso lo zero e ad un passo dall'infinito

Le funzioni con cui ci si trova a dover lavorare possono avere una struttura complicata, e anche molto. Se si è interessati al comportamento della funzione solo per determinati regimi, cioè per valori dell'incognita in opportune regioni, può bastare conoscere quali siano i termini all'interno della funzione che dominano rispetto agli altri, dato che questi sono quelli che determinano le principali proprietà della funzione. Ad esempio, se il valore $f(t)$ rappresenta la posizione di una particella all'istante t , può capitare che si sia interessati non a tutto il comportamento della funzione f , ma solo a quello per valori grandi di t . Cioè: che succede per $t \rightarrow +\infty$? Se $f(t) = e^t + \sin t$, è chiaro che saremo soddisfatti di un'approssimazione del tipo $f(t) \approx e^t$ per $t \rightarrow +\infty$, dato che questo termine diverge a $+\infty$, mentre l'altro rimane limitato. Ma se invece $f(t) = e^t + t$? Anche qui l'approssimazione sensata, per $t \rightarrow +\infty$, è $f(t) \approx e^t$, dato che l'esponenziale cresce ben più rapidamente del termine di primo grado t . Ma come formalizzare in modo preciso la frase “cresce ben più rapidamente”?

Lo stesso tipo di problema sorge nel caso di quantità infinitesime. Come confrontare termini che diventano molto piccoli (tendenti a zero)? E' quello di cui ci occupiamo in questo paragrafo, considerando le seguenti quattro situazioni: funzioni che divergono per $x \rightarrow +\infty$, che divergono per $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$, infinitesime per $x \rightarrow +\infty$, infinitesime per $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$.

Ordine di infinito per $x \rightarrow +\infty$. Consideriamo qui funzioni f tali che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$$

(il caso $x \rightarrow -\infty$ è analogo). Come distinguere tra funzioni di questo genere quelle che divergono “più rapidamente” e quelle che divergono “meno rapidamente”? Ad esempio le funzioni x^α , $\ln x$, e^x , a^x (con $\alpha > 0$ e $a > 1$) divergono per $x \rightarrow +\infty$ in modi essenzialmente differenti. Quale di queste funzioni cresce più rapidamente delle altre? A pensarci bene, non è ancora chiaro cosa significhi la frase “divergere più/meno rapidamente”.

Dato che

x	1	10	100	1000
x^2	1	100	10000	1000000
x^3	1	1000	1000000000	1000000000000

ci aspettiamo che x^3 tenda all'infinito più rapidamente di x^2 . La maniera rigorosa per esprimere questo concetto è studiare il rapporto delle due quantità. Dato che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty,$$

la grandezza di x^3 relativamente a quella di x^2 è maggiore. Questa proprietà si esprime dicendo che x^3 *tende a $+\infty$ più rapidamente di x^2 per $x \rightarrow +\infty$* .

Una maniera più fiabesca di leggere la situazione è di immaginarsi seduti, come novelli baroni di Munchausen, a cavallo della funzione x^2 , cioè di trovarsi nel punto (x, x^2) . Da lì provate ad osservare come si comporta x^3 . Bene, quel che vedrete è una funzione che tende a $+\infty$. Al contrario, se vi sedete su x^3 e guardate x^2 (sotto i vostri piedi per $x > 1$) vedrete una funzione che tende a zero! In effetti, dal punto di vista di x^3 , la funzione x^2 vale tanto quanto la funzione 0 per $x \rightarrow \infty$.

Allo stesso modo, x^α cresce più rapidamente di x^β per $\alpha > \beta$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = +\infty \quad \forall \alpha > \beta.$$

DEFINIZIONE 1.1. Ordine di infinito I. Siano f e g tali che $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} |g(x)| = +\infty$. Si dice che: f ha ORDINE DI INFINITO SUPERIORE RISPETTO A g PER $x \rightarrow +\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty.$$

Analogamente, f ha ORDINE DI INFINITO INFERIORE RISPETTO A g PER $x \rightarrow +\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Può capitare che due funzioni abbiano lo stesso tipo di andamento all'infinito. Ad esempio: x e $2x$ sono entrambi polinomi di grado 1 e vale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Il fatto che il limite del rapporto sia una costante non zero, suggerisce che le due funzioni hanno lo stesso ordine di grandezza. Si sarebbe tentati di dire che due funzioni hanno lo stesso ordine di grandezza se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \ell > 0.$$

Questa definizione, seppure ragionevole, è troppo restrittiva: non è in grado di coprire casi con termini oscillanti. Un esempio: per $f(x) = x(1 + \sin^2 x)$ e $g(x) = x$, si ha

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \frac{|x||1 + \sin^2 x|}{|x|} = 1 + \sin^2 x \in [1, 2],$$

che non ammette limite per $x \rightarrow +\infty$. Ma, dato che $x \leq f(x) \leq 2x$, è ragionevole affermare che f tende all'infinito con la stessa velocità di x .

DEFINIZIONE 1.2. Ordine di infinito II. Si dice che le funzioni f e g hanno LO STESSO ORDINE DI INFINITO PER $x \rightarrow +\infty$ se esistono $C_1, C_2 > 0$ tali che

$$(1.1) \quad 0 < C_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq C_2 \quad \text{per } x \text{ sufficientemente grande.}$$

In generale, per verificare la condizione (1.1) occorre stimare il rapporto $|f|/|g|$ e non sempre questa operazione è facile. Però, se esiste ed è diverso da zero il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \ell \neq 0,$$

la condizione (1.1) è automaticamente soddisfatta. Ad esempio, consideriamo le funzioni $f(x) = 2x^2 - 1$ e $g(x) = x^2 + x + 3$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x + 3} = 2 \neq 0,$$

quindi hanno lo stesso ordine di infinito. In generale, se f è un polinomio di grado m e g un polinomio di grado p , allora: se $m > p$, f è di ordine superiore a g ; se $m = p$, f e g sono dello stesso ordine; se $m < p$, f è di ordine inferiore a g .

OSSERVAZIONE 1.3. Se f è di ordine superiore rispetto a g , allora la funzione somma $f + g$ ha lo stesso ordine di f , infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{g(x)}{f(x)} \right) = 1.$$

Ad esempio, la funzione $x + \ln x$ ha lo stesso ordine di infinito di x per $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x} \right) = 1.$$

DEFINIZIONE 1.4. Se per una funzione f esiste un valore $\alpha > 0$ tale che f è dello stesso ordine di infinito di $|x|^\alpha$ per $x \rightarrow +\infty$ si dice che f è un INFINITO DI ORDINE α . La funzione $|x|$ è detta INFINITO CAMPIONE PER $x \rightarrow +\infty$.

Ad esempio, la funzione $\sqrt{1 + x^2}$ è tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 1,$$

quindi ha ordine di infinito uguale ad 1 per $x \rightarrow +\infty$. La funzione $\frac{4x^3+1}{x-5}$ è tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4x^3+1}{x-5}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 1}{x^3 - 5x^2} = 4$$

quindi ha ordine di infinito 2. In generale, l'ordine di infinito di una funzione razionale con numeratore di grado m e denominatore di grado p (con $m > p$) è $m - p$ (dimostratelo!).

OSSERVAZIONE 1.5. Se una funzione f ha ordine di infinito α , allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha+\varepsilon}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} \frac{1}{x^\varepsilon} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0;$$

cioè ha ordine di infinito inferiore rispetto ad $x^{\alpha+\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon > 0$. Analogamente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha-\varepsilon}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} x^\varepsilon = \infty \quad \forall \varepsilon > 0,$$

quindi ha ordine di infinito superiore rispetto ad $x^{\alpha-\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Si potrebbe pensare di introdurre una “scala assoluta” di ordine di grandezza delle funzioni, attribuendo a ciascuna funzione divergente la corrispondente potenza che la rappresenta. Questa scala, però, non adempie il compito richiesto: ci sono funzioni la cui “velocità di divergenza” non corrisponde a quella di nessuna potenza e quindi che, in questo senso, non possono essere classificate. I due casi più rilevanti sono dati dalla funzione $\ln x$ e da e^x per cui vale

$$(1.2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha > 0.$$

Per dimostrare (1.2), osserviamo preliminarmente che vale la disequazione¹

$$(1.3) \quad \ln t \leq t \quad \forall t > 0.$$

Ora, dato $\alpha > 0$, scegliamo $\varepsilon \in (0, \alpha)$. Applicando la disequazione (1.3) per $t = x^{\alpha-\varepsilon}$ e usando le proprietà del logaritmo:

$$\ln x \leq \frac{1}{\alpha - \varepsilon} x^{\alpha-\varepsilon} \quad \forall x > 0, 0 < \varepsilon < \alpha.$$

Dividendo entrambi i membri per x^α e passando al limite,

$$0 \leq \frac{\ln x}{x^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha - \varepsilon)x^\varepsilon} \quad \forall x > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

Per il secondo limite in (1.2), ponendo $y = e^x$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{(\ln y)^\alpha} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y^{1/\alpha}}{\ln y} \right)^\alpha = +\infty.$$

Le formule in (1.2) affermano che $\ln x$ diverge per $x \rightarrow +\infty$ più lentamente di qualsiasi potenza x^α e che e^x diverge più rapidamente di qualsiasi potenza x^α .

Con le funzioni esponenziali e con i logaritmi, è possibile costruire funzioni che divergono a velocità sempre più grandi o a velocità sempre più piccole. Ad esempio,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(e^x)}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty,$$

e quindi la funzione $\ln(\ln x)$ è un infinito di ordine inferiore a $\ln x$ (che già pareva abbastanza lento...) e $e^{(e^x)}$ è di ordine superiore a e^x .

¹Infatti, detta $F(t) = t - \ln t$, allora $F'(t) = 1 - 1/t$ e quindi F ha un punto di minimo assoluto per $t = 1$. Perciò $F(t) \geq F(1) = 1 > 0$.

OSSERVAZIONE 1.6. Si potrebbe non concordare sulla nostra simpatia per il numero e e la conseguente scelta delle funzioni e^x e $\ln x$. Cosa succede per a^x e $\log_a x$ con $a > 1$? La funzione $\log_a x$ si può scrivere in termini della funzione $\ln x$. Infatti calcoliamo l'inversa di $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$:

$$y = e^{x \ln a} \implies \ln y = x \ln a \implies f^{-1}(y) = \frac{\ln y}{\ln a}.$$

Ne segue che

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Quindi anche per $\log_a x$ vale la stessa proprietà di $\ln x$, infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha \ln a} = 0 \quad \forall \alpha > 0.$$

Procedendo come nel passaggio dal limite riguardante il logaritmo naturale al limite per l'esponenziale con base e , deduciamo che lo stesso vale per l'esponenziale con base $a > 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha > 0, a > 1.$$

E' interessante confrontare tra loro esponenziali e logaritmi con basi diverse:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln a} \frac{\ln b}{\ln x} = \frac{\ln b}{\ln a} \quad \forall a, b > 1,$$

quindi logaritmi con basi diverse hanno lo stesso ordine di infinito! Per gli esponenziali, invece, dati $a, b > 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \begin{cases} 0 & a < b, \\ 1 & a = b, \\ +\infty & b < a, \end{cases}$$

che mostra che esponenziali con base maggiore hanno ordine di infinito maggiore.

Tutte queste considerazioni, mostrano che, anche se è chiaro cosa significa “essere un infinito di ordine superiore”, non è possibile assegnare ad ogni funzione un ordine di infinito che permetta di ordinare tutte le possibili maniere di divergere. Ad esempio, esistono funzioni che divergono più velocemente di x , ma più lentamente di $x^{1+\varepsilon}$ per ogni ε positivo! Un esempio? La funzione $f(x) = x \ln x$, infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x^{1+\varepsilon}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = \begin{cases} +\infty & \varepsilon = 0, \\ 0 & \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Ordine di infinito e comportamento asintotico. È possibile che per una funzione f valga una decomposizione del tipo

$$(1.4) \quad f(x) = g(x) + h(x) \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0,$$

dove la funzione g è una funzione “nota” (ad esempio, una funzione con un asintoto obliquo). Se la funzione $|g|$ diverge a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$, allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |g(x) + h(x)| = +\infty.$$

Come sono collegati gli ordini di infinito di f e g ? La risposta è semplice: *le funzioni f e g hanno lo stesso ordine di infinito*, infatti

$$(1.5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{h(x)}{g(x)}\right) = 1.$$

Ad esempio, tutte le funzioni che possiedono un asintoto obliquo (non orizzontale) per $x \rightarrow +\infty$ hanno ordine di infinito 1.

E' vero il viceversa? Supponiamo di sapere che una funzione f abbia lo stesso ordine di infinito di una funzione g :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |g(x)| = +\infty \quad \text{e} \quad 0 < C_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq C_2.$$

E' vero che vale una rappresentazione come quella data in (1.4)? La risposta, in generale, è negativa. Ad esempio, per le funzioni $f(x) = x + \ln x$ e $g(x) = x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln x}{x} = 1,$$

ma la differenza tra f e g se ne guarda bene dal tendere a zero per $x \rightarrow +\infty$

$$h(x) = f(x) - g(x) = (x + \ln x) - x = \ln x \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

Ordine di infinito per $x \rightarrow x_0$. Così come si confrontano i comportamenti delle funzioni per $x \rightarrow +\infty$, è possibile confrontare funzioni che divergono in un punto x_0 , cioè funzioni tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty.$$

La terminologia è analoga alla precedente.

DEFINIZIONE 1.7. Ordine di infinito III. Date due funzioni f e g tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty,$$

si dice che f è un INFINITO DI ORDINE SUPERIORE RISPETTO A g PER $x \rightarrow x_0$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty.$$

Se il limite è 0, f è un INFINITO DI ORDINE INFERIORE RISPETTO A g PER $x \rightarrow x_0$. Infine, se esistono C_1, C_2 e $\delta > 0$ per cui

$$(1.6) \quad 0 < C_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq C_2 \quad \text{per} \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

si dice che f e g hanno STESSO ORDINE DI INFINITO PER $x \rightarrow x_0$.

Esattamente come nel caso di $x \rightarrow +\infty$, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = \ell \neq 0$, allora automaticamente è verificata la condizione (1.6) e, quindi, f e g sono dello stesso ordine. Ad esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\sin x} \right| = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{1/\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

quindi $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/\sin x$ sono "infiniti" dello stesso ordine per $x \rightarrow 0$.

DEFINIZIONE 1.8. Se la funzione f ha lo stesso ordine di infinito di $1/|x - x_0|^\alpha$ per qualche $\alpha > 0$, si dice che f è un INFINITO DI ORDINE α PER $x \rightarrow x_0$. La funzione $1/|x - x_0|$ è detta INFINITO CAMPIONE PER $x \rightarrow x_0$.

Anche qui si può ripetere quanto detto in precedenza: esistono funzioni che non hanno un ordine di infinito per $x \rightarrow x_0$. Un esempio? Con il cambio di variabile $y = -\ln x$, si deduce che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x^\alpha} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^{\alpha y}} = 0,$$

che mostra che $\ln x$ ha un ordine di infinito in 0 inferiore a qualsiasi potenza. Varianti a vostro gusto.

Ordine di infinitesimo. Così come si confrontano infiniti, è possibile confrontare funzioni infinitesime per $x \rightarrow x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ oppure per $x \rightarrow \pm\infty$. Qui, per abbreviare l'esposizione, scriviamo x_0 per indicare o un numero reale, o uno dei due simboli $\pm\infty$.

DEFINIZIONE 1.9. Ordine di infinitesimo. Siano f e g infinitesime per $x \rightarrow x_0$. Si dice che f è un INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE A g PER $x \rightarrow x_0$ se

$$(1.7) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Se il limite è $+\infty$, f è un INFINITESIMO DI ORDINE INFERIORE A g . Infine, f e g hanno lo STESSO ORDINE DI INFINITESIMO se in un intorno di x_0 (nel caso di $x_0 = \pm\infty$ si intende per valori sufficientemente grandi),

$$0 < C_1 \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C_2 \quad \text{per qualche } C_1, C_2 > 0.$$

Come nel caso degli infiniti, si introducono infinitesimi campione.

– Se $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che f è un infinitesimo di ordine α , se è dello stesso ordine di $|x - x_0|^\alpha$. La funzione $|x - x_0|$ è l'infinitesimo campione per $x \rightarrow x_0$.

– Se $x_0 = \pm\infty$, si dice che f è un infinitesimo di ordine α , se è dello stesso ordine di $1/|x|^\alpha$. La funzione $1/|x|$ è l'infinitesimo campione per $x \rightarrow \pm\infty$.

Qualche esempio (tanto per gradire):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x \text{ è infinitesimo di ordine 1 per } x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1/(1+x^2)}{1/x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+x^2} \text{ è infinitesimo di ordine 2 per } x \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos x \text{ è infinitesimo di ordine 2 per } x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\arctan(1/x)}{1/x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \text{ è infinitesimo di ordine 1 per } x \rightarrow \pm\infty$$

I simboli di Landau: “ O ” e “ o ”. Per indicare che una funzione f ha un ordine di grandezza inferiore a quello di un'altra funzione g si usa la notazione $f = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$ (si legge f è un “ o piccolo” di g). Il significato di questa affermazione è che f/g tende a zero per $x \rightarrow x_0$. Ad esempio,

$$x^\alpha = o(x^\beta) \quad \forall \alpha < \beta \quad \text{per } x \rightarrow +\infty,$$

infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-\beta} = 0 \quad \forall \alpha < \beta.$$

Abbiamo anche visto che

$$\begin{aligned} \ln x &= o(x^\alpha) & \forall \alpha > 0 & \quad \text{per } x \rightarrow +\infty, \\ x^\alpha &= o(e^x) & \forall \alpha > 0 & \quad \text{per } x \rightarrow +\infty, \\ 1 - \cos x &= o(x) & & \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.10. Verificare la validità di

$$\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Soluzione. Questa affermazione vuol dire

$$\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{2x} = o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty,$$

quindi basta verificare che il limite del rapporto della funzione a primo membro e di quella a secondo sia nullo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{2x}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{1+4x^2}}{2\sqrt{1+4x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{1+4x^2}(2x + \sqrt{1+4x^2})} = 0.$$

E anche questa è fatta. $\square$

Analogamente si introduce la notazione $f = O(g)$ (si legge f è un “ O grande” di g) per indicare che la funzione f ha al più l'ordine di grandezza di g , ossia se il rapporto f/g è limitato in un intorno di x_0

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C,$$

per qualche $C > 0$, in un intorno di x_0 . Ad esempio,

$$\sqrt{10x-1} = O(\sqrt{x}) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Infatti, dato che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{10x-1}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{10 - \frac{1}{x}} = \sqrt{10},$$

il rapporto di $\frac{\sqrt{10x-1}}{\sqrt{x}}$ è limitato per valori della x sufficientemente grandi.

Dai limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

segue che, per $x \rightarrow 0$,

$$e^x = 1 + O(x), \quad \ln(1+x) = O(x), \quad \sin x = O(x), \quad \cos x = 1 + O(x^2).$$

Derivabilità con i simboli di Landau. Tramite i simboli di Landau si può riscrivere la derivabilità di una funzione in modo diverso. La derivabilità di una funzione f in x può essere scritta nella forma

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0.$$

Quindi, se una funzione è derivabile in x , vale la relazione (particolarmente significativa)

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

L'interpretazione di questa formula è che l'incremento di f si può rappresentare come un termine $f'(x)h$, lineare nell'incremento h , più un resto che ha un ordine di grandezza inferiore ad h per $h \rightarrow 0$. Si usa la terminologia:

$$\text{DIFFERENZIALE DI } f: \quad df(x; h) := f'(x)h.$$

Fissato il valore di x , il differenziale $df(x; h)$ rappresenta un'approssimazione (valida a meno di $o(h)$) dell'incremento $\Delta f(x; h) := f(x+h) - f(x)$:

$$\Delta f(x; h) \approx df(x; h) \quad \text{per } h \rightarrow 0.$$

Come si precisa il senso del simbolo $\approx$? Proprio tramite i simboli di Landau:

$$|\Delta f(x; h) - df(x; h)| = o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0,$$

che esprime il fatto che l'errore che si commette sostituendo all'incremento Δf , il differenziale df è un infinitesimo di ordine superiore al primo.

2. Il Teorema di de l'Hôpital

Supponiamo f e g derivabili nell'intervallo (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = g(x_0) = 0$. In questa situazione non è evidente se esista e quanto valga il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Sostituendo, formalmente, a f e g il valore nel punto limite si ottiene l'espressione $\frac{0}{0}$ che non ha senso. L'esistenza o meno del limite è legata alla rapidità con cui le funzioni f e g tendono a 0 per $x \rightarrow x_0$, ossia alla relazione che c'è tra i loro ordini di infinitesimo. Come risolvere un limite del genere? Sensatamente, si può pensare di approssimare le funzioni f e g con la loro retta tangente nel punto x_0 :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)} = \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Se $g'(x_0) \neq 0$, l'espressione alla fine ha senso ed è ragionevole aspettarsi che dia il valore del limite richiesto. Uno strumento estremamente potente per rendere rigoroso questo punto di vista è il teorema di de l'Hôpital.

Enunciamo prima di tutto il Teorema di Cauchy, che può essere visto come una “variante” del Teorema di Lagrange.

TEOREMA 2.1. Teorema di Cauchy. *Siano f e g due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) . Allora esiste $\xi \in (a, b)$ tale che*

$$(2.1) \quad \det \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & f'(\xi) \\ g(b) - g(a) & g'(\xi) \end{pmatrix} = 0,$$

cioè $(f(b) - f(a))g'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$.

Non è male osservare che, se $g(x) = x$, si ottiene l’enunciato del Teorema di Lagrange.

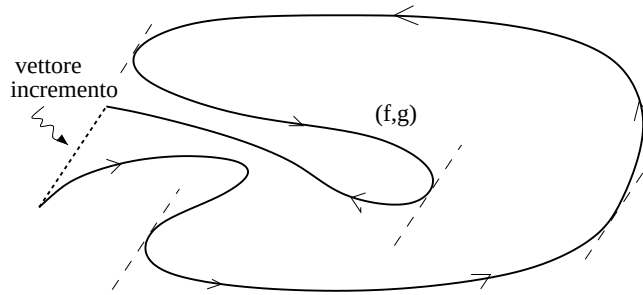


FIGURA 1. L’interpretazione geometrica del Teorema di Cauchy.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$\Phi(x) := \det \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & f(x) \\ g(b) - g(a) & g(x) \end{pmatrix} \equiv [f(b) - f(a)] g(x) - f(x)[g(b) - g(a)].$$

Chiaramente Φ è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Inoltre, per le proprietà dei determinanti, si ha

$$\Phi(a) = \det \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & f(a) \\ g(b) - g(a) & g(a) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} f(b) & 0 \\ g(b) & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\Phi(b) = \det \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & f(b) \\ g(b) - g(a) & g(b) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -f(a) & 0 \\ -g(a) & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Quindi, per il Teorema di Lagrange (o per il Teorema di Rolle), esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $\Phi'(\xi) = 0$. Dato che $\Phi'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - f'(x)(g(b) - g(a))$, segue la conclusione. ■

Interpretazione geometrica. Date le funzioni f e g , consideriamo la funzione *vettoriale* (f, g) che associa ad un punto dell’intervallo $[a, b]$ il punto del piano di coordinate (f, g) . Il Teorema di Cauchy asserisce che esiste sempre un valore $\xi \in (a, b)$ tale che il vettore incremento $(f(b) - f(a), g(b) - g(a))$ e il vettore “derivata” $(f'(\xi), g'(\xi))$ calcolato in $x = \xi$ sono paralleli.

Se $g(b) - g(a) \neq 0$ e $g'(\xi) \neq 0$, è possibile riscrivere la condizione (2.1) nella forma²

$$(2.2) \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Ricordiamo che il problema a cui vogliamo rispondere è

$$f(x_0) = g(x_0) = 0 \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots?$$

Se $a = x_0$, $b = x$ e le due funzioni f e g sono entrambe nulle in x_0 , allora la relazione (2.2) dice che: per ogni x esiste ξ (compreso tra x_0 e x) per cui

$$(2.3) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

cioè il rapporto delle funzioni in x è uguale al rapporto delle derivate in ξ . Quando si passa al limite per $x \rightarrow x_0$, necessariamente anche ξ deve tendere ad x_0 . Quindi, in sostanza, fare il limite del rapporto di f e g equivale a fare il limite del rapporto delle derivate!

TEOREMA 2.2. Teorema di de l'Hôpital. *Siano f e g due funzioni derivabili tali che $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Se esiste finito*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R},$$

allora esiste anche il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x)$ ed ha lo stesso valore:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

La conclusione è valida anche nel caso in cui il rapporto delle derivate abbia limite $+\infty$ o $-\infty$. Non si può dedurre nessuna conclusione nel caso in cui il rapporto delle derivate non abbia limite.

Dimostrazione. Applicando il Teorema di Cauchy, per ogni x esiste ξ tale che (2.3) è soddisfatta con ξ compreso tra x e x_0 . Per $x \rightarrow x_0$, necessariamente $\xi \rightarrow x_0$, e il termine $f'(\xi)/g'(\xi)$ tende ad ℓ per ipotesi. Dato che questo termine è uguale a $f(x)/g(x)$, ne segue la conclusione. ■

Esistono in commercio anche altre versioni del Teorema di de l'Hôpital che si applicano a casi differenti: forme indeterminate del tipo $0/0$ per $x \rightarrow \pm\infty$ o del tipo ∞/∞ per

²Applicando il Teorema di Lagrange *separatamente* a f e a g si deduce l'esistenza di $\xi, \eta \in (a, b)$ tali che $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ e $g(b) - g(a) = g'(\eta)(b - a)$, da cui

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\eta)}.$$

In generale, ξ ed η sono diversi! Il Teorema di Cauchy garantisce che si può scegliere $\xi = \eta$.

$x \rightarrow x_0$ e per $x \rightarrow \pm\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \\ \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |g(x)| = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \end{aligned}$$

Il simbolo ℓ può essere sia un numero reale sia $+\infty$ o $-\infty$.

Il principio è sempre lo stesso: nel caso di una forma indeterminata $0/0$ o ∞/∞ , si può calcolare il limite del rapporto delle derivate. Se tale limite esiste, allora dà anche il valore del limite iniziale. Se, invece, il rapporto delle derivate non esiste, non si può concludere nulla. Nel caso in cui il limite del rapporto delle derivate dia luogo, esso stesso, ad una forma indeterminata $0/0$ o ∞/∞ , si può applicare di nuovo il Teorema di de l'Hôpital e (provare a) calcolare il limite del rapporto delle derivate seconde. *Ad libitum*.

ESEMPIO 2.3. Per calcolare il limite

$$(2.4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x - \sin x},$$

studiamo il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(1+x^2)(1-\cos x)} = 2,$$

dato che $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)/x^2 = 1/2$. Quindi il limite (2.4) esiste e vale 2.

ESEMPIO 2.4. Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) x.$$

Questo limite è della forma $0 \cdot \infty$, ma si può ricondurre alla tipologia trattabile con il teorema di de l'Hôpital riscrivendolo come

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi/2 - \arctan x}{1/x}.$$

Il rapporto delle derivate ha limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) x = 1,$$

che esprime il fatto che $\arctan x$ tende a $\pi/2$ per $x \rightarrow +\infty$ con ordine 1, cioè

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

ESERCIZIO 2.5. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\cos x - 1}.$$

Soluzione. Applicando due volte il Teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{-\cos x} = -1,$$

che conclude l'esercizio. $\square$

Utilizziamo adesso il Teorema di de l'Hôpital per dedurre delle approssimazioni polinomiali di funzioni con un errore che sia infinitesimo di ordine sempre più alto. Scegliamo come cavia la funzione $\sin x$. Dato che è derivabile in 0 e la sua derivata è 1,

$$(2.5) \quad \sin x = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0.$$

Per dedurre un'approssimazione per $\sin x$ con un errore che sia $o(x^2)$, calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2}.$$

Per applicare il Teorema di de l'Hôpital, studiamo il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Dato che tale limite esiste finito, anche il limite da cui siamo partiti esiste e vale 0. Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0,$$

che possiamo riscrivere come

$$(2.6) \quad \sin x = x + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

La formula (2.6) dice che l'errore che si commette approssimando $\sin x$ con x è un infinitesimo di ordine superiore al secondo per $x \rightarrow 0$. Questa informazione è migliore di quella data da (2.5), che ci garantiva solamente un errore di ordine superiore al primo.

Per ottenere un'approssimazione con errore di ordine superiore al terzo, ragioniamo come in precedenza e calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = -\frac{1}{6},$$

che implica $\sin x = x + O(x^3)$. Portando il termine $-1/6$ a primo membro, otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3} = 0$$

cioè la funzione $\sin x$ è pari a $x - \frac{1}{6}x^3$ più un errore superiore a x^3

$$(2.7) \quad \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Possiamo iterare il procedimento e calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + x}{12x^2} = 0,$$

quindi

$$(2.8) \quad \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Confrontate la formula (2.8) con quella di partenza (2.5) per convincervi del netto miglioramento!

Ripetiamo l'esperimento su una cavia diversa: e^x . Il fatto che e^x sia derivabile in $x = 0$ e la derivata valga 1 si traduce nella formula

$$(2.9) \quad e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Per migliorare l'espressione, calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2},$$

cioè $e^x = 1 + x + O(x^2)$. Il limite può essere riscritto come

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^2} = 0,$$

cioè $e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 = o(x^2)$, o anche

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Allo stesso modo

$$(2.10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{3x^2} = \frac{1}{6},$$

La relazione (2.10) si può riscrivere come

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right) = 0 \quad \iff \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Cosa stiamo facendo iterando questo procedimento? Stiamo ottenendo delle approssimazioni ad ordini sempre più alti di una funzione data. La relazione $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ esprime il fatto che la funzione e^x si può approssimare, per $x \rightarrow 0$ con il polinomio $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ commettendo un errore (la differenza tra e^x e il polinomio) che tende a zero per $x \rightarrow 0$ con ordine superiore a 3 (cioè più rapidamente di x^3).

L'iterazione dell'algoritmo che abbiamo visto conduce direttamente a quello che si chiama *polinomio di Taylor*, ma questa è un'altra storia.

3. La formula di Taylor: punto e basta

Replichiamo, in generale, l'esperimento fatto su $\sin x$ e e^x alla fine del paragrafo precedente. Se f è una funzione derivabile in x_0 ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

che si può riscrivere come

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = 0,$$

o anche nella forma

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad \text{per } x \rightarrow x_0,$$

che esprime che la funzione f , vicino al punto x_0 , può essere approssimata con la funzione affine $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, commettendo un errore che è un infinitesimo di ordine superiore ad 1 per $x \rightarrow x_0$.

Per ottenere un'approssimazione più precisa, possiamo calcolare, applicando il Teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{1}{2}f''(x_0),$$

supponendo che la funzione f sia derivabile due volte in x_0 . Il precedente limite si può scrivere come

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2]}{(x - x_0)^2} = 0$$

ossia

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o(|x - x_0|^2).$$

Così abbiamo scoperto che la funzione $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$ approssima f , vicino ad x_0 , con un errore di ordine superiore a 2. Il grafico della funzione $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$ rappresenta la parabola che meglio approssima la funzione f per $x \rightarrow x_0$.

Iterando ancora una volta il procedimento e supponendo che la funzione f sia derivabile tre volte in x_0 , si ottiene

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + o(|x - x_0|^3).$$

Si può quindi ragionevolmente congetturare che, se la funzione f è derivabile n volte, valga la rappresentazione

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o(|x - x_0|^n).$$

TEOREMA 3.1. Formula di Taylor. Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n volte in (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$. Dato $n \in \mathbb{N}$, sia

$$T_n(x; x_0) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

Allora $f(x) = T_n(x; x_0) + o(|x - x_0|^n)$, cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

DEFINIZIONE 3.2. Il polinomio $T_n(x; x_0)$ si chiama **POLINOMIO DI TAYLOR DI GRADO n DELLA FUNZIONE f NEL PUNTO x_0** e rappresenta un'approssimazione della funzione f vicino ad x_0 (se $x_0 = 0$, il polinomio p_n viene, a volte, chiamato polinomio di McLaurin).

La peculiarità della formula di Taylor sta nel fatto che il resto R_n , definito da

$$R_n(x; x_0) := f(x) - T_n(x; x_0),$$

è un infinitesimo di ordine superiore ad $|x - x_0|^n$ per $x \rightarrow x_0$.

Dimostrazione. Appliciamo il Teorema di de l'Hôpital al limite

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \cdots - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1}}{(x - x_0)^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) - \cdots - \frac{1}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-2}}{n(x - x_0)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Dato che sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi, possiamo applicare nuovamente il Teorema di de l'Hôpital, ottenendo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0) - f'''(x_0)(x - x_0) - \cdots - \frac{1}{(n-3)!} f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-3}}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}}.$$

Iterando $n - 1$ volte il procedimento si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x - x_0)} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Quindi vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \cdots - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1}}{(x - x_0)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

da cui segue

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \cdots - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1}}{(x - x_0)^n} - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) = 0,$$

che porta alla conclusione. ■

ESEMPIO 3.3. Polinomi. Assegnati $a_0, \dots, a_p$, sia

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p.$$

Consideriamo, prima di tutto, lo sviluppo in $x_0 = 0$. Dato che

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2x + \dots + pa_px^{p-1} \\ f''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \dots + p(p-1)a_px^{p-2} \\ &\vdots \\ f^{(p)}(x) &= p(p-1) \dots 2 \cdot 1 a_p \\ f^{(k)}(x) &= 0 \end{aligned} \quad k > p$$

si ha

$$f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2, \quad \dots \quad f^{(p)}(0) = p! a_p, \quad f^{(k)}(0) = 0 \quad k > p.$$

Quindi,

$$T_n(x; 0) = \begin{cases} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n & n < p, \\ a_0 + a_1x + \dots + a_px^p & n \geq p. \end{cases}$$

Come era naturale aspettarsi, il polinomio di Taylor di f in $x_0 = 0$ e di grado n si ottiene considerando i termini del polinomio con grado minore o uguale ad n .

Per il polinomio di Taylor in $x_0 \neq 0$, occorre riscrivere il polinomio in termini di potenze di $h := x - x_0$. In questo modo si otterrà un'espressione del tipo

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_p(x - x_0)^p$$

con $b_0, b_1, \dots, b_p$ opportuni. Il polinomio di Taylor è dato da

$$T_n(x; x_0) = \begin{cases} b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)^n & n < p, \\ b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_p(x - x_0)^p & n \geq p. \end{cases}$$

Consideriamo, ad esempio, la funzione $f(x) = x + x^3$. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, per scriverla in termini di potenze di $h = x - x_0$ calcoliamo

$$f(x_0 + h) = (x_0 + h) + (x_0 + h)^3 = x_0 + x_0^3 + (1 + 3x_0^2)h + 3x_0h^2 + h^3.$$

Quindi vale l'identità

$$x + x^3 = x_0 + x_0^3 + (1 + 3x_0^2)(x - x_0) + 3x_0(x - x_0)^2 + (x - x_0)^3.$$

Ad esempio, il polinomio di Taylor di grado 2 in x_0 è

$$T_2(x; x_0) = x_0 + x_0^3 + (1 + 3x_0^2)(x - x_0) + 3x_0(x - x_0)^2.$$

Lo stesso, evidentemente, si ottiene applicando direttamente la formula: da

$$f(x) = x + x^3, \quad f'(x) = 1 + 3x^2, \quad f''(x) = 6x,$$

segue

$$T_2(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 = x_0 + x_0^3 + (1 + 3x_0^2)(x - x_0) + 3x_0(x - x_0)^2.$$

ESEMPIO 3.4. Esponenziale in $x_0 = 0$. Siano

$$f(x) = e^x \quad \text{e} \quad x_0 = 0.$$

Dato che $f^{(k)}(x) = e^x$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ per ogni k , quindi il polinomio di Taylor di grado n è

$$T_n(x; 0) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Si noti che questa formula è coerente con la definizione che abbiamo dato di funzione esponenziale:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

Che succede se $x_0 \neq 0$? I conti non sono molto diversi:

$$T_n(x; 0) = e^{x_0} \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} = e^{x_0} \left[1 + (x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \right].$$

ESEMPIO 3.5. Seno e coseno in $x_0 = 0$. Sia $f(x) = \sin x$, allora

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x, \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Calcolando in $x_0 = 0$, otteniamo

$$f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Ne segue che

$$T_n(x; 0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

è il polinomio di Taylor di grado n con $n = 2k + 1$ o $2k + 2$. In effetti si può dimostrare che vale l'uguaglianza

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Analogamente se consideriamo la funzione $f(x) = \cos x$ abbiamo

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x, \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Calcolando in $x_0 = 0$, otteniamo

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k, \quad f^{(2k+1)}(0) = 0 \quad \forall k.$$

Ne segue che

$$T_n(x; 0) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

è il polinomio di Taylor di $\cos x$ centrato in 0 di grado n con $n = 2k$ o $2k + 1$. Anche per il coseno vale un'uguaglianza analoga alla precedente:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 3.6. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 4 della funzione $\sin x$ centrato in $x_0 = \pi/2$ e quello centrato in $x_0 = \pi/4$.

ESEMPIO 3.7. Siano

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{e} \quad x_0 = 0.$$

Le derivate di f sono

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad \dots, \quad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Perciò $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2, \dots$, $f^{(k)}(0) = k!$. Quindi il polinomio di Taylor di grado n centrato in 0 è

$$T_n(x; 0) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k.$$

Anche in questo caso il polinomio di Taylor è coerente con l'espressione nota per la serie geometrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

che, come si ricorda bene, ha senso solo per $|x| < 1$.

ESEMPIO 3.8. Come ultimo esempio, consideriamo

$$f(x) = \ln(1+x) \quad \text{e} \quad x_0 = 0.$$

Le derivate di f sono

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad \dots, \quad f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k},$$

e quindi $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!$. Il polinomio di Taylor di grado n in $x_0 = 0$ è

$$T_n(x; 0) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

4. Espressioni del resto

Data una funzione f , con un buon numero di derivate, sappiamo determinare un polinomio che la approssimi vicino ad un punto assegnato x_0 . In questa approssimazione viene commesso un errore pari a

$$R_n(x; x_0) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Quali proprietà conosciamo su R_n ? Per ora sappiamo solo che

$$R_n(x; x_0) = o(|x - x_0|^n) \quad \text{cioè} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Questa è solo un'informazione sul comportamento al limite, quindi non dice nulla di preciso sulla grandezza della quantità R_n in punti $x \neq x_0$. Per poter stimare l'errore occorre una rappresentazione migliore di R_n . Ecco il nostro nuovo obiettivo.

TEOREMA 4.1. Resto in forma di Lagrange. *Se la funzione f è derivabile $n+1$ volte, esiste ξ , tra x_0 e x , tale che*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x - x_0)^{n+1},$$

Dimostrazione. Sia f derivabile $n+1$ volte e consideriamo le funzioni

$$F(x) := R_n(x; x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \quad \text{e} \quad G(x) := (x - x_0)^{n+1}.$$

Applicando il Teorema di Cauchy a F e G nell'intervallo di estremi x_0 ed x , deduciamo che esiste ξ_1 , compreso tra x_0 e x per cui

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)},$$

dato che $F(x_0) = G(x_0) = 0$. Derivando le espressioni di F e G , otteniamo

$$F'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(x_0)(x - x_0)^k \quad \text{e} \quad G'(x) = (n+1)(x - x_0)^n.$$

Se $n \geq 1$ è possibile riapplicare il Teorema di Cauchy, trovando ξ_2 , compreso tra x_0 e ξ_1 e quindi anche tra x_0 e x , per cui

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}.$$

Iterando $n+1$ volte il procedimento, si dimostra l'esistenza di un valore ξ_{n+1} compreso tra x_0 e x tale che

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})}.$$

Dato che $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ e $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, si deduce (qui $\xi = \xi_{n+1}$)

$$F(x) - F(x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (G(x) - G(x_0))$$

da cui, ricordando le definizioni di F e G ,

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x - x_0)^{n+1},$$

cioè la conclusione. ■

A partire da questa espressione del resto, possiamo stimare l'errore commesso quando si approssimi una funzione f con il suo polinomio di Taylor: se $M > 0$ è tale che

$|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ per ogni t tra x e x_0 , allora

$$|R_n(x; x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

Calcolo approssimato di $\sin(1/10)$ con stima dell'errore. Abbiamo già considerato questo problema proponendo come “candidato” per l'approssimazione il valore $1/10$. In quell'occasione avevamo stimato l'errore commesso con $1/100$. Il procedimento era basato sul Teorema di Lagrange e sull'approssimazione della funzione $\sin x$ con la sua tangente nell'origine:

$$\sin x \approx x \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Detta $f(x) = \sin x$, la stima dell'errore discendeva da

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| &= |(f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0)| \\ &= |f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0)| \leq |f''(\eta)| |x - x_0|^2. \end{aligned}$$

dove $x = 1/10$ e $x_0 = 0$. Dato che $f''(x) = -\sin x$, la stima è immediata.

Come ottenere stime migliori? La scelta naturale è approssimare la funzione $\sin x$ con un suo polinomio di Taylor di grado opportuno. Ad esempio,

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Quindi un'approssimazione migliore della precedente è

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} = 0,0998\bar{3}.$$

Scriviamo l'errore con la forma di Lagrange $R_3(x; x_0) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)(x - x_0)^4$, cioè

$$\sin \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{6000} \right) = R_3(1/10; 0) = \frac{\sin \xi}{4!} \frac{1}{10^4},$$

quindi

$$|R_3(1/10; 0)| \leq \frac{1}{24 \cdot 10^4} = 4,1\bar{6} \times 10^{-6}.$$

In realtà il polinomio $x - \frac{x^3}{6}$ è anche il polinomio di Taylor di $\sin x$ in 0 di grado 4, quindi il resto può anche essere scritto come

$$\sin \frac{1}{10} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6000} = R_4(1/10; 0) = \frac{\cos \xi}{5!} \frac{1}{10^5},$$

quindi

$$|R_4(1/10; 0)| \leq \frac{1}{120 \cdot 10^5} = 8,3 \times 10^{-8}.$$

In definitiva

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) = 0,0998\bar{3} \pm 8,3 \times 10^{-8}.$$

Forma integrale del resto. Il resto R_n si può esprimere anche in una forma diversa. Mentre nella forma di Lagrange è presente un punto ξ di cui si sa ben poco (solo che si trova tra x_0 e x), l'espressione che vediamo tra poco esprime l'errore come un integrale opportuno.

Consideriamo, per semplicità, il polinomio di grado 1. Fissato x , studiamo

$$R(t) := f(x) - f(t) - f'(t)(x - t).$$

Derivando rispetto a t (x è costante)

$$R'(t) = -f'(t) + f'(t) - f''(t)(x - t) = -f''(t)(x - t) \quad \text{e} \quad R(x) = 0,$$

quindi possiamo riscrivere la funzione R come

$$R(x_0) = R(x) + \int_x^{x_0} R'(t) dt = - \int_x^{x_0} f''(t)(x - t) dt = \int_{x_0}^x f''(t)(x - t) dt.$$

Ricordando la definizione di $R(x)$, si ottiene

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = R(x_0) = \int_{x_0}^x f''(t)(x - t) dt.$$

e cioè

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x f''(t)(x - t) dt.$$

Dato che il metodo funziona per $n = 1$, applichiamo al caso generale. Fissiamo x e consideriamo la funzione

$$R(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(t)(x - t)^k.$$

Dato che (verificare!)

$$R'(t) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n, \quad R(x) = 0,$$

la funzione R si può rappresentare nella forma

$$R(x_0) = R(x) + \int_x^{x_0} R'(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt.$$

Tornando alle notazioni originali, otteniamo che *se la funzione f è derivabile $n + 1$ volte, vale la formula di Taylor con il resto in FORMA INTEGRALE.*

TEOREMA 4.2. Resto in forma integrale. *Se la funzione f è derivabile $n + 1$ volte e $f^{(n+1)}$ è integrabile,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt.$$

CAPITOLO 9

Zoologia dell'integrazione

Per iniziare, ricordiamo i fatti principali che abbiamo visto sugli integrali indefiniti.

– Data una funzione f , si dice che F è una PRIMITIVA di f se $F' = f$; la famiglia di primitive di una funzione f si indica con il simbolo

$$\int f(x) dx.$$

Se la funzione f è considerata in un intervallo, tutte le primitive di f sono uguali a meno di una costante additiva, cioè, data F primitiva di f ,

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

– Se si è in grado di determinare una primitiva F di una funzione f , allora è possibile calcolare il valore dell'integrale definito calcolando la differenza di F agli estremi dell'intervallo:

$$F' = f \quad \implies \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ad esempio, dato che $(\ln t)' = 1/t$,

$$\int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

In questo Capitolo ci poniamo il problema di determinare *esplicitamente* primitive F di una funzione data f , per opportune classi di funzioni. Cosa si intende qui con “primitive esplicite”? A partire dalle operazioni elementari (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione) e dalle funzioni trigonometriche ed esponenziali, formando inverse e composte di queste funzioni, è possibile costruire una classe molto ampia di funzioni che possiamo descrivere come “funzioni esplicite”. Per quanto riguarda l'operazione di derivazione, la derivata di una funzione esplicita è essa stessa una funzione esplicita e il calcolo della derivata è possibile tramite l'uso di opportune formule di derivazione.

Al contrario, per l'integrazione la situazione è differente: *non è vero che tutti gli integrali delle funzioni esplicite si possano scrivere in termini di funzioni esplicite* (ad esempio, non è possibile esprimere in forma “esplicita”, le primitive di e^{-x^2}). Questo risultato può suonare sorprendente, ma è un fatto della vita. Prendere o lasciare. Nelle pagine che seguono, ci dedichiamo al problema di individuare un certo numero di metodi che permettano di calcolare (quando possibile) l'integrale in forma esplicita. E' indispensabile sottolineare, ancora una volta, che *l'integrale di funzioni continue e di funzioni con*

un numero finito di cambi di monotonìa esiste sempre, anche nel caso in cui non sia esprimibile in forma esplicita.

1. Integrali elementari

Il problema è risolto in certe situazioni dal *teorema fondamentale del calcolo* che, tra le altre cose, afferma che

$$F'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int f(x) dx = F(x) + \text{costante}.$$

In particolare, *ad ogni regola di derivazione corrisponde una regola di integrazione*. Ad esempio

$$D(x^{\alpha+1}) = (\alpha + 1)x^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + \text{costante} \quad \forall \alpha \neq -1.$$

Allo stesso modo si ottengono altre formule elementari:

$$\begin{aligned} \int \sin x dx &= -\cos x + C, & \int \cos x dx &= \sin x + C, \\ \int e^x dx &= e^x + C, & \int \frac{dx}{x} &= \ln |x| + C, \\ \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + C, & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C, \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x + C, & \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\cot x + C, \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C, & \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\arccos x + C, \\ \int \sinh x dx &= \cosh x + C & \int \cosh x dx &= \sinh x + C. \end{aligned}$$

Inoltre, grazie alla linearità dell'integrale, anche combinazioni lineari di funzioni di cui si conosce la primitiva, possono essere integrate esplicitamente. Ad esempio,

$$\int (1 + 2x + 3e^x) dx = \int 1 dx + 2 \int x dx + 3 \int e^x dx = x + x^2 + 3e^x + C.$$

Tramite queste formule è possibile calcolare il valore di certi integrali definiti, senza bisogno di passare per le approssimazioni con somme integrali per eccesso e per difetto. Ad esempio,

$$\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \quad \text{e} \quad \int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Vale la pena di tornare al Capitolo in cui si è definito l'integrale e rivedere i faticosi passaggi con cui siamo giunti alle stesse conclusioni.

Passiamo ora a sviluppare i due metodi principali da affiancare alle formule di integrazione elementari: l'integrazione per sostituzione e l'integrazione per parti. Entrambi,

in sostanza, discendono da formule di derivazione: il primo discende dalla derivazione di funzione composta, il secondo dalla derivazione della funzione prodotto.

2. Metodo di sostituzione

Il primo di questi metodi consiste nell'*introduzione di una nuova variabile* (per questo si parla di “metodo di sostituzione”). Nella sostanza, la sostituzione corrisponde a “cambiare punto di vista”, cioè osservare lo stesso oggetto da un'altra posizione. Strano, ma vero: salire su una sedia, accucciarsi sotto al tavolo o mettersi a testa in giù, alle volte, può aiutare a trovare una primitiva...

E' noto che

$$(2.1) \quad \left(F(\phi(u)) \right)' = F'(\phi(u))\phi'(u).$$

Quindi

$$(2.2) \quad \int F'(\phi(x))\phi'(x) dx = F(\phi(x)) + \text{costante}$$

Ad esempio,

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \sin(x^2) + \text{costante},$$

dove $F(s) = \sin s$ e $\phi(x) = x^2$. Vediamo un altro esempio. Calcoliamo

$$\int \frac{\ln x}{x} dx.$$

Dato che $D(\ln x) = 1/x$, qui $F(s) = s$ e $\phi(x) = \ln x$. Quindi

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x (\ln x)' dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \text{costante}.$$

La domanda naturale è: *come individuare una decomposizione della funzione integranda come in (2.2)?* Occorre esercizio, esperienza e anche una certa dose di fortuna, talvolta, non guasta... Più si sperimenta e più si impara ad accorgersi delle funzioni che si integrano in questo modo.

Vediamo la formula di sostituzione per integrali definiti: integriamo la formula (2.1) nell'intervallo $[\alpha, \beta]$,

$$F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} (F(\phi(u)))' du = \int_{\alpha}^{\beta} F'(\phi(u))\phi'(u) du.$$

Ponendo $a = \phi(\alpha)$ e $b = \phi(\beta)$,

$$F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx.$$

Quindi otteniamo la formula

$$\int_{\alpha}^{\beta} F'(\phi(u))\phi'(u) du = \int_a^b F'(x) dx,$$

che, chiamando $f = F'$, può essere riscritta come

$$(2.3) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(u))\phi'(u) du = \int_a^b f(x) dx \quad \text{con} \quad \begin{cases} a = \phi(\alpha) \\ b = \phi(\beta) \end{cases}$$

Questa formula esprime come si trasforma l'espressione dell'integrale cambiando la variabile di integrazione. Se, per calcolare $\int_a^b f(x) dx$, decidiamo di porre $x = \phi(u)$, dobbiamo sostituire formalmente dx con $\phi'(u) du$ e cambiare gli estremi compatibilmente con la formula che collega x con u , cioè $x = \phi(u)$. Ad esempio, per calcolare

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx,$$

poniamo $x = \ln u$. Dato che $\phi(u) = \ln u$, dobbiamo sostituire dx con $\frac{1}{u} du$:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{u}{1+u^2} \frac{1}{u} du.$$

Rimangono da calcolare α e β che sono soluzione di $0 = \phi(\alpha) = \ln \alpha$ e $1 = \phi(\beta) = \ln \beta$. Invertendo la funzione ϕ otteniamo

$$\alpha = \phi^{-1}(0) = e^0 = 1, \quad \beta = \phi^{-1}(1) = e^1 = e.$$

In definitiva

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int_1^e \frac{u}{1+u^2} \frac{1}{u} du = \int_1^e \frac{du}{1+u^2} = \arctan e - \frac{\pi}{4}.$$

Nel caso degli integrali indefiniti la formula di sostituzione prende la forma (qui F è una primitiva di f , $F' = f$)

$$(2.4) \quad \int f(\phi(u))\phi'(u) du = \int f(x) dx = F(x) + C = F(\phi(u)) + C$$

Anche in questo caso si può usare, come regola mnemonica, la relazione

$$x = \phi(u) \quad \Rightarrow \quad \phi'(u) du = dx.$$

(L'uso delle virgolette “ ” sta a ricordare che non è stato dato senso ai simboli du e dx e che la regola suscritta è solo formale). Nell'uso di questa formula è importante ricordarsi di ritornare alla fine alla variabile u , sostituendo x con $\phi(u)$ nell'ultimo passaggio.

ESEMPIO 2.1. Sia ϕ una funzione derivabile. Calcoliamo

$$\int \frac{\phi'(u)}{\phi(u)} du.$$

Ponendo $x = \phi(u)$, si ha $dx = \phi'(u) du$, quindi

$$\int \frac{\phi'(u)}{\phi(u)} du = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C = \ln |\phi(u)| + C.$$

Ad esempio,

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x| + C, \quad \int \tan x dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = - \ln |\cos x| + C.$$

ESEMPIO 2.2. Allo stesso modo, ponendo $x = \phi(u)$ (e quindi $dx = \phi'(u) du$),

$$\int [\phi(u)]^\alpha \phi'(u) du = \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C = \frac{1}{\alpha+1} [\phi(u)]^{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1.$$

Ad esempio,

$$\int \sin^k x \cos x dx = \frac{1}{k+1} \sin^{k+1} x + C.$$

La formula di sostituzione è sempre conveniente nel caso di funzioni composte di cui l'ultima sia lineare: ponendo $x = au + b$

$$\int f(au + b) du = \frac{1}{a} \int f(x) dx.$$

Non è detto che l'integrale di destra sia risolvibile, ma l'espressione è comunque più semplice. Vediamo un esempio di questo genere

$$\int \frac{1}{\cos^2(2u+3)} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \tan x + C = \frac{1}{2} \tan(2u+3) + C.$$

Un'altra espressione per la formula di sostituzione. Spesso ci si trova a lavorare con espressioni della forma

$$\int h(\phi(u)) du,$$

dove l'integrando è una funzione composta $h(\phi(u))$, *senza il fattore moltiplicativo* $\phi'(u)$. E' possibile applicare la sostituzione $x = \phi(u)$? E, in caso affermativo, in che modo? Quello che serve è che la funzione ϕ sia invertibile. Supponiamo che l'inversa sia la funzione $u = \psi(x)$, allora possiamo sostituire a du l'oggetto $\psi'(x) dx$, in modo da ottenere

$$\int h(\phi(u)) du = \int h(x) \psi'(x) dx.$$

Per giustificare in modo rigoroso questa formula, chiamiamo $f(u) := h(\phi(u))$

$$\int h(\phi(u)) du = \int f(u) du = \int f(\psi(x)) \psi'(x) dx = \int h(x) \psi'(x) dx.$$

Nel caso di integrali definiti occorre cambiare gli estremi di integrazione coerentemente con la nuova variabile introdotta:

$$\int_a^b h(\phi(u)) du = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} h(x) \psi'(x) dx.$$

ESERCIZIO 2.3. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int (1 + e^x)^2 dx.$$

Soluzione. Poniamo $t = 1 + e^x$, allora $x = \ln(t-1)$ e $dx = \frac{1}{t-1} dt$. Quindi

$$\int (1 + e^x)^2 dx = \int \frac{t^2}{t-1} dt.$$

Dato che $\frac{t^2}{t-1} = t + 1 + \frac{1}{t-1}$,

$$\begin{aligned}\int (1 + e^x)^2 dx &= \int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \frac{1}{2}t^2 + t + \ln|t-1| + C \\ &= \frac{1}{2}(1 + e^x)^2 + 1 + e^x + x + C = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C.\end{aligned}$$

Si sarebbe anche potuto procedere utilizzando $(1 + e^x)^2 = 1 + 2e^x + e^{2x}$. $\square$

ESERCIZIO 2.4. *Calcolare l'integrale indefinito*

$$\int \cos^2 x \, dx.$$

Soluzione. Dato che $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$,

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (\cos(2x) + 1) \, dx = \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx + \frac{1}{2}x.$$

Ponendo $t = 2x$,

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{1}{2} \int \cos t \, dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin(2x) + C = \sin x \cos x + C.$$

Quindi

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (\sin x \cos x + x) + C.$$

ESERCIZIO 2.5. *Calcolare l'integrale definito*

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx.$$

Soluzione. Procedendo come sopra l'integrale può essere riscritto nella forma

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\cos(2x) + 1) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(2x) \, dx + \frac{\pi}{4}.$$

Poniamo nell'integrale $t = 2x$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos t \, dt = \frac{1}{2} \sin t \Big|_0^{\pi} = 0.$$

Quindi il valore dell'integrale è $\pi/4$. $\square$

ESERCIZIO 2.6. *Fissato $a > 0$, calcolare gli integrali (indefinito e definito)*

$$\int x\sqrt{a^2 - x^2} \, dx \quad e \quad \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2} \, dx.$$

Soluzione. Moltiplichiamo e dividiamo per 2 e poniamo $t = a^2 - x^2$:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{a^2 - x^2} \, dx &= \frac{1}{2} \int 2x(a^2 - x^2)^{1/2} \, dx = -\frac{1}{2} \int t^{1/2} \, dt \\ &= -\frac{t^{3/2}}{3} + C = -\frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{3} + C.\end{aligned}$$

Per l'integrale definito basta calcolare la differenza di una primitiva tra i due estremi

$$\int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{(a^2 - x^2)^{3/2}}{3} \Big|_0^a = \frac{a^3}{3}.$$

ESEMPIO 2.7. Dati $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che $\Delta := B^2 - 4AC < 0$, come risolvere

$$(2.5) \quad \int \frac{dx}{Ax^2 + Bx + C} \quad ?$$

La condizione $\Delta < 0$, implica che il polinomio è irriducibile (non ha radici reali). In questa classe di integrali rientra un integrale che conosciamo:

$$(2.6) \quad \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x + C.$$

L'integrale (2.5) può essere risolto con una sostituzione opportuna che lo riconduce a (2.6). Invece di dare direttamente la soluzione, proviamo a ricostruire passo passo come possa essere ottenuta, in modo da capire, in un caso concreto che cosa voglia dire utilizzare il metodo di sostituzione.

Il grafico della funzione $\frac{1}{Ax^2+Bx+C}$ è qualitativamente simile a quello della funzione $\frac{1}{x^2+1}$ (Fig.1). È possibile con traslazioni e dilatazioni trasformare il grafico della prima funzione

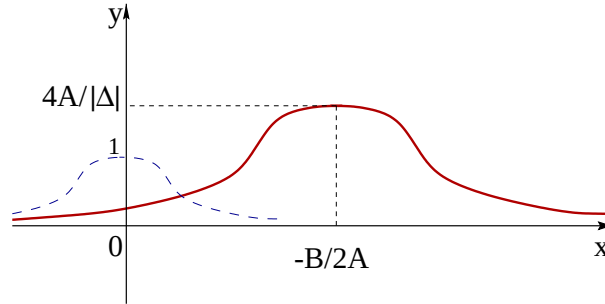


FIGURA 1. Il grafico della funzione $\frac{1}{Ax^2+Bx+C}$ (e, tratteggiato, quello di $\frac{1}{x^2+1}$).

in quello della seconda? Bisogna prima di tutto correggere due “difetti” evidenti di $f(x) = \frac{1}{Ax^2+Bx+C}$: il valore massimo è $f(-B/2A) = 4A/|\Delta|$ e non 1, l’asse di simmetria è $x = -B/2A$ e non $x = 0$. Per il primo problema, basta utilizzare la linearità dell’integrale: la funzione f può essere riscritta come

$$f(x) = \frac{4A}{|\Delta|} g(x) \quad \text{dove} \quad g(x) := \frac{1}{\frac{4A^2}{|\Delta|} x^2 + \frac{4AB}{|\Delta|} x + \frac{4AC}{|\Delta|}},$$

quindi

$$\int \frac{dx}{Ax^2 + Bx + C} = \frac{4A}{|\Delta|} \int \frac{dx}{\frac{4A^2}{|\Delta|} x^2 + \frac{4AB}{|\Delta|} x + \frac{4AC}{|\Delta|}},$$

dove la funzione all’interno dell’ultimo integrale vale 1 in $x = -B/2A$.

Per fare in modo che l'asse di simmetria sia in $x = 0$, bisogna traslare il grafico. Questo corrisponde ad introdurre una nuova variabile u , legata ad x dalla relazione

$$u = x + \frac{B}{2A}.$$

Con questa scelta, si ha $\frac{4A^2}{|\Delta|} x^2 + \frac{4AB}{|\Delta|} x + \frac{4AC}{|\Delta|} = \frac{4A^2}{|\Delta|} u^2 + 1$, quindi

$$\int \frac{dx}{Ax^2 + Bx + C} = \frac{4A}{|\Delta|} \int \frac{du}{\frac{4A^2}{|\Delta|} u^2 + 1} = \frac{4A}{|\Delta|} \int \frac{du}{\left(\frac{2A}{|\Delta|^{1/2}} u\right)^2 + 1}.$$

Resta da modificare ancora una volta la variabile u , attraverso la posizione

$$v := \frac{2A}{|\Delta|^{1/2}} u,$$

che consiste nel dilatare/comprimere (dipende dalla grandezza di $\frac{2A}{|\Delta|^{1/2}}$) la variabile u per un fattore opportuno. Così facendo si arriva alla conclusione:

$$\int \frac{dx}{Ax^2 + Bx + C} = \frac{4A}{|\Delta|} \int \frac{du}{\left(\frac{2A}{|\Delta|^{1/2}} u\right)^2 + 1} = \frac{2}{|\Delta|^{1/2}} \int \frac{dv}{v^2 + 1} = \frac{2}{|\Delta|^{1/2}} \arctan v + \text{costante}.$$

Per avere l'espressione della primitiva in x (e non in v), basta seguire a ritroso le definizioni di v e di u . In definitiva: (qui $|\Delta| = 4AC - B^2$)

$$\int \frac{dx}{Ax^2 + Bx + C} = \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}} \arctan \left(\frac{2Ax + B}{\sqrt{|\Delta|}} \right) + \text{costante}.$$

3. Integrazione per parti

Il secondo metodo deriva dalla formula di derivazione del prodotto. Si tratta di una regola talmente importante che in alcune estensioni del concetto di integrale si parte da questa idea meravigliosa: fare in modo che valga la regola di integrazione per parti.

Integrando $(fg)' = f'g + fg'$,

$$f(x)g(x) = \int g(x) f'(x) dx + \int g'(x) f(x) dx$$

da cui

$$(3.1) \quad \int g'(x) f(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx.$$

Questa formula è nota come INTEGRAZIONE PER PARTI: l'integrale della funzione $g'f$ viene trasformato in una parte integrata, il termine fg , sommato all'integrale della funzione $-gf'$. Il metodo è vantaggioso se per il termine gf' si conosce un metodo di integrazione.

Per gli integrali definiti, la formula (3.1) diviene

$$(3.2) \quad \int_a^b g'(x) f(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x) f'(x) dx.$$

ESEMPIO 3.1. Partiamo da un caso semplice

$$\int x e^x dx = \int x(e^x)' dx = x e^x - \int (x)' e^x dx = x e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C.$$

Anche nel caso della funzione $x^2 e^x$ si può procedere in modo analogo, applicando due volte l'integrazione per parti,

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \left[x e^x - \int e^x dx \right] \\ &= x^2 e^x - 2[(x-1)e^x + C] = (x^2 - 2x + 2)e^x + C. \end{aligned}$$

È possibile risolvere allo stesso modo un qualsiasi integrale del tipo

$$\int p(x) e^x dx \quad p \text{ polinomio di grado } n,$$

infatti basta iterare n volte l'uso della formula di integrazione per parti

$$\begin{aligned} \int p(x) e^x dx &= p(x) e^x - \int p'(x) e^x dx = [p(x) - p'(x)] e^x + \int p''(x) e^x dx \\ &= \dots = [p(x) - p'(x) + \dots + (-1)^n p^{(n)}(x)] e^x + C \end{aligned}$$

Osservando che $e^{\alpha x} = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha x})'$, si possono determinare le primitive anche di funzioni del tipo $p(x) e^{\alpha x}$ con p polinomio. Ad esempio,

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{3x} dx &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} \left(x e^{3x} - \int e^{3x} dx \right) = \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{2}{9} x + \frac{2}{27} \right) e^{3x} + C. \end{aligned}$$

ESEMPIO 3.2. Anche funzioni del tipo prodotto di polinomio e di $\sin x$ o $\cos x$ possono essere risolte integrando per parti. I casi più semplici sono

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= \int x (-\cos x)' dx = -x \cos x + \int \cos x dx = \sin x - x \cos x + C; \\ \int x \cos x dx &= \int x (\sin x)' dx = x \sin x - \int \sin x dx = \cos x + x \sin x + C. \end{aligned}$$

In generale iterando il procedimento un numero opportuno di volte si calcolano gli integrali

$$\int p(x) \sin(ax) dx, \quad \int p(x) \cos(ax) dx \quad (a \in \mathbb{R}).$$

ESERCIZIO 3.3. Determinare tutte le primitive di $x^2 \sin(2x)$.

Soluzione. Applichiamo l'integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin(2x) dx &= \int x^2 \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) \right)' dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos(2x) + \int x \cos(2x) dx \\ &= -\frac{1}{2} x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2} \int x (\sin(2x))' dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2} x \sin(2x) - \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx \\ &= -\frac{1}{2} x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2} x \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + C. \end{aligned}$$

ESEMPIO 3.4. Sempre tramite l'integrazione per parti, si risolvono anche

$$\int p(x) \ln x \, dx \quad p \text{ polinomio.}$$

Calcoliamo l'integrale di $\ln x$:

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= \int 1 \cdot \ln x \, dx = \int (x)' \ln x \, dx = x \ln x - \int x (\ln x)' \, dx \\ &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int x \ln x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

In generale, dato $k \in \mathbb{N}$,

$$\int x^k \ln x \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \ln x - \frac{1}{k+1} \int x^k \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \left(\ln x - \frac{1}{k+1} \right) + C.$$

ESERCIZIO 3.5. Calcolare gli integrali indefiniti

$$\int \arctan x \, dx, \quad \int x \arctan x \, dx.$$

Soluzione. Procediamo come visto in precedenza per $\ln x$

$$\int \arctan x \, dx = \int (x)' \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \dots$$

Per calcolare l'ultimo integrale, moltiplichiamo e dividiamo per due, in modo da ricondurci alla forma $\int \phi'(x)/\phi(x) \, dx$

$$\dots = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Analogamente, per il secondo integrale

$$\int x \arctan x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx.$$

Consideriamo separatamente l'integrale a secondo membro:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \, dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \arctan x + C.$$

Quindi

$$\int x \arctan x \, dx = \frac{1}{2} [(x^2+1) \arctan x - x] + C.$$

ESEMPIO 3.6. Qui usiamo l'integrazione per parti in un modo leggermente diverso: iterando l'applicazione di (3.1) torniamo all'integrale originale, ottenendo in questo modo un'equazione per la primitiva. In questo modo risolviamo integrali della forma

$$\int e^{ax} \sin(bx) \, dx, \quad \int e^{ax} \cos(bx) \, dx.$$

Ad esempio,

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \sin(3x) dx &= \frac{1}{3} \int e^{2x} (-\cos(3x))' dx = -\frac{1}{3} \cos(3x) e^{2x} + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos(3x) dx \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x) e^{2x} + \frac{2}{9} \int e^{2x} (\sin(3x))' dx \\ &= \frac{1}{9} (2 \sin(3x) - 3 \cos(3x)) e^{2x} - \frac{4}{9} \int e^{2x} \sin(3x) dx.\end{aligned}$$

Guardando il primo e l'ultimo termine, si ha

$$\int e^{2x} \sin(3x) dx = \frac{1}{9} (2 \sin(3x) - 3 \cos(3x)) e^{2x} - \frac{4}{9} \int e^{2x} \sin(3x) dx,$$

da cui, esplicitando rispetto all'integrale richiesto,

$$\int e^{2x} \sin(3x) dx = \frac{1}{13} (2 \sin(3x) - 3 \cos(3x)) e^{2x} + C.$$

In generale si ottengono le formule (verificare!)

$$\begin{aligned}\int e^{ax} \sin(bx) dx &= \frac{1}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) e^{ax} + C, \\ \int e^{ax} \cos(bx) dx &= \frac{1}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) e^{ax} + C.\end{aligned}$$

Formule ricorsive. Alcune famiglie di integrali (dipendenti da un parametro discreto $n \in \mathbb{N}$), possono essere risolte in modo iterativo, cioè si risolve l'integrale per $n = 1$, e poi si mostra come l'integrale al passo n -esimo si possa ricondurre al calcolo dell'integrale $(n - 1)$ -esimo. Vediamo un paio di esempi. Calcoliamo

$$I_n = \int \sin^{2n} x dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Allo stesso modo si può calcolare $\int \cos^{2n} x dx$. Calcoliamo I_1 :

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x dx &= \int \sin x \cdot \sin x dx = \int \sin x (-\cos x)' dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx = x - \sin x \cos x - \int \sin^2 x dx.\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto una relazione del tipo $I_1 = x - \sin x \cos x - I_1$, quindi

$$I_1 = \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + C.$$

Per $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} &= \int \sin^{2n+1} x \sin x \, dx = \int \sin^{2n+1} x (-\cos x)' \, dx \\
 &= -\sin^{2n+1} x \cos x + (2n+1) \int \sin^{2n} x \cos^2 x \, dx \\
 &= -\sin^{2n+1} x \cos x + (2n+1) \int \sin^{2n} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\
 &= -\sin^{2n+1} x \cos x + (2n+1)I_n - (2n+1)I_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Quindi $I_{n+1} = -\sin^{2n+1} x \cos x + (2n+1)I_n - (2n+1)I_{n+1}$, da cui si deduce

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n+2} \{ (2n+1)I_n - \sin^{2n+1} x \cos x \} + C.$$

Ad esempio, per $n = 1$,

$$\begin{aligned}
 \int \sin^4 x \, dx &= I_2 = \frac{1}{4} (3I_1 - \sin^3 x \cos x) + C \\
 &= \frac{1}{8} (3x - 3 \sin x \cos x - 2 \sin^3 x \cos x) + C.
 \end{aligned}$$

4. Integrazione di funzioni razionali

Affrontiamo ora il problema di integrare funzioni razionali:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx \quad P, Q \text{ polinomi.}$$

Le primitive di una qualsiasi funzione razionale in termini di funzioni esplicite sono note, ma non è in queste Note che troverete i dettagli della questione.

In concreto è possibile completare il calcolo a patto di saper fattorizzare il polinomio a denominatore Q nel prodotto di termini irriducibili, cioè polinomi di primo grado (con molteplicità opportuna) e polinomi di secondo grado irriducibili (con molteplicità opportuna). In questo Paragrafo vedremo come si integrino funzioni razionali nel caso in cui il polinomio Q sia di grado al più due, o sia fattorizzabile in termini di polinomi di grado 1, cioè sia riscrivibile nella forma

$$Q(x) = a(x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_n)^{k_n} \quad a, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}.$$

Denominatore Q di grado 1. Sia $Q(x) = a(x - x_0)$ con $a, x_0 \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Se P è un polinomio di grado $p \geq 1$, tramite l'algoritmo di divisione dei polinomi, si determinano un polinomio P_1 di grado $p - 1$ e una costante $r \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{r}{a(x - x_0)}.$$

Quindi l'integrale si può decomporre nella somma di due integrali

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx = \int P_1(x) \, dx + \frac{r}{a} \int \frac{dx}{x - x_0}.$$

Il polinomio P_1 è integrabile esplicitamente, grazie alla formula

$$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

Anche l'altro integrale è risolubile esplicitamente:

$$\frac{r}{a} \int \frac{dx}{x - x_0} = \frac{r}{a} \int \frac{(x - x_0)'}{x - x_0} dx = \frac{r}{a} \ln |x - x_0| + C.$$

Vediamo un esempio. Calcoliamo

$$\int \frac{x^5 + 1}{x - 2} dx.$$

Dato che

$$\frac{x^5 + 1}{x - 2} = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 + \frac{33}{x - 2},$$

si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + 1}{x - 2} dx &= \int \left(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 + \frac{33}{x - 2} \right) dx \\ &= \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 + 16x + 33 \ln |x - 2| + C. \end{aligned}$$

Denominatore Q di grado 2. Supponiamo che Q sia un polinomio di grado 2. In questo caso Q è scrivibile nella forma

$$Q(x) = a(x^2 + 2bx + c) \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Se il polinomio a numeratore P ha grado $p \geq 2$, allora è possibile applicare l'algoritmo di divisione di polinomi e riscrivere la funzione razionale come somma

$$(4.1) \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

dove P_1 è un polinomio di grado $p - 2$ e R è un polinomio di grado minore o uguale a 1. L'integrale della funzione razionale è la somma di due integrali

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int P_1(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx.$$

Il primo dei due integrali è risolubile esplicitamente per via elementare. Consideriamo il secondo. Supponiamo che il resto R sia di grado 1 e scriviamolo nella forma $R(x) = \alpha(x + \beta)$ con $\alpha \neq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Si tratta di calcolare

$$\int \frac{\alpha(x + \beta)}{a(x^2 + 2bx + c)} dx = \frac{\alpha}{a} \int \frac{x + \beta}{x^2 + 2bx + c} dx.$$

Come primo passo, "costruiamo" a numeratore la derivata del denominatore. Moltiplichiamo e dividiamo per due e, successivamente, sommiamo e sottraiamo $2b$

$$\begin{aligned} \int \frac{\alpha(x + \beta)}{a(x^2 + 2bx + c)} dx &= \frac{\alpha}{2a} \int \frac{2x + 2\beta}{x^2 + 2bx + c} dx \\ &= \frac{\alpha}{2a} \int \frac{(2x + 2b) + 2(\beta - b)}{x^2 + 2bx + c} dx = \dots \end{aligned}$$

L'integrale finale può essere riscritto come somma dei due integrali di cui il primo è della forma $\int \frac{\phi'}{\phi} dx$; quindi

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{\alpha}{2a} \int \frac{(x^2 + 2bx + c)'}{x^2 + 2bx + c} dx + \frac{2\alpha(\beta - b)}{2a} \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} \\ &= \frac{\alpha}{2a} \ln |x^2 + 2bx + c| + \frac{2\alpha(\beta - b)}{2a} \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c}. \end{aligned}$$

Rimane quindi da risolvere l'integrale

$$(4.2) \quad \int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c}.$$

Nel caso in cui R in (4.1) sia di grado 0 ci si riconduce direttamente a questa situazione. La risoluzione dell'integrale (4.2) varia a seconda di quante radici reali abbia il denominatore, cioè a seconda che sia $b^2 > c$, $b^2 = c$ o $b^2 < c$. Trattiamo i tre casi separatamente. Ci ricondurremo (sostanzialmente) ai seguenti integrali elementari

$$\begin{aligned} \text{Caso I : } \quad b^2 > c &\longrightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C, \\ \text{Caso II : } \quad b^2 = c &\longrightarrow \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C, \\ \text{Caso III : } \quad b^2 < c &\longrightarrow \int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C. \end{aligned}$$

CASO I: $b^2 > c$. In questo caso il denominatore ha due radici reali

$$x^2 + 2bx + c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -b \pm \sqrt{b^2 - c}.$$

Indicando le radici con x_1 e x_2 , il polinomio si fattorizza:

$$x^2 + 2bx + c = (x - x_1)(x - x_2).$$

Decomponiamo la funzione integranda nella forma

$$\frac{1}{x^2 + 2bx + c} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2},$$

dove $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ sono due costanti da determinare. La somma delle due frazioni a secondo membro è uguale a

$$\frac{(A_1 + A_2)x - (A_1x_2 + A_2x_1)}{x^2 + 2bx + c},$$

e quindi A_1 e A_2 devono essere tali che $(A_1 + A_2)x - (A_1x_2 + A_2x_1) = 1$. Dato che due polinomi coincidono se e solo se coincidono i loro coefficienti, le costanti A_1, A_2 sono le soluzioni del sistema lineare (il cui determinante è $x_1 - x_2$ che, nel caso $b^2 > c$, è diverso da zero)

$$A_1 + A_2 = 0, \quad A_1x_2 + A_2x_1 = -1.$$

Individuati i valori di A_1 e A_2 , l'integrale è risolto:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} &= A_1 \int \frac{dx}{x - x_1} + A_2 \int \frac{dx}{x - x_2} \\ &= A_1 \ln |x - x_1| + A_2 \ln |x - x_2| + C.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 4.1. *Calcolare*

$$\int \frac{x^3}{x^2 - x - 2} dx.$$

Soluzione. Tramite la divisione di polinomi $\frac{x^3}{x^2 - x - 2} = x + 1 + \frac{3x+2}{x^2 - x - 2}$. Quindi

$$\int \frac{x^3}{x^2 - x - 2} dx = \int \left(x + 1 + \frac{3x+2}{x^2 - x - 2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + 3 \int \frac{x + \frac{2}{3}}{x^2 - x - 2} dx.$$

Per risolvere l'integrale a secondo membro, moltiplichiamo e dividiamo per 2 e, successivamente, sommiamo e sottraiamo -1

$$\begin{aligned}3 \int \frac{x + \frac{2}{3}}{x^2 - x - 2} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x - 1) + 1 + \frac{4}{3}}{x^2 - x - 2} dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2} dx + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x - 2} = \frac{3}{2} \ln |x^2 - x - 2| + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x - 2}.\end{aligned}$$

Dato che le radici del polinomio $x^2 - x - 2$ sono -1 e 2 , esistono A e B tali che

$$\frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1}.$$

Il sistema soddisfatto da A e B è: $A + B = 0$, $A - 2B = 1$, quindi $A = \frac{1}{3}$ e $B = -\frac{1}{3}$. Perciò

$$\int \frac{dx}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x - 2} - \int \frac{1}{3} \frac{dx}{x + 1} = \frac{1}{3} \ln |x - 2| - \frac{1}{3} \ln |x + 1| + C.$$

In conclusione, l'integrale richiesto è

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2 - x - 2} dx &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2} \ln |(x - 2)(x + 1)| + \frac{7}{6} \ln |x - 2| - \frac{7}{6} \ln |x + 1| + C \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2} \ln |x - 2| + \frac{3}{2} \ln |x + 1| + \frac{7}{6} \ln |x - 2| - \frac{7}{6} \ln |x + 1| + C \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3} \ln |x - 2| + \frac{1}{3} \ln |x + 1| + C.\end{aligned}$$

CASO II: $b^2 = c$. In questa situazione, si tratta di risolvere

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + b^2}.$$

Questo integrale è immediato, infatti

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + b^2} = \int \frac{dx}{(x + b)^2} = -\frac{1}{x + b} + C.$$

ESERCIZIO 4.2. *Calcolare*

$$\int \frac{x(x + 3)}{(x - 1)^2} dx.$$

Soluzione. Tramite la divisione di polinomi $\frac{x(x+3)}{(x-1)^2} = 1 + \frac{5x-1}{x^2-2x+1}$. Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{x(x+3)}{(x-1)^2} dx &= x + 5 \int \frac{x - \frac{1}{5}}{x^2 - 2x + 1} dx = x + \frac{5}{2} \int \frac{(2x-2) + 2 - \frac{2}{5}}{x^2 - 2x + 1} dx \\ &= x + \frac{5}{2} \ln |(x-1)^2| + 4 \int \frac{dx}{(x-1)^2} = x + 5 \ln |x-1| - \frac{4}{x-1} + C \end{aligned}$$

CASO III: $b^2 < c$. Questo caso è già stato considerato nell'Esempio 2.7. Ritroviamo qui la stessa soluzione senza fare ricorso al grafico della funzione integranda.

Dato che il polinomio $x^2 + 2bx + c$ è irriducibile, l'obiettivo è di ricondursi, con un opportuno cambiamento di variabili, all'integrale elementare

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

Chiamiamo $\nu := \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} > 0$ e riscriviamo in maniera opportuna il denominatore

$$x^2 + 2bx + c = x^2 + 2bx + b^2 + (c - b^2) = (x + b)^2 + \frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{\nu^2} \{[\nu(x + b)]^2 + 1\}.$$

Ponendo $t = \nu(x + b)$,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \nu \int \frac{dt}{1+t^2} = \nu \arctan t + C = \nu \arctan(\nu(x + b)) + C.$$

Dalla definizione di ν si deduce che

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + c} = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \arctan \left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}} \right) + C.$$

ESERCIZIO 4.3. Calcolare

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+2} dx.$$

Soluzione. Come al solito, ricostruiamo a numeratore la derivata del denominatore:

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-2+\frac{2}{3}}{x^2-2x+2} dx = \frac{3}{2} \ln |x^2-2x+2| + \int \frac{dx}{x^2-2x+2}.$$

L'ultimo integrale può essere risolto come sopra

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{dx}{1+(x-1)^2} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C = \arctan(x-1) + C.$$

Quindi

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+2} dx = \frac{3}{2} \ln |x^2-2x+2| + \arctan(x-1) + C.$$

Denominatore Q con sole radici reali. Consideriamo prima di tutto un caso semplice: il polinomio Q ha radici reali *distinte*, cioè

$$Q(x) = a(x-x_1) \cdots (x-x_n) \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \quad \text{con } x_i \neq x_j \quad \text{se } i \neq j.$$

Se $p \geq n$, il primo passaggio è sempre lo stesso: si usa l'algoritmo della divisione di polinomi per riscrivere la funzione razionale nella forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

dove P_1 è un polinomio di grado $p-n$, e R è un polinomio di grado minore di n . L'integrale si decompone in

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int P_1(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx.$$

A questo punto sfruttiamo la fattorizzazione di Q per riscrivere la funzione razionale R/Q come somma di funzioni razionali più semplici. Cerchiamo n costanti $A_1, \dots, A_n$ tali che

$$\frac{R(x)}{a(x-x_1) \cdots (x-x_n)} = \frac{1}{a} \left(\frac{A_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n} \right).$$

Per determinare le costanti $A_1, \dots, A_n$ si può imporre l'uguaglianza dei due membri ottenendo un sistema lineare. Equivalentemente si può moltiplicare per $x-x_1$ entrambi i membri

$$\frac{R(x)}{a(x-x_2) \cdots (x-x_n)} = \frac{1}{a} \left\{ A_1 + \frac{A_2(x-x_1)}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_n(x-x_1)}{x-x_n} \right\}.$$

e successivamente porre $x = x_1$, ottenendo il valore di A_1

$$A_1 = \frac{R(x_1)}{(x_1-x_2) \cdots (x_1-x_n)}$$

Analogamente per $A_2, \dots, A_n$. Determinate le costanti A_i , si calcola l'integrale:

$$\begin{aligned} \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx &= \frac{1}{a} \int \left(\frac{A_1}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n} \right) dx \\ &= \frac{1}{a} (A_1 \ln |x-x_1| + \cdots + A_n \ln |x-x_n|) + C. \end{aligned}$$

Per digerire la tecnica, calcoliamo

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

Dato che il grado del numeratore è minore del grado del denominatore, non occorre applicare l'algoritmo di divisione di polinomi. Passiamo subito alla decomposizione: cerchiamo $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x+3}.$$

Moltiplichiamo per $x+1$ e calcoliamo in $x = -1$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = A_1 + \frac{A_2(x+1)}{x+2} + \frac{A_3(x+1)}{x+3} \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{1}{2}.$$

Analogamente

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A_1(x+2)}{x+1} + A_2 + \frac{A_3(x+2)}{x+3} \quad \Rightarrow \quad A_2 = -1.$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A_1(x+3)}{x+1} + \frac{A_2(x+3)}{x+2} + A_3 \quad \Rightarrow \quad A_3 = \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2} \right| + C. \end{aligned}$$

Passiamo al caso generale: il denominatore Q si scompone come

$$Q(x) = a(x-x_1)^{k_1} \cdots (x-x_n)^{k_n} \quad a, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \quad k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}.$$

Anche in questo caso, dopo aver applicato (se necessario) l'algoritmo di divisione di polinomi, si deve risolvere un integrale della forma

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx,$$

dove R è un polinomio di grado strettamente minore di quello di Q . In questo caso si cerca, analogamente a quanto fatto nel caso di Q di secondo grado con due radici coincidenti, una decomposizione della forma

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{a(x-x_1)^{k_1} \cdots (x-x_n)^{k_n}} &= \frac{1}{a} \left\{ \frac{A_1^1}{x-x_1} + \frac{A_1^2}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_1^{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_n^1}{x-x_n} + \frac{A_n^2}{(x-x_n)^2} + \cdots + \frac{A_n^{k_n}}{(x-x_n)^{k_n}} \right\}, \end{aligned}$$

dove le costanti $A_i^j \in \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, k_i$ sono da determinare. Una volta determinate queste costanti, l'integrale è risolto dato che

$$\int \frac{A dx}{(x-\bar{x})^k} = \begin{cases} A \ln |x-\bar{x}| + C & k=1, \\ -\frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-\bar{x})^{k-1}} + C & k>1. \end{cases}$$

ESEMPIO 4.4. Ad esempio, consideriamo l'integrale

$$\int \frac{dx}{x^2(x+1)^2}.$$

In questo caso cerchiamo le costanti $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}.$$

Dato che deve essere

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{Ax^3 + 2Ax^2 + Ax + Bx^2 + 2Bx + B + Cx^3 + Cx^2 + Dx^2}{x^2(x+1)^2},$$

le costanti A, B, C, D devono soddisfare

$$A + C = 0, \quad 2A + B + C + D = 0, \quad A + 2B = 0, \quad B = 1.$$

Risolvendo il sistema, si ottiene

$$A = -2, \quad B = 1, \quad C = 2, \quad D = 1.$$

Perciò

$$\int \frac{dx}{x^2(x+1)^2} = \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = 2 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + C.$$

Altre classi di funzioni. Vediamo qualche altra classe di funzioni che si possono ricondurre, tramite un cambio di variabile, all'integrale di funzioni razionali.

ESEMPIO 4.5. Supponiamo di voler calcolare

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

dove R è una funzione razionale dei suoi argomenti. Dalle relazioni

$$(4.3) \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{dove} \quad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

ponendo $t = \tan(x/2)$ o, equivalentemente, $x = 2 \arctan t$, dato che $dx = 2/(1+t^2)dt$, l'integrale si trasforma nell'integrale di una funzione razionale

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt,$$

Ad esempio,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\tan(x/2)| + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2 dt}{1-t^2} = \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \ln \left| \frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)} \right| + C.$$

Non sempre la sostituzione (4.3) è conveniente. Supponiamo, ad esempio, di voler risolvere

$$\int \frac{\sin x}{\cos^{100} x} dx.$$

Tramite (4.3), l'integrale si trasforma in

$$\int \frac{\sin x}{\cos^{100} x} dx = \int \frac{4t(1+t^2)^{98}}{(1-t^2)^{100}} dt,$$

con un polinomio di grado duecento a denominatore! Che fare? Sarebbe invece stato molto più semplice porre $s = \cos x$, da cui

$$\int \frac{\sin x}{\cos^{100} x} dx = - \int \frac{ds}{s^{100}} = \frac{1}{99s^{99}} + C = \frac{1}{99 \cos^{99} x} + C.$$

ESEMPIO 4.6. Abbiamo un problema: calcolare l'area della regione di piano

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} \quad a, b > 0.$$

L'area $|\Omega|$ di Ω è pari al valore dell'integrale definito

$$|\Omega| = 4b \int_0^a \sqrt{1 - (x^2/a^2)} dx.$$

Introduciamo la variabile t definita da $x = a \cos t$, da cui $dx = -a \sin t dt$:

$$|\Omega| = 4ab \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos^2 t} \sin t dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 2ab [t - \sin t \cos t]_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

Quindi l'area della regione delimitata dall'ellissi di semiassi a e b è πab .

Allo stesso modo è possibile integrare funzioni del tipo

$$R(x, \sqrt{1 - (x^2/a^2)})$$

con R funzione razionale dei suoi argomenti. Infatti

$$\int R(x, \sqrt{1 - (x^2/a^2)}) dx = -a \int R(a \cos t, \sin t) \sin t dt.$$

dove $x = a \cos t$, e il secondo membro è una funzione razionale in $\sin t$ e $\cos t$.

Appendice A. Corpi in caduta libera

Consideriamo un punto che si muove lungo una retta e indichiamo con $y(t)$ la posizione che occupa all'istante t . L'equazione fondamentale che determina la dinamica del punto discende dal principio seguente: *la variazione di quantità di moto è pari alla forza che agisce sul punto*. La quantità di moto è il prodotto della massa e della velocità del punto, quindi è my' . Indicata con F la forza che agisce sul punto, la funzione y verifica l'equazione

$$\frac{d}{dt} (my') = F.$$

Nel caso in cui la massa sia indipendente dal tempo, si ottiene l'equazione

$$my'' = F.$$

Se la funzione F dipende solamente da t , determinare le funzioni y che verificano $my'' = F$ equivale a calcolare due integrali indefiniti:

$$y'(t) = \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(s) ds + C_1 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{m} \int_{t_1}^t \left(\int_{t_0}^{\tau} F(s) ds \right) d\tau + C_1 t + C_2,$$

dove t_0, t_1, C_1, C_2 sono costanti arbitrarie.

Vediamo un esempio semplice. Consideriamo il moto di un punto soggetto solo alla forza peso e che parta da fermo. Scegliendo l'asse y in modo che $y(0) = 0$ e che la forza peso sia diretta nel verso delle y crescenti, il problema corrisponde alla scelta $F = mg$ e $y'(0) = 0$. In definitiva, andiamo cercando una funzione $y = y(t)$ che verifichi

$$y'' = g, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

dove g è una costante universale il cui valore è circa $9,81 \text{ m/sec}^2$.

Integrando la relazione $y'' = g$ tra 0 e t , si ottiene

$$y'(t) = y'(0) + \int_0^t g ds = gt.$$

Integrando di nuovo, si ottiene la soluzione esplicita

$$y(t) = y(0) + \int_0^t g \tau d\tau = \frac{1}{2} g t^2.$$

Questa soluzione è, sostanzialmente, quella proposta da Isaac Newton e perciò la indichiamo d'ora in poi con y_N :

$$y_N(t) := \frac{1}{2} g t^2.$$

La versione di Alberto E. ¹ Improvvisamente, però, appare una nuova teoria all'orizzonte: un certo Alberto E., esperto tecnico di seconda classe di un ufficio brevetti, propone una versione diversa per modellizzare il problema della caduta libera. “La massa non è costante durante il moto, ma varia al variare della velocità”, assicura, e propone la formula

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (y'/c)^2}},$$

dove m_0 è la massa a riposo e c è la velocità della luce (circa 3×10^8 m/sec). Qual'è la soluzione y nel caso di questa scelta? Utilizzando $(my')' = mg$ con la nuova espressione per la massa, si ottiene

$$\left(\frac{m_0 y'}{\sqrt{1 - (y'/c)^2}} \right)' = \frac{m_0 g}{\sqrt{1 - (y'/c)^2}}.$$

con le stesse condizioni iniziali di prima $y(0) = y'(0) = 0$. Come trovare la soluzione? Rispetto al caso precedente, la situazione si è non poco complicata: a secondo membro compare y' , quindi un'espressione che dipende dall'incognita y . Non perdiamoci d'animo e cambiamo variabile:

$$w := \frac{y'}{\sqrt{1 - (y'/c)^2}}.$$

Quale equazione è soddisfatta da w ? Sostituendo nell'equazione per y , $w' = g w / y'$. Utilizziamo la definizione di w per esprimere y' in funzione di w : elevando al quadrato e con un po' di sano artigianato

$$(1 - (y'/c)^2) w^2 = (y')^2 \iff (y')^2 = \frac{w^2}{1 + (w/c)^2} \iff |y'| = \frac{|w|}{\sqrt{1 + (w/c)^2}}.$$

Dalla definizione di w discende che w e y' hanno lo stesso segno, quindi

$$y' = \frac{w}{\sqrt{1 + (w/c)^2}}.$$

In definitiva, la funzione w verifica

$$w' = g \sqrt{1 + (w/c)^2}, \quad w(0) = 0.$$

¹Ogni riferimento a persone o teorie realmente esistenti è da ritenersi puramente casuale.

L'equazione si è un po' semplificato, ma è rimasto il problema della dipendenza da w a membro destro. Bene, dividiamo a destra e sinistra per $\sqrt{1 + (w/c)^2}$ e integriamo in $[0, t]$:

$$\frac{w'(t)}{\sqrt{1 + (w/c)^2}} = g \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \frac{w'(\tau)}{\sqrt{1 + (w(\tau)/c)^2}} d\tau = \int_0^t g d\tau = gt.$$

Nell'integrale che resta da risolvere, facciamo un cambio di variabile: $\sigma := w(\tau)/c$:

$$c \int_0^{w(t)/c} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2}} = gt.$$

L'impresa non sembra impossibile: basta trovare una primitiva di $1/\sqrt{1 + \sigma^2}$. Con il cambio di variabile $\sigma = \sinh s$, il problema è risolto

$$\int \frac{d\sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2}} d\sigma = \int \frac{\cosh s}{\sqrt{1 + \sinh^2 s}} ds = \int ds = s + C = \operatorname{settsinh} \sigma + C,$$

dove C è la costante di integrazione e $\operatorname{settsinh}$ è la funzione inversa di $\sinh$. Perciò

$$gt = c \int_0^{w(t)/c} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2}} d\sigma = c \operatorname{settsinh} \sigma \Big|_0^{w(t)/c} = c \operatorname{settsinh} \left(\frac{w(t)}{c} \right).$$

Dividendo per c , applicando $\sinh$ al primo e all'ultimo termine e poi moltiplicando per c , si ottiene l'espressione per w e di conseguenza quella per y'

$$w(t) = c \sinh \left(\frac{gt}{c} \right) \quad \Rightarrow \quad y'(t) = \frac{w(t)}{\sqrt{1 + (w(t)/c)^2}} = \frac{c \sinh(gt/c)}{\cosh(gt/c)} = c \tanh \left(\frac{gt}{c} \right).$$

Ottimo! Per trovare la funzione y non resta che integrare una seconda volta in $[0, t]$:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t y'(\tau) d\tau = c \int_0^t \tanh(g\tau/c) d\tau = \frac{c^2}{g} \ln(\cosh(g\tau/c)) \Big|_0^t = \frac{c^2}{g} \ln(\cosh(gt/c)).$$

Indichiamo con y_E la soluzione proposta da Alberto E.:

$$y_E(t) = \frac{c^2}{g} \ln(\cosh(gt/c)).$$

Teorie a confronto. Chi ha ragione: Alberto o Isacco? Un numero spropositato di persone si mette subito a lavoro. Cominciano a gettare di tutto da torri, balconi e balconcini e, cronometri alla mano, mettono alla prova le due teorie. Niente da fare, non si riesce a stabilire chi dei due abbia ragione. Per quale motivo?

Cerchiamo di capire che legame c'è tra le funzioni y_N e y_E . Le derivate prima e seconda di y_E sono

$$y'_E = c \tanh \left(\frac{gt}{c} \right), \quad y''_E = \frac{g}{\cosh^2(gt/c)},$$

quindi il polinomio di Taylor di grado 2 di y_E in $t = 0$ è

$$y_E(0) + y'_E(0)t + \frac{1}{2} y''_E(0)t^2 = \frac{1}{2} gt^2,$$

cioè proprio y_N . Inoltre, dato che

$$y_E''' = -\frac{2g^2}{c} \frac{\tanh(gt/c)}{\cosh^2(gt/c)},$$

si ha $y_E'''(0) = 0$ e quindi y_N è anche il polinomio di grado 3 della funzione y_E :

$$y_E(t) = y_N(t) + o(t^3) \quad t \rightarrow 0.$$

Ecco spiegata la somiglianza tra le due soluzioni proposte.

Per quantificare in modo preciso la differenza tra le due teorie, stimiamo il valore di $y_E - y_N$. Dato che y_N è un polinomio di Taylor di y_E possiamo scrivere la differenza tramite l'espressione del resto di Lagrange:

$$y_E(t) - y_N(t) = \frac{1}{4!} y_E^{(IV)}(\xi) t^4 \quad \xi \in [0, t].$$

Inoltre, dato che $\cosh s \geq 1$ e $|\tanh s| \leq 1$ per ogni $s \in \mathbb{R}$,

$$y_E^{(IV)}(x) = \frac{2g^3}{c^2} \left(\frac{2 \tanh^2(gt/c)}{\cosh^2(gt/c)} - \frac{1}{\cosh^4(gt/c)} \right) \Rightarrow |y_E^{(IV)}(x)| \leq \frac{6g^3}{c^2}.$$

Quindi ecco a portata di mano la stima richiesta

$$|y_E - y_N| \leq \frac{g^3 t^4}{4c^2} = \frac{g y_N^2}{c^2},$$

dove l'ultima uguaglianza segue da $y_N = gt^2/2$.

Qual'è l'ordine di grandezza dell'errore commesso passando da una soluzione all'altra? Se il masso viene lanciato da un'altezza paragonabile a quella dell'Everest, allora $y_N \approx 9 \times 10^3$ m, quindi (con $g \approx 10$ m/sec², $c^2 \approx 9 \times 10^{16}$ m²/sec²)

$$|y_E - y_N| \leq \frac{g y_N^2}{c^2} \approx \frac{10 \cdot 81 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{sec}^2}{9 \times 10^{16} \text{ m}^2/\text{sec}^2} = 9 \times 10^{-9} \text{ m},$$

l'errore è dell'ordine di grandezza di qualche milionesimo di millimetro! Se poi volete fare l'esperimento in casa vostra e quindi $y_N \approx 3$ m, $\frac{g y_N^2}{c^2} \approx 10^{-15}$ m che è dello stesso ordine di grandezza del nucleo di un atomo, quindi procuratevi un righello molto preciso...

ESERCIZIO 4.7. *Ragionando ancora sul problema, il signor Alberto propose una terza versione (ma nemmeno di questa, a dire il vero, fu soddisfatto):*

$$\left(\frac{m_0 y'}{\sqrt{1 - (y'/c)^2}} \right)' = m_0 g.$$

Qual'è la soluzione per il problema della caduta libera in questo caso?

Appendice B. Cenni alle derivate deboli

Partiamo da un esercizio sugli integrali di stile diverso rispetto a quelli visti sin qui.

ESERCIZIO 4.8. Verificare che

$$\int_{-1}^1 \phi(x) \operatorname{sgn} x \, dx = - \int_{-1}^1 \phi'(x) |x| \, dx \quad \forall \phi \in C^1([-1, 1]), \quad \phi(\pm 1) = 0.$$

Soluzione. Calcoliamo separatamente i due integrali. Dato che

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0, \end{cases}$$

il primo integrale è

$$\int_{-1}^1 \phi(x) \operatorname{sgn} x \, dx = \int_{-1}^0 \phi(x) \operatorname{sgn} x \, dx + \int_0^1 \phi(x) \operatorname{sgn} x \, dx = - \int_{-1}^0 \phi(x) \, dx + \int_0^1 \phi(x) \, dx.$$

Per il secondo integrale, usando l'additività e l'integrazione per parti,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \phi'(x) |x| \, dx &= - \int_{-1}^0 \phi'(x) x \, dx + \int_0^1 \phi'(x) x \, dx \\ &= -\phi(x) x \Big|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \phi(x) \, dx + \phi(x) x \Big|_0^1 - \int_0^1 \phi(x) \, dx. \end{aligned}$$

Dato che

$$\phi(x) x \Big|_{-1}^0 = \phi(0) \cdot 0 - \phi(-1)(-1) = 0, \quad \phi(x) x \Big|_0^1 = \phi(1) \cdot 1 - \phi(0) \cdot 0 = 0,$$

vale la conclusione. $\square$

L'esercizio precedente suggerisce che anche se la funzione $|x|$ non è derivabile in 0 è possibile scrivere la formula di integrazione per parti usando come derivata della funzione $|x|$ la funzione $\operatorname{sgn} x$. Questa idea è alla base della definizione di derivabilità in un senso più generale di quello che abbiamo visto fin ora.

DEFINIZIONE 4.9. Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ data. Una funzione $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è la **DERIVATA DEBOLE** (o **DISTRIBUZIONALE**) di f in $[a, b]$ se

$$\int_a^b \phi(x) g(x) \, dx = - \int_a^b \phi'(x) f(x) \, dx \quad \forall \phi \in C^1([a, b]), \quad \phi(a) = \phi(b) = 0.$$

In questo senso, l'esercizio precedente mostra che $\operatorname{sgn} x$ è la derivata debole di $|x|$ in $[-1, 1]$. Chiaramente se f ammette derivata (classica) in $[a, b]$, allora ammette anche derivata distribuzionale in $[a, b]$ e questa è proprio la funzione f' . Infatti, integrando per parti si ha

$$\int_a^b \phi(x) f'(x) \, dx = \phi(x) f(x) \Big|_a^b - \int_a^b \phi'(x) f(x) \, dx = - \int_a^b \phi'(x) f(x) \, dx,$$

dato che $\phi(a) = \phi(b) = 0$ implica $\phi(x) f(x) \Big|_a^b = 0$.

Grazie alla linearità dell'integrale, vale anche in questo contesto la

Linearità. Se f_1 e f_2 sono derivabili in senso debole, allora anche $\alpha f_1 + \beta f_2$ è derivabile in senso debole. Inoltre, se g_1 e g_2 indicano le derivate deboli di f_1 e f_2 , rispettivamente, e h la derivata debole di $\alpha f_1 + \beta f_2$, vale l'identità $h = \alpha g_1 + \beta g_2$.

Una differenza importante salta all'occhio... esistono funzioni discontinue che sono derivabili in senso debole. Ad esempio, se $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \neq 0, \\ 1 & x = 0 \end{cases},$$

allora, per ogni $\phi \in C^1([-1, 1])$ con $\phi(-1) = \phi(1) = 0$,

$$\int_{-1}^1 \phi'(x) f(x) dx = 0 = - \int_{-1}^1 \phi(x) \cdot 0 dx.$$

Quindi la derivata debole di f è la funzione $g \equiv 0$. Inoltre questo stesso esempio mostra che, a differenza di quanto visto per la derivata classica, ci sono funzioni con derivata debole nulla che non sono costanti.

ESERCIZIO 4.10. Sia $f \in C([a, b])$ derivabile in senso debole con derivata nulla. Dimostrare che f è costante.

Soluzione. Supponiamo per assurdo che f non sia costante, cioè esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $f(x_1) < f(x_2)$. Possiamo supporre $f(x_1) < 0 < f(x_2)$ (altrimenti basta ripetere l'argomentazione per $g(x) := f(x) - [f(x_2) + f(x_1)]/2$, che è continua e verifica $g(x_1) = [f(x_1) - f(x_2)]/2 < 0$, $g(x_2) = [f(x_2) - f(x_1)]/2 > 0$).

Per continuità, esistono due intervalli I_1 e I_2 , disgiunti, tali che $g(x) < 0$ in I_1 e $g(x) > 0$ in I_2 . Scegliamo allora una funzione $\phi \in C^1([a, b])$, $\phi(a) = \phi(b) = 0$ tale che $\phi' < 0$ in I_1 , $\phi' > 0$ in I_2 e $\phi' = 0$ altrimenti. Dato che la derivata debole di f è $g \equiv 0$,

$$0 = \int_a^b \phi(x) g(x) dx = - \int_a^b \phi'(x) f(x) dx = - \int_{I_1} \phi'(x) f(x) dx - \int_{I_2} \phi'(x) f(x) dx.$$

Ma, per come sono stati scelti I_1 , I_2 e ϕ , ciascuno dei due integrali dell'ultimo termine è strettamente positivo, assurdo! $\square$

OSSERVAZIONE 4.11. C'è un'altra differenza importante: la derivata debole così definita non è unica! Se g è una derivata debole della funzione f , allora anche una qualsiasi funzione h che coincida con g tranne in un numero finito di punti è derivata debole di f . Sapete convincervene da soli? Ricordate che modificando una funzione integranda in un numero finito di punti il valore dell'integrale non cambia...

Tabella degli integrali elementari

(C indica una costante arbitraria)

funzione f	primitiva $\int f \, dx$	funzione f	primitiva $\int f \, dx$
0	C	$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\cos x$	$\sin x + C$
e^x	$e^x + C$	$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos x + C$
$\sinh x$	$\cosh x + C$	$\cosh x$	$\sinh x + C$

Qualche altro integrale

(C indica una costante arbitraria)

funzione f	primitiva $\int f \, dx$	funzione f	primitiva $\int f \, dx$
$\ln x$	$x(\ln x - 1) + C$	$\arctan x$	$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$
$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$	$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$
$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$	$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

I numeri complessi

Fino ad adesso abbiamo studiato funzioni reali di variabile reale. Vari problemi matematici suggeriscono un'estensione dell'insieme dei numeri reali, particolarmente utile anche per molte applicazioni. Questa estensione dei numeri reali porta ad un nuovo concetto di numero: il *numero complesso*. Il passaggio dai numeri naturali $\mathbb{N}$ ai numeri interi $\mathbb{Z}$ nasce dall'esigenza di rendere sempre possibile la sottrazione; i razionali $\mathbb{Q}$ emergono quando si desidera poter definire sempre l'operazione di divisione. Il passaggio dai razionali $\mathbb{Q}$ ai numeri reali $\mathbb{R}$ è sostanzialmente collegato all'esigenza di “colmare i buchi dei razionali”, cioè di lavorare con un insieme che sia “continuo”. Analogamente, per fare in modo che tutto i polinomi di secondo grado abbiano almeno una radice, si introducono i numeri complessi.

1. Nascita dei numeri complessi e loro infanzia

Il problema di partenza è il seguente: *in $\mathbb{R}$ esistono polinomi di grado maggiore di 1 che non hanno radici (reali)*, ad esempio, $x^2 + 1$. Si potrebbe rimanere lì a guardare, risponderci che è un fatto della vita, e passare ad un altro problema. Così facendo però si perderebbe un capitolo estremamente affascinante, elegante ed utile della matematica. Per questo vale la pena industriarsi a trovare un modo per aggirare il problema. L'idea è di costruire un nuovo insieme che estenda l'insieme dei numeri reali e che contenga anche il “numero” i , *unità immaginaria*, soluzione dell'equazione $x^2 + 1 = 0$. Dedichiamoci alla costruzione di questo nuovo insieme, che indichiamo con il simbolo $\mathbb{C}$.

Certamente mettiamo in $\mathbb{C}$ i numeri reali e l'elemento i tale che $i^2 + 1 = 0$. Proseguiamo la preparazione di $\mathbb{C}$ facendo in modo che siano definite tutte le belle operazioni valide su $\mathbb{R}$: somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione (per numeri che non siano zero). Quindi, se $a, b \in \mathbb{R}$ anche $a + ib$ deve essere un elemento di $\mathbb{C}$.

DEFINIZIONE 1.1. *Si definisce INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI $\mathbb{C}$ l'insieme*

$$\mathbb{C} := \{z = a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

con la regola di calcolo seguente: i numeri complessi si sommano, sottraggono, moltiplicano, dividono tenendo conto della proprietà $i^2 = -1$.

La regola di calcolo di somma e moltiplicazione per numeri complessi va letta, in concreto, come segue: dati $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$, allora

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = ac + i(ad + bc) + i^2 bd = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Tutte le proprietà di somma e moltiplicazione (commutativa, associativa, distributiva) valgono anche in $\mathbb{C}$.

Piccolo glossario per i numeri complessi

$z = a + ib$: numero complesso

$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : b = 0\}$: numeri reali

$i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : a = 0\}$: immaginari puri

i : unità immaginaria

$\operatorname{Re} z = a$: parte reale di z

$\operatorname{Im} z = b$: parte immaginaria di z

L'insieme $\mathbb{C}$ può essere rappresentato geometricamente come un piano

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

La struttura di $\mathbb{C}$ è comunque più ricca di quella del piano dato che in $\mathbb{C}$ è *definita l'operazione di prodotto*.

In effetti, una maniera più precisa di definire l'insieme $\mathbb{C}$ è come insieme delle coppie (a, b) di numeri reali in cui siano definite le operazioni di somma e moltiplicazione come segue:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d) \quad (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

In definitiva, l'insieme dei numeri complessi è l'insieme $\mathbb{R}^2$ dotato della struttura di campo definita da $+$ e $\cdot$.

I numeri complessi si devono poter rappresentare sempre nella forma $a + ib$. Nel caso del rapporto di due numeri, può non essere evidente che questo sia possibile. Vediamo un esempio particolare. Supponiamo di voler scrivere nella forma $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ il numero complesso $z = \frac{1+i}{1-i}$. Moltiplicando e dividendo per $1+i$, e ragionando con le stesse regole algebriche note su $\mathbb{R}$ insieme alla relazione $i^2 = -1$, si ottiene

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = i.$$

In generale, per scrivere un rapporto di numeri complessi nella forma $a + ib$, procediamo alla stessa maniera. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $(c, d) \neq (0, 0)$, allora

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2+d^2}.$$

In particolare l'inverso del numero complesso $c + id$ si scrive come

$$\frac{1}{c+id} = \frac{1}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{c-id}{c^2+d^2} = \frac{c}{c^2+d^2} - i \frac{d}{c^2+d^2},$$

che mostra che *ogni numero complesso z diverso da 0 è invertibile, cioè esiste un numero z^{-1} tale che $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.*

Dato $c + id \in \mathbb{C}$, il numero complesso $c - id \in \mathbb{C}$, che si ottiene cambiando di segno la parte immaginaria ha un ruolo determinante in questa costruzione ed è detto COMPLESSO CONIUGATO. Il complesso coniugato di z si indica con $\bar{z}$.

ESERCIZIO 1.2. Verificare la validità di:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad \frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Rappresentazione polare. Un numero complesso $z = x + iy$ si può rappresentare come un punto P di coordinate (x, y) nel piano cartesiano. Un punto nel piano può essere individuato anche da coordinate di tipo diverso, ad esempio dalle coordinate polari (r, θ) :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

In questo caso $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ è la distanza del punto $P = (x, y)$ dall'origine O e θ misura

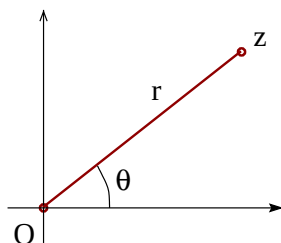


FIGURA 1. Rappresentazione polare di un numero complesso.

l'angolo tra il semiasse positivo x e il segmento di estremi 0 e z . Il numero complesso $z = x + iy$ si può, quindi, scrivere come

$$(1.1) \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

La quantità r è il MODULO di z ; l'angolo θ si dice ARGOMENTO di z e si indica con $\arg z$. Per via della periodicità delle funzioni $\sin$ e $\cos$, l'argomento non è individuato univocamente. Si parla di ARGOMENTO PRINCIPALE se $\theta \in [0, 2\pi)$ e si indica con $\text{Arg } z$ (Attenzione! c'è chi parla di "argomento principale" se $\theta \in (-\pi, \pi]$). Il complesso coniugato $\bar{z}$ di z corrisponde al numero complesso di stesso modulo di z e argomento $-\theta$.

Tramite la rappresentazione polare è facile calcolare il prodotto di numeri complessi:

$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos \theta + i \sin \theta) r'(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= rr'[(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')] \\ &= rr'[\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')] \end{aligned}$$

Questa formula permette di dare un'interpretazione geometrica del prodotto di due numeri complessi: il risultato è un numero complesso il cui modulo è pari al prodotto dei moduli e l'argomento è la somma degli argomenti. Ad esempio, che succede moltiplicando un generico numero complesso z per l'unità immaginaria i ? Dato che il modulo di i è 1 e il suo argomento è $\frac{\pi}{2}$, il numero iz si trova alla stessa distanza dall'origine di z e ha

argomento aumentato di $\frac{\pi}{2}$ rispetto a quello di z . In definitiva, il numero iz si ottiene ruotando il punto z in senso antiorario di un angolo retto.

Dalla formula per il prodotto, segue la formula per la potenza n -esima di z

$$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)].$$

Il modulo nei complessi. La distanza del punto (a, b) da $(0, 0)$ è, per definizione, il

$$\text{MODULO DI } z = a + ib : \quad |z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

Il modulo di un numero complesso è sempre un numero reale non negativo e gode delle stesse proprietà di cui gode il modulo reale:

- (i) $|z| \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ e $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$;
- (ii) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
- (iii) DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. La prima proprietà è evidente (basta osservare che una somma di quadrati è nulla se e solo se sono nulli entrambi gli addendi).

La seconda si verifica direttamente, se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, allora

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)| = \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2} \end{aligned}$$

$$|z_1| |z_2| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2}.$$

Resta da dimostrare la disuguaglianza triangolare. Per la definizione di modulo, la disuguaglianza triangolare si riscrive come

$$(1.2) \quad \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Elevando al quadrato

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \leq x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} + x_2^2 + y_2^2$$

Sviluppando i quadrati dei due binomi a sinistra e semplificando,

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$$

Se il termine a sinistra è negativo, la disuguaglianza è verificata; altrimenti, elevando di nuovo al quadrato,

$$x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 \leq (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2.$$

Semplificando si ottiene $2x_1 x_2 y_1 y_2 \leq x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2$, che si può riscrivere come

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = x_1^2 y_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 x_2^2 \geq 0,$$

che è sempre vera. ■

ESERCIZIO 1.3. Verificare che, per ogni $z \in \mathbb{C}$, valgono (nella seconda $z \neq 0$)

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad \text{e} \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Il fatto che in $\mathbb{C}$ sia definito il modulo (con le stesse proprietà note in $\mathbb{R}$) è di fondamentale importanza: con quest'oggetto è possibile estendere ai complessi tutto quello che si è visto nei reali a partire dalla nozione di distanza.

Nel piano complesso $\mathbb{C}$, la distanza tra due numeri complessi z e z' è data da $|z - z'|$, dove $|\cdot|$ rappresenta il modulo complesso.

Grazie alla presenza della distanza, è possibile introdurre in $\mathbb{C}$ il concetto di intorno.

DEFINIZIONE 1.4. Dato $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, l'INTORNO DI z_0 DI RAGGIO r (indicato con $I(z_0; r)$) è l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ che distano da z_0 meno di r :

$$I(z_0; r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Da qui limiti e tutto il resto...

Il Teorema fondamentale dell'algebra. Fin qui abbiamo scoperto che l'insieme $\mathbb{C}$ gode delle stesse proprietà di $\mathbb{R}$ per quanto riguarda le operazioni di somma e prodotto e anche per quanto riguarda la struttura metrica. Ma in $\mathbb{C}$, c'è qualcosa di più...

Ogni polinomio $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ a coefficienti complessi $a_i \in \mathbb{C}$ di grado $n \geq 1$ ammette almeno uno zero $z^ \in \mathbb{C}$, cioè esiste $z^* \in \mathbb{C}$ tale che $p(z^*) = 0$.*

Conseguenza di questo Teorema è che un polinomio di grado n in $\mathbb{C}$ ha esattamente n zeri (contati con la loro molteplicità). Ad esempio, il polinomio a coefficienti reali

$$p(z) = z^2 + 2bz + c \quad b, c \in \mathbb{R},$$

ammette in $\mathbb{C}$ sempre due zeri: se $b^2 > c$, gli zeri sono reali e sono $-b \pm \sqrt{b^2 - c}$, se $b^2 = c$ c'è un unico zero, $z = -b$, con molteplicità due, nel caso $b^2 < c$, gli zeri sono due numeri complessi coniugati, $-b \pm i\sqrt{c - b^2}$.

2. Successioni, serie e continuità nei complessi

Una volta definito l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$, si può ripetere buona parte della teoria sviluppata in $\mathbb{R}$: successioni, serie, limiti, continuità, derivabilità... Ripercorriamo ora, rapidamente, quello che abbiamo visto nel caso reale, vedendo come sia possibile definire gli stessi oggetti nel caso complesso. L'obiettivo è duplice: da una parte dare una prima presentazione (rapida e non approfondita) degli oggetti base dell'analisi complessa, dall'altra ripassare gli oggetti già visti nei reali, scoprendo come il punto chiave delle definizioni sia, sostanzialmente, la nozione di distanza.

Successioni complesse. Una funzione che associa ad ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ un valore $z_n \in \mathbb{C}$ è una **SUCCESSIONE COMPLESSA**. Una successione complessa z_n può essere pensata come una famiglia di valori ordinati in base al loro indice n : $z_0, z_1, z_2, \dots$

DEFINIZIONE 2.1. Una successione complessa z_n è **CONVERGENTE** a $\ell \in \mathbb{C}$ se

$$(2.1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad |z_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

Con una certa dose di fantasia, si scrive $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \ell$.

Una successione z_n è **INFINITESIMA** se converge a 0 per $n \rightarrow +\infty$.

Il modulo che compare in (2.1) è il modulo del numero complesso $z_n - \ell$, e l'essere infinitesima significa semplicemente che comunque si fissi un intorno dell'origine 0 (misurato dal valore di ε), tutti gli elementi della successione tranne al più un numero finito (controllato dall'indice N) si trovano nell'intorno fissato.

Dato che il modulo complesso di un numero reale coincide con l'usuale definizione di modulo di un numero reale, la Definizione 2.1 è, a tutti gli effetti, una estensione di quella già vista per le successioni reali.

OSSERVAZIONE 2.2. A guardar bene, la (2.1) dice che la successione di numeri reali non negativi $d_n := |z_n - \ell|$ tende a zero per $n \rightarrow +\infty$. Quindi una successione complessa z_n converge ad ℓ se e solo se la distanza di z_n da ℓ è infinitesima per $n \rightarrow +\infty$.

ESEMPIO 2.3. Un esempio interessante di successione complessa è

$$z_n = q^n \quad (q \in \mathbb{C}).$$

Dato che $|z_n| = |q^n| = |q|^n$, il comportamento della successione nel caso $|q| < 1$ è determinato da quello della successione reale $a_n = |q|^n$

$$|q| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

Cosa succede nel caso $|q| \geq 1$? Ad esempio, come si comportano le successioni complesse $z_n = (2i)^n$ e $w_n = i^n$ per $n \rightarrow \infty$?

Ad una successione complessa $z_n = x_n + iy_n$ sono associate in modo naturale le due successioni reali x_n e y_n della sua parte reale e immaginaria, rispettivamente. E' possibile dimostrare che

$$(2.2) \quad z_n = x_n + iy_n \quad \text{è convergente in } \mathbb{C} \quad \Longleftrightarrow \quad x_n, y_n \quad \text{sono convergenti in } \mathbb{R}.$$

Quindi trattare successioni complesse può essere visto come trattare contemporaneamente una coppia di successioni reali.

ESERCIZIO 2.4. (i) Dimostrare che, per ogni $z \in \mathbb{C}$, vale

$$\max\{|Re\, z|, |Im\, z|\} \leq |z| \leq |Re\, z| + |Im\, z|.$$

(ii) Utilizzare (i) per dimostrare l'equivalenza (2.2).

La differenza sostanziale tra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$ sta nel fatto che *in $\mathbb{C}$ non è definito un ordinamento*. Questo vuol dire che, per successioni complesse, non ha senso parlare di monotonia, né di divergenza a $+\infty$ e $-\infty$.

Serie complesse. Allo stesso modo, esistono le serie complesse $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$. La serie è CONVERGENTE se, in $\mathbb{C}$, esiste il limite della successione complessa $s_n := \sum_{k=0}^n z_k$ (successione delle somme parziali). Tale limite è detto SOMMA DELLA SERIE.

Come nel caso reale è possibile considerare la serie geometrica, definita dalla successione $z_n = q^n$ con $q \in \mathbb{C}$. La successione delle somme parziali è

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Quindi se $|q| < 1$, la serie converge e la sua somma è

$$(2.3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} \quad q \in \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad |q| < 1.$$

Anche per le serie complesse è possibile introdurre la definizione di convergenza assoluta.

DEFINIZIONE 2.5. *La serie complessa $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se la serie reale $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ è convergente.*

Dato che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ è una serie a termini reali, è possibile, almeno in alcuni casi, ricondurre la convergenza di una serie complessa a quella di una serie reale, tornando quindi in un ambito più familiare.

Inoltre, vale sempre l'implicazione

$$\text{convergenza assoluta} \quad \Rightarrow \quad \text{convergenza (semplice)}.$$

Infatti, se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ è convergente, allora lo sono anche le serie $\sum_{n=0}^{\infty} |\operatorname{Re} z_n|$ e $\sum_{n=0}^{\infty} |\operatorname{Im} z_n|$.

Dato che per serie reali la convergenza assoluta implica la convergenza semplice, la precedente affermazione implica che le serie reali di termini generici $\operatorname{Re} z_n$ e $\operatorname{Im} z_n$ sono semplicemente convergenti. Per concludere, basta osservare che

$$\operatorname{Re} s_n = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n z_k = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re} z_k \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} s_n = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^n z_k = \sum_{k=0}^n \operatorname{Im} z_k,$$

e ricordare (2.2)...

Per serie convergenti, vale anche la seguente versione (per serie) della disuguaglianza triangolare (la dimostrazione è ovviamente lasciata per esercizio)

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|.$$

ESEMPIO 2.6. Utilizziamo la convergenza assoluta per dimostrare la convergenza di una serie complessa fondamentale:

$$(2.4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Vi ricorda qualcosa? La convergenza di questa serie discende direttamente dalla convergenza della corrispondente serie nei reali. Infatti, studiamo la convergenza assoluta e consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}.$$

Questa serie è convergente (la sua somma è $e^{|z|}$), quindi la serie (2.4) è convergente assolutamente e, di conseguenza, semplicemente.

Funzioni complesse. Una funzione complessa di variabile complessa è:

$$f : I \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

dove I è il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ in cui è definita la funzione f .

Se, per $\zeta \in \mathbb{C}$, esiste $r > 0$ tale che l'intorno di ζ di raggio r , escluso il punto ζ stesso, è contenuto in I , allora si può dare senso alla nozione di limite di f per $z \rightarrow \zeta$ utilizzando la stessa definizione già data nel caso reale.

DEFINIZIONE 2.7. La funzione f TENDE AD $\ell \in \mathbb{C}$ PER $z \rightarrow \zeta \in I$, e si scrive $\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z) = \ell$, se

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad |f(z) - \ell| < \varepsilon \quad \forall z \in I, \quad 0 < |z - \zeta| < \delta.$$

Se (come faremo sempre nel seguito) si suppone che per ogni $\zeta \in I$ esista $r > 0$ tale che l'intorno di ζ di raggio r sia interamente contenuto in I , in altre parole, se si suppone che ogni punto $\zeta \in I$ sia INTERNO ad I ,¹ allora è possibile estendere la definizione di *continuità* al caso di funzioni complesse di variabile complessa.

DEFINIZIONE 2.8. La funzione f è CONTINUA IN $\zeta \in I$ se $\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z) = f(\zeta)$, cioè se

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che} \quad |f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon \quad \forall z \in I, \quad |z - \zeta| < \delta.$$

Né più né meno della definizione di continuità già vista nel caso reale, con l'unica accortezza che i moduli che compaiono qui sono moduli di numeri complessi.

Ad esempio, la funzione $f(z) = 2iz - 1$ è continua in ζ per ogni $\zeta \in \mathbb{C}$. Infatti

$$|f(z) - f(\zeta)| = |(2iz - 1) - (2i\zeta - 1)| = |2i||z - \zeta| = 2|z - \zeta|,$$

quindi $|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$ per tutti valori z per cui $|z - \zeta| < \delta = \varepsilon/2$.

¹Vi sfugge il senso di questa ipotesi aggiuntiva? Allora, in prima lettura, pensate ad una funzione f definita in tutto il piano complesso, cioè una funzione per cui $I = \mathbb{C}$.

ESEMPIO 2.9. Consideriamo un altro esempio: $f(z) = \bar{z}$, cioè la funzione che associa ad un numero complesso $z = x + iy$, il suo complesso coniugato $x - iy$. Fissato $\zeta = \xi + i\eta$, se $|z - \zeta| \equiv \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} < \delta$,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(\zeta)| &= |(x - iy) - (\xi - i\eta)| = |(x - \xi) - i(y - \eta)| \\ &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} < \delta. \end{aligned}$$

La condizione $|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$ è soddisfatta per $\delta = \varepsilon$.

Quali funzioni complesse sono continue? Ragioniamo come già fatto in $\mathbb{R}$. Somma, prodotto di funzioni continue sono funzioni continue. Quindi, dal fatto che le costanti e la funzione z sono funzioni continue, possiamo dedurre che tutti i polinomi in $\mathbb{C}$ sono funzioni continue! E le funzioni razionali? Anche qui vale la stessa conclusione del caso reale: il rapporto di funzioni continue definisce una funzione continua in tutti i punti in cui il denominatore non si azzera, quindi il rapporto di due polinomi definisce una funzione continua in tutti i punti in cui il polinomio a denominatore è non nullo.

Infine è possibile definire la derivata di funzioni complesse (qui è fondamentale la possibilità di dividere per un numero complesso).

DEFINIZIONE 2.10. Una funzione f è DERIVABILE IN $\zeta \in I$ (o OLOMORFA IN $\zeta \in I$) se esiste finito il limite

$$(2.5) \quad f'(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}.$$

Ad esempio, per calcolare la derivata della funzione $f(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$), basta riscrivere il rapporto incrementale nella forma

$$\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = \frac{z^n - \zeta^n}{z - \zeta} = z^{n-1} + z^{n-2}\zeta + \dots + \zeta^{n-1},$$

e passare al limite per $z \rightarrow \zeta$, ottenendo

$$(z^n)' = nz^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Anche in quest'ambito è vera l'implicazione:

$$\text{derivabilità} \quad \Rightarrow \quad \text{continuità}.$$

Perché? Basta ragionare come in $\mathbb{R}$:

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} [f(z) - f(\zeta)] = \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \cdot (z - \zeta) = f'(\zeta) \cdot 0 = 0$$

Nel caso reale, a partire dall'operazione di derivazione abbiamo dedotto informazioni relative alla monotonia delle funzioni. E' possibile fare lo stesso nel caso delle funzioni complesse? Assolutamente no! Dato che in $\mathbb{C}$ non è definito l'ordinamento, non ha senso parlare di funzioni crescenti/decrescenti. Analogamente concetti come massimo, minimo, convessità e concavità sono privi di senso per funzioni $f : I \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

3. L'esponenziale complesso

Una funzione particolarmente importante è la funzione esponenziale. Dato che la serie considerata nell'Esempio 2.6 è convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$, è più che ragionevole utilizzarla per definire la funzione esponenziale anche nei complessi:

$$(3.1) \quad e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Quindi abbiamo una definizione rigorosa dell'esponenziale complesso assolutamente gratis! Il lettore attento, noterà una finezza linguistica nella frase precedente...

La definizione (3.1) estende la corrispondente definizione data nei reali a suo tempo.

Come si può immaginare/sperare, anche per (3.1), vale la proprietà

$$(3.2) \quad e^{w+z} = e^w e^z \quad \forall w, z \in \mathbb{C}.$$

(ma non ne vediamo la dimostrazione che comporta l'uso dei prodotti di serie...).

La funzione esponenziale è continua? È derivabile? L'uno e l'altro. Dimostriamo prima di tutto la continuità in 0. Dato che $e^0 = 1$, bisogna stimare $|e^z - 1|$. Non resta che ricorrere alla definizione di esponenziale:

$$|e^z - 1| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right| \leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n+1)!} \leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z| e^{|z|},$$

quindi, dato che $e^{|z|} \leq e$ per $|z| \leq 1$,

$$|e^z - 1| \leq e |z| \quad \forall |z| \leq 1,$$

da cui si deduce la continuità in $\zeta = 0$. Se $\zeta \in \mathbb{C}$, allora

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} e^z = \lim_{z \rightarrow \zeta} e^{\zeta + (z - \zeta)} = e^{\zeta} \lim_{z \rightarrow \zeta} e^{z - \zeta} = e^{\zeta} \lim_{h \rightarrow 0} e^h = e^{\zeta}.$$

Anche per la derivabilità, consideriamo prima $\zeta = 0$. Grazie alla definizione (3.1),

$$\frac{e^z - 1}{z} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!},$$

quindi, per $|z| \leq 1$,

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| \leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n+2)!} \leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z| e^{|z|} \leq e |z|,$$

che mostra che la derivata di e^z in 0 è 1.

Per ζ qualsiasi,

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{e^z - e^{\zeta}}{z - \zeta} = \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{e^{\zeta + (z - \zeta)} - e^{\zeta}}{z - \zeta} = e^{\zeta} \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{e^{z - \zeta} - 1}{z - \zeta} = e^{\zeta} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{\zeta}.$$

Quindi

$$(e^z)' = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Fissato $\lambda \in \mathbb{C}$, consideriamo la funzione $f(z) = e^{\lambda z}$. Tramite la derivazione di funzione composta (si può usare!),

$$\frac{d(e^{\lambda z})}{dz} = e^{\lambda z} \frac{d(\lambda z)}{dz} = \lambda e^{\lambda z}.$$

Per derivare la funzione f , basta moltiplicare per λ la funzione stessa: in altri termini, $f(z) = e^{\lambda z}$ verifica l'equazione (differenziale) $f' = \lambda f$. Lo stesso è vero per le funzioni $A e^{\lambda z}$ con $A \in \mathbb{C}$.

Quale equazione è soddisfatta dalla derivata seconda di $f(z) = A e^{\lambda z}$? Facile:

$$f''(z) = \frac{d(A \lambda e^{\lambda z})}{dz} = A \lambda \frac{d(e^{\lambda z})}{dz} = A \lambda^2 e^{\lambda z} = \lambda^2 f,$$

quindi $f'' - \lambda^2 f = 0$.

Il fatto che le funzioni del tipo $A e^{\lambda z}$ soddisfino le semplicissime equazioni $f' - \lambda f = 0$ e $f'' - \lambda^2 f = 0$ fa di questa classe il mattone fondamentale per la costruzione delle soluzioni di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, come vedremo tra un paio di fogli.

Formula di Eulero. Prima di concludere, deduciamo una formula estremamente interessante. Se calcoliamo l'esponenziale e^z in $z = ix \in i\mathbb{R}$, otteniamo

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!}.$$

Dato che

$$i^0 = i^4 = \dots = 1, \quad i^1 = i^5 = \dots = i, \quad i^2 = i^6 = \dots = -1, \quad i^3 = i^7 = \dots = -i,$$

possiamo scrivere

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Dalle formule di Taylor per le funzioni $\cos x$ e $\sin x$, segue la FORMULA DI EULERO:

$$(3.3) \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chi è dunque l'esponenziale del numero complesso $z = x + iy$? Una sintesi opportuna di esponenziale reale e funzioni trigonometriche: applicando (3.3),

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

In particolare $\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$ e $\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$.

La formula di Eulero, interessante di per sé, è estremamente comoda per rappresentare i numeri complessi quando si usino le coordinate polari (ρ, θ) :

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$$

Le formule per il prodotto e le potenze diventano, facendo uso della rappresentazione esponenziale, conseguenze immediate di (3.2). Ad esempio,

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 e^{i\theta_1}) \cdot (\rho_2 e^{i\theta_2}) = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Da (3.3) si deduce, in particolare, che l'esponenziale complesso non è una funzione iniettiva e quindi nemmeno invertibile. La definizione della funzione logaritmo nei numeri complessi richiede quindi una particolare attenzione. Qui non approfondiremo la questione. Anzi, non la toccheremo proprio.

...infine, una formula da contemplare nelle giornate buie e non:

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Equazioni differenziali

Il problema più semplice che abbiamo affrontato e che rientra nella categoria delle equazioni differenziali è la determinazione di primitive

data $f(x)$ trovare tutte le funzioni $F(x)$ tali che $F'(x) = f(x)$.

In generale, un'equazione differenziale è un oggetto del tipo:

$$\mathcal{F}(x, y, y', y'', \dots) = 0,$$

cioè è una relazione che collega una funzione incognita y con la variabile indipendente x e con le derivate $y', y'', \dots$. Il caso della ricerca delle primitive corrisponde alla scelta $\mathcal{F} = y - F(x)$. Una funzione y , sufficientemente regolare, che verifica

$$\mathcal{F}(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots) = 0,$$

per ogni scelta della variabile x , è detta SOLUZIONE (o INTEGRALE) dell'equazione.

In quel che segue, ci limitiamo a considerare alcuni tipi specifici di equazioni differenziali: le equazioni lineari. Il significato, in quest'ambito, del vocabolo “lineare” sarà più chiaro tra qualche pagina. Per risultati generali per il caso nonlineare, il bravo lettore correrà in biblioteca alla caccia di un testo che lo illumini.

1. Equazioni lineari del I ordine a coefficiente costante

Equazioni omogenee. Il caso più semplice di equazione differenziale è

$$(1.1) \quad y' + ay = 0 \quad a \in \mathbb{R}.$$

L'equazione (1.1) è *del primo ordine, lineare, a coefficienti costanti, omogenea*:

- del *primo ordine* perché nell'equazione compare solo la derivata prima;
- *lineare* perché la dipendenza da y, y' è lineare (non ci sono termini del tipo y^2 o $(y')^3$ o, più in generale funzioni di y, y' che non siano polinomi di grado 1);
- a *coefficienti costanti* perché i coefficienti di y, y' non dipendono dalla variabile indipendente t ;
- *omogenea*, perché la funzione $y = 0$ è una soluzione dell'equazione.

OSSERVAZIONE 1.1. *Il termine “lineare”.* Supponiamo che y_1 e y_2 siano due soluzioni dell'equazione (1.1), cioè supponiamo

$$y_1' + ay_1 = 0, \quad y_2' + ay_2 = 0.$$

Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, consideriamo $w(t) := \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$, combinazione lineare di y_1 e y_2 . Allora:

$$w' + aw = \alpha y_1' + \beta y_2' + \alpha a y_1 + \beta a y_2 = \alpha(y_1' + a y_1) + \beta(y_2' + a y_2) = 0.$$

Quindi, dal fatto che l'equazione è lineare e omogenea discende la proprietà seguente: *ogni combinazione lineare di soluzioni di (1.1) è essa stessa una soluzione di (1.1)*.

Dell'equazione (1.1) abbiamo già una famiglia di soluzioni: Ae^{-at} . Ci sono altre soluzioni? No. Infatti, se y soddisfa (1.1) per ogni $t \in \mathbb{R}$, la funzione $w(t) := y(t)e^{at}$ è tale che:

$$w' = y'e^{at} + aye^{at} = (y' + ay)e^{at} = 0.$$

Dato che la derivata di w è identicamente nulla, w è costante, cioè $w(t) = A$ per qualche $A \in \mathbb{R}$. Quindi $y(t) = w(t)e^{-at} = Ae^{-at}$ è una delle soluzioni già note. Ricapitolando:

$$y'(t) + ay(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad y = Ae^{-at} \quad \text{per qualche } A \in \mathbb{R}.$$

Se la soluzione cercata deve soddisfare, oltre all'equazione differenziale (1.1), la condizione iniziale $y(t_0) = y_0$ per t_0, y_0 assegnati, si parla di PROBLEMA DI CAUCHY per (1.1):

$$(1.2) \quad \text{trovare } y = y(t) \text{ tale che} \quad \begin{cases} y' + ay = 0, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Determinare la soluzione è più che facile: dato che conosciamo tutte le soluzioni dell'equazione differenziale, basta determinare quali di queste verificano il vincolo imposto dalla *condizione iniziale* $y(t_0) = y_0$. Se $y(t) = Ae^{-at}$, sostituendo

$$y_0 = y(t_0) = Ae^{-at_0} \Rightarrow A = y(t_0)e^{at_0} = y_0e^{at_0},$$

quindi c'è un'unica soluzione per il problema di Cauchy (1.2) ed è $y(t) = y_0e^{-a(t-t_0)}$.

Equazioni non omogenee. Complichiamo leggermente la situazione e consideriamo

$$(1.3) \quad y' + ay = f(t) \quad a \in \mathbb{R}, \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

L'equazione (1.3) è *del primo ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogenea*. La presenza del termine noto $f = f(t)$ fa in modo che $y = 0$ non sia soluzione (a meno che $f \equiv 0$, ovviamente...). Per cercare le soluzioni di questa equazione utilizziamo il metodo di *variazione delle costanti*: cerchiamo soluzioni della forma $y(t) = A(t)e^{-at}$ dove $A = A(t)$ è una funzione da determinare. Dato che $y' = (A' - aA)e^{-at}$, sostituendo nell'equazione differenziale:

$$f = y' + ay = (A' - aA)e^{-at} + aAe^{-at} = A'e^{-at} \quad \Longleftrightarrow \quad A'(t) = f(t)e^{at}.$$

Se la funzione f è integrabile in ogni intervallo di $\mathbb{R}$, la funzione A è:

$$A(t) = \int_0^t f(s)e^{as} ds + C \quad C \in \mathbb{R}$$

e quindi anche la funzione y è determinata:

$$y(t) = A(t)e^{-at} = Ce^{-at} + \int_0^t f(s)e^{a(s-t)} ds \quad C \in \mathbb{R}.$$

La soluzione dell'equazione non omogenea è quindi della forma

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) \quad \text{dove} \quad \begin{cases} y_0(t) = Ce^{-at} & \text{soluzione generale di (1.1)} \\ \bar{y}(t) = \int_0^t f(s)e^{a(s-t)} ds & \text{soluzione particolare di (1.3).} \end{cases}$$

L'aver scelto in $\bar{y}$ come primo estremo di integrazione $s = 0$ è del tutto arbitrario, un qualsiasi altro numero fissato sarebbe andato altrettanto bene. Ad esempio, per trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$(1.4) \quad \text{trovare } y = y(t) \text{ tale che} \quad \begin{cases} y' + ay = f(t), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

è più comodo scegliere come primo estremo di integrazione t_0

$$y(t) = Ce^{-at} + \int_{t_0}^t f(s)e^{a(s-t)} ds \quad C \in \mathbb{R},$$

di modo che

$$y_0 = y(t_0) = Ce^{-at_0} + \int_{t_0}^{t_0} f(s)e^{a(s-t)} ds = Ce^{-at_0} \quad \Rightarrow \quad C = y_0 e^{at_0},$$

e la soluzione richiesta è

$$y(t) = y_0 e^{-a(t-t_0)} + \int_{t_0}^t f(s)e^{a(s-t)} ds.$$

Sistemi di equazioni. Il caso di un'unica funzione incognita è evidentemente il caso più semplice. Ma, se si studia un modello che abbia un minimo di struttura in più, rapidamente compaiono altre funzioni incognite. Inutile dire che, all'aumentare delle incognite, il problema si complica sempre più...

Vediamo una situazione facile: assegnate le costanti a, b, c , cerchiamo le soluzioni y_1, y_2 del sistema

$$\begin{cases} y_1' + ay_1 = 0, \\ y_2' + by_1 + cy_2 = 0. \end{cases}$$

La peculiarità di questo sistema è che la prima equazione $y_1' + ay_1 = 0$ è disaccoppiata dalla seconda, cioè è una equazione per la sola incognita y_1 (y_2 non compare). Qui si può risolvere la prima equazione e, successivamente, risolvere la seconda dopo aver inserito l'espressione esplicita per y_1 . Procediamo

$$y_1' + ay_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = Ae^{-at} \quad A \in \mathbb{R},$$

quindi l'equazione per y_2 diviene $y_2' + cy_2 = -Abe^{-at}$, cioè un'equazione non omogenea. Perciò, se $c \neq a$,

$$y_2(t) = Be^{-ct} - Ab \int_0^t e^{-as+c(s-t)} ds = Be^{-at} + \frac{Ab}{c-a} (e^{-at} - e^{-ct}) \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Invece, se $c = a$,

$$y_2(t) = Be^{-at} - Ab \int_0^t e^{-as} ds = (B - Abt) e^{-at} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Bisogna stare bene attenti alle costanti in gioco: a, b, c sono costanti fissate (dati del problema), invece A, B sono costanti arbitrarie (ogni scelta di A, B corrisponde ad una soluzione).

2. Equazioni lineari del II ordine a coefficienti costanti omogenee

Consideriamo una particella, cioè un punto in cui supponiamo concentrata la massa m , e supponiamo che si muova lungo una retta. La posizione della particella al tempo t è individuata da una funzione $y = y(t)$, che ne rappresenta la coordinata rispetto ad un sistema di riferimento fissato. La funzione $y'(t)$ è la *velocità* della particella, mentre $y''(t)$ ne è l'*accelerazione*.

In meccanica, il moto della particella è collegato al concetto di *forza*, descritta da una funzione F , che agisce sulla particella stessa. La *legge di Newton* afferma che: *la massa m moltiplicata per l'accelerazione è uguale alla forza risultante che agisce sulla particella*:

$$(2.1) \quad my'' = F.$$

Modellizzare l'azione di una certa forza F sulla particella corrisponde ad esprimere F in termini della posizione y , della velocità y' , dell'istante t . Di conseguenza, la legge di Newton prende la forma di una equazione differenziale

$$(2.2) \quad my'' = F(t, y, y').$$

Un modello per le vibrazioni elastiche. Consideriamo una particella che si sposti lungo l'asse y , su cui agisca una forza elastica F_e , diretta verso l'origine e proporzionale alla distanza dall'origine. In altre parole, supponiamo $F_e = -ky$ con $k > 0$ (k è il coefficiente di proporzionalità e misura la grandezza delle forze elastiche). La legge di Newton dice che il moto della particella è descritto dall'equazione

$$(2.3) \quad my'' = -ky \quad (\text{equazione dell'oscillatore armonico})$$

Se sulla particella agisce anche la forza d'attrito F_a , che supponiamo proporzionale alla velocità y' , ma diretta in senso contrario, cioè $F_a = -ry'$ con $r \geq 0$, otteniamo l'equazione

$$(2.4) \quad my'' = -ky - ry' \quad (\text{equazione dell'oscillatore con attrito}).$$

Questo è l'esempio tipo di equazione di cui vogliamo determinare le soluzioni. Il nostro approccio sarà comunque quello di “dimenticare” il problema fisico di partenza, e risolvere l'equazione da un punto di vista puramente matematico. A soluzioni ottenute sarà poi interessante tornare sul modello specifico e re-interpretare i risultati.

Consideriamo l'equazione differenziale *del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti, omogenea*:

$$(2.5) \quad y'' + 2by' + cy = 0 \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

L'equazione è:

- del *secondo ordine* perché compaiono derivate fino al secondo ordine;
- *lineare* perché la dipendenza da y , y' e y'' è lineare (cioè non ci sono termini del tipo y^2 o $(y')^3$ o, più in generale funzioni di y, y', y'' che non siano polinomi di grado 1);
- a *coefficienti costanti* perché i coefficienti di y , y' e y'' non dipendono dalla variabile indipendente t ;
- *omogenea*, perché non è presente il termine forzante $f(t)$, o, equivalentemente, perché la funzione $y = 0$ è una soluzione dell'equazione.

Un esempio di equazione di questo genere è $y'' + y = 0$. Per ogni $A, B \in \mathbb{R}$, la funzione $y = A \cos t + B \sin t$ ne è soluzione (verificatelo!). Questo fatto è generale: date y_1 e y_2 soluzioni di (2.5), *tutte le combinazioni lineari di y_1 e y_2 sono soluzioni della stessa equazione*.

DEFINIZIONE 2.1. *Due funzioni y_1 e y_2 sono LINEARMENTE DIPENDENTI se una è proporzionale all'altra, cioè se esistono due costanti α, β , non entrambe nulle, tali che $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = 0$ per ogni t . Si dicono LINEARMENTE INDIPENDENTI se non sono linearmente dipendenti.*

In pratica, per verificare che due funzioni y_1 e y_2 siano linearmente indipendenti, si impone la condizione

$$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = 0 \quad \forall t,$$

con α, β da determinare e si cerca di dedurre che deve essere $\alpha = \beta = 0$. Vediamo un esempio.

ESEMPIO 2.2. Ad esempio, $y_1 = \sin t$ e $y_2 = \cos t$ sono soluzioni linearmente indipendenti di $y'' = -y$. Infatti, se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sono tali che $\alpha \sin t + \beta \cos t = 0$ per ogni t ,

$$\begin{aligned} t = 0 & \Rightarrow \alpha \sin 0 + \beta \cos 0 = \beta = 0, \\ t = \frac{\pi}{2} & \Rightarrow \alpha \sin \frac{\pi}{2} + \beta \cos \frac{\pi}{2} = \alpha = 0. \end{aligned}$$

Quindi $\alpha = \beta = 0$.

TEOREMA 2.3. *Se y_1 e y_2 sono soluzioni linearmente indipendenti di (2.5), tutte le soluzioni di (2.5) sono della forma*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Quindi per conoscere tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare (2.5) basta individuare una coppia di soluzioni linearmente indipendenti. Tutte le altre soluzioni si ottengono per combinazione lineare. Ad esempio, dato che $\sin t$ e $\cos t$ sono linearmente indipendenti, tutte le soluzioni di $y'' + y = 0$ sono del tipo $A \sin t + B \cos t$ con $A, B \in \mathbb{R}$.

Costruzione delle soluzioni linearmente indipendenti. L'obiettivo ora è determinare una coppia di soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (2.5). A questo scopo procediamo in una maniera che può sembrare strana, ma molto efficace:

- consideriamo la stessa equazione differenziale per funzioni a valori complessi, cioè cerchiamo $z = z(t) \in \mathbb{C}$ tali che $z'' + 2bz' + cz = 0$;
- determiniamo due soluzioni complesse z_1 e z_2 opportune;
- scegliamo $y_1 = \operatorname{Re} z_1$ e $y_2 = \operatorname{Re} z_2$.

Il vantaggio di questa strategia è che (sostanzialmente grazie al teorema fondamentale dell'algebra) è più facile trovare soluzioni a valori complessi e poi prenderne la parte reale, piuttosto che cercare direttamente soluzioni reali.

Consideriamo quindi l'equazione

$$(2.6) \quad z'' + 2bz' + cz = 0 \quad b, c \in \mathbb{R},$$

dove $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e cerchiamo una soluzione della forma $z = e^{\lambda t}$ dove $\lambda \in \mathbb{C}$ è da determinare. Dato che $z' = \lambda e^{\lambda t}$ e $z'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$, λ deve essere tale che

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dato che $e^{\lambda t} \neq 0$, λ deve essere soluzione dell'equazione di secondo grado complessa

$$(2.7) \quad \text{POLINOMIO CARATTERISTICO:} \quad \lambda^2 + 2b\lambda + c = 0.$$

Studiamo separatamente tre casi a seconda del tipo di radici del polinomio caratteristico.

CASO I. $b^2 > c$. Il polinomio caratteristico (2.7) ha due radici reali

$$\lambda_1 = -b + \sqrt{b^2 - c}, \quad \lambda_2 = -b - \sqrt{b^2 - c}.$$

Otteniamo in corrispondenza due soluzioni

$$z_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad z_2(t) = e^{\lambda_2 t}.$$

Prendendo la parte reale otteniamo le soluzioni y_1 e y_2 cercate, ma... z_1 e z_2 sono funzioni a valori reali! Quindi in realtà y_1 e y_2 coincidono con z_1 e z_2 , rispettivamente:

$$y_1(t) = \operatorname{Re} z_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad y_2(t) = \operatorname{Re} z_2(t) = e^{\lambda_2 t}.$$

Per verificare che y_1, y_2 sono indipendenti, supponiamo che esistano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} = 0.$$

Derivando

$$\alpha \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \beta \lambda_2 e^{\lambda_2 t} = 0.$$

Calcolando entrambe le equazioni per $t = 0$ si ottiene un sistema lineare omogeneo per le incognite α, β

$$\alpha + \beta = 0, \quad \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 0.$$

Dato che il determinante di questo sistema è $\lambda_2 - \lambda_1 = 2\sqrt{b - c^2} > 0$, l'unica soluzione è $\alpha = \beta = 0$.

In conclusione, nel caso $b^2 > c$, tutte le soluzioni di (2.5) sono della forma

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

ESERCIZIO 2.4. *Determinare le soluzioni dell'equazione $y'' - 3y' + 2y = 0$.*

Soluzione. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ e le sue soluzioni sono

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{9 - 8}}{2} = 2 \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{9 - 8}}{2} = 1.$$

quindi tutte le soluzioni sono della forma $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

CASO II. $b^2 = c$. In questo caso il polinomio caratteristico è il quadrato di un binomio

$$\lambda^2 + 2b\lambda + b^2 = (\lambda + b)^2,$$

ed ha un'unica soluzione $\lambda = -b$. In corrispondenza troviamo un'unica soluzione $z_1(t) = e^{-bt}$ dell'equazione differenziale. Per determinare una seconda soluzione (indipendente da z_1), consideriamo $z_2(t) = te^{-bt}$. Dato che

$$z_2'(t) = (1 - bt)e^{-bt} \quad z_2''(t) = (-2b + b^2 t)e^{-bt},$$

si ha

$$z_2''(t) + 2bz_2'(t) + b^2 z_2(t) = [(-2b + b^2 t) + 2b(1 - bt) + b^2 t]e^{-bt} = 0.$$

Quindi anche z_2 è soluzione dell'equazione.

La scelta di z_2 è suggerita da un procedimento di limite, immaginando il caso di due radici coincidenti come limite di un caso con due radici distinte. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, l'espressione $\frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}$, è soluzione di (2.6). Per $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ otteniamo

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 t - \lambda_1 t} \cdot t = te^{\lambda_1 t}.$$

Come nel caso precedente, le due soluzioni complesse $z_1(t) = e^{-bt}$ e $z_2(t) = te^{-bt}$ sono a valori reali. Inoltre si tratta di soluzioni indipendenti. Infatti, siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha e^{-bt} + \beta te^{-bt} = 0$, per ogni t . Dividendo per e^{-bt} , si deduce $\alpha + \beta t = 0$, cioè $\alpha = \beta = 0$.

In conclusione, tutte le soluzioni di (2.5) nel caso $b^2 = c$, sono del tipo

$$y(t) = c_1 e^{-bt} + c_2 t e^{-bt} = (c_1 + c_2 t) e^{-bt} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 2.5. *Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $y'' + 4y' + 4y = 0$.*

Soluzione. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$, quindi tutte le soluzioni sono combinazione lineare di e^{-2t} e di te^{-2t} :

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}.$$

CASO III. $b^2 < c$. Qui, finalmente!, è necessario l'uso dei complessi. Se $b^2 < c$, il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 2b\lambda + c$ ha due radici complesse coniugate

$$\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -b + i\sqrt{c - b^2} \\ \lambda_2 = -b - i\sqrt{c - b^2} \end{cases}$$

Nel seguito, indichiamo con $\nu = \sqrt{c - b^2} > 0$. L'equazione differenziale complessa (2.6) ha due soluzioni indipendenti date da

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{\lambda_1 t} = e^{-bt} \left\{ \cos(\nu t) + i \sin(\nu t) \right\}, \\ z_2(t) &= e^{\lambda_2 t} = e^{-bt} \left\{ \cos(\nu t) - i \sin(\nu t) \right\} \end{aligned}$$

La parte reale di queste due (distinte) soluzioni è però la stessa: $e^{-bt} \cos(\nu t)$. Occorre quindi sostituire la soluzione z_2 con un'altra soluzione $\tilde{z}_2$ diversa. Dato che $e^{\lambda_1 t}$ è soluzione di (2.6), anche tutte le funzioni della forma $Ae^{\lambda_1 t}$ sono soluzioni della stessa equazione per ogni scelta di $A \in \mathbb{C}$. Scegliamo $A = -i$, ossia poniamo $\tilde{z}_2(t) = -i e^{\lambda_1 t} = -i z_1(t)$, e scegliamo come soluzioni dell'equazione (2.6) le funzioni

$$z_1(t) = e^{-bt} \left\{ \cos(\nu t) + i \sin(\nu t) \right\}, \quad \tilde{z}_2(t) = e^{-bt} \left\{ \sin(\nu t) - i \cos(\nu t) \right\}.$$

Le soluzioni linearmente indipendenti di (2.5) sono date dalle parti reali di z_1 e $\tilde{z}_2$:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \operatorname{Re} z_1(t) = e^{-bt} \cos(\nu t), \\ y_2(t) &= \operatorname{Re} \tilde{z}_2(t) = e^{-bt} \sin(\nu t). \end{aligned}$$

Quindi, nel caso $b^2 < c$, tutte le soluzioni di (2.5) sono della forma

$$y(t) = e^{-bt} \left(c_1 \cos(\nu t) + c_2 \sin(\nu t) \right) \quad \nu := \sqrt{c - b^2}.$$

Dato che $-b = \operatorname{Re} \lambda_1$ e $\nu = \operatorname{Im} \lambda_1$, se preferite la le soluzioni si possono scrivere così:

$$y(t) = e^{(\operatorname{Re} \lambda) t} \left(c_1 \cos[(\operatorname{Im} \lambda) t] + c_2 \sin[(\operatorname{Im} \lambda) t] \right) \quad \text{con } \lambda \text{ tale che } \lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$$

ESERCIZIO 2.6. Dimostrare che, se $\nu \neq 0$, le funzioni $e^{-bt} \cos(\nu t)$ e $e^{-bt} \sin(\nu t)$ sono linearmente indipendenti.

ESERCIZIO 2.7. Determinare tutte le soluzioni di $y'' + y' + y = 0$.

Soluzione. Il polinomio $\lambda^2 + \lambda + 1$ ha due radici complesse coniugate

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Quindi, la soluzione generale dell'equazione è data da

$$y(t) = e^{-t/2} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right).$$

Interpretazione della soluzione. Analizziamo le soluzioni nel caso $b, c \geq 0$. Nel modello di oscillatore con attrito, b e c sono positivi dato che rappresentano

$$b = \frac{r}{2m} \quad c = \frac{k}{m},$$

dove m è la massa, r misura l'attrito e k misura la forza elastica.

Nei Casi I e II, in cui $b^2 \geq c$, ossia $r^2 \geq 4km$ la soluzione è data o dalla sovrapposizione di due funzioni esponenziali

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -b + \sqrt{b^2 - c} < 0, \\ \lambda_2 = -b - \sqrt{b^2 - c} < 0. \end{cases}$$

oppure dal prodotto di una funzione lineare con un'esponenziale

$$y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-bt}.$$

In entrambi i casi, la soluzione tende asintoticamente a zero per $t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.$$

Fisicamente questo corrisponde al fatto che l'effetto di attrito è talmente forte da impedire alla forza elastica di generare un moto oscillatorio.

Al contrario, nel Caso III, $b^2 < c$, cioè per $r^2 < 4km$, le soluzioni sono

$$y(t) = e^{-bt} (c_1 \cos(\nu t) + c_2 \sin(\nu t)) \quad \nu = \sqrt{c - b^2}.$$

Se $b > 0$ (presenza di attrito), le soluzioni sono il prodotto di un termine oscillatorio e di un termine esponenziale che regola l'ampiezza delle oscillazioni e che tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$. In questo caso si parla di *oscillazioni armoniche smorzate*. Il valore $\nu = \sqrt{c - b^2}$ è la *frequenza* delle oscillazioni.

Nel caso in cui $b = 0$ (assenza di attrito), le soluzioni sono date da una combinazione lineare di $\sin(ct)$ e $\cos(ct)$, e quindi danno luogo a oscillazioni periodiche *non smorzate*.

Problema di Cauchy. Per individuare un'unica soluzione occorre fissare le *costanti di integrazione* c_1 e c_2 . Questo fatto è sensato rispetto al problema fisico: l'evoluzione del moto dipende dalle *condizioni iniziali*, cioè da posizione e velocità ad un istante t_0 . Il PROBLEMA DI CAUCHY per l'equazione (2.5) è il problema di determinare la soluzione di

$$(2.8) \quad \begin{cases} y'' + 2by' + cy = 0, \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

dove $t_0, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ sono costanti assegnate. Il problema è quindi di trovare, tra tutte le soluzioni dell'equazione $y'' + 2by' + cy = 0$, l'unica che soddisfi le condizioni iniziali $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_1$.

ESERCIZIO 2.8. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' + y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Soluzione. Dato che le soluzioni di $y'' + y = 0$ sono tutte e sole combinazioni lineari di $\sin t$ e $\cos t$, consideriamo una generica soluzione e imponiamo che soddisfi le condizioni iniziali. In questo modo otteniamo un sistema lineare per le costanti c_1, c_2 :

$$y(x) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$

implica

$$\begin{cases} 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 = 1 \\ 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 = 1. \end{cases}$$

Quindi $c_1 = c_2 = 1$ e l'unica soluzione del problema è $y(t) = \cos t + \sin t$. $\square$

In generale, se si sono determinate due soluzioni linearmente indipendenti y_1 e y_2 di (2.5), è sempre possibile risolvere il problema di Cauchy imponendo le condizioni iniziali date in (2.8): sia

$$y(x) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1,$$

allora

$$\begin{cases} y_1(0) c_1 + y_2(0) c_2 = y_0 \\ y_1'(0) c_1 + y_2'(0) c_2 = y_1. \end{cases}$$

Il fatto che le soluzioni siano linearmente indipendenti garantisce che il determinante del sistema sia sempre non nullo e che il sistema ammetta un'unica soluzione.

ESERCIZIO 2.9. Determinare le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2, \end{cases} \quad \begin{cases} y'' + y' - 6y = 0 \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 3, \end{cases}$$

Soluzione. Risolviamo il primo dei due problemi. Il polinomio caratteristico della prima equazione è $\lambda^2 - \lambda - 2$ che ha come radici $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$, e, perciò, la soluzione generale dell'equazione è $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$. Per determinare la soluzione del problema di Cauchy, imponiamo le condizioni iniziali. Dato che $y'(t) = 2c_1 e^t - c_2 e^{-t}$, il sistema per c_1 e c_2 è

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ 2c_1 - c_2 = -2 \end{cases} \implies c_1 = -\frac{1}{3}, \quad c_2 = \frac{4}{3}.$$

Quindi la soluzione cercata è $y(t) = -e^{2t}/3 + 4e^{-t}/3$. $\square$

3. Equazioni lineari del II ordine a coefficienti costanti non omogenee

Torniamo all'esempio dell'oscillatore con attrito. Se supponiamo che sulla particella agisca anche una forza esterna f che sia funzione solo del tempo, cioè $f = f(t)$, l'equazione del moto diviene $my'' + ry' + ky = f(t)$. Nel caso in cui la funzione f sia nulla, si parla di *moto libero*, se invece $f \neq 0$, si parla di *moto forzato*.

Prendiamo il toro per le corna e consideriamo l'equazione

$$(3.1) \quad y'' + 2by' + cy = f(t) \quad b, c \in \mathbb{R},$$

dove f è una funzione assegnata. L'equazione differenziale (3.1) è del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti, *non omogenea*.

Se w e v sono due soluzioni, allora la funzione differenza $u := w - v$ soddisfa l'equazione omogenea (2.5), come si può verificare con una semplice sostituzione. Viceversa, se u è una soluzione dell'equazione omogenea (2.5) e v dell'equazione non omogenea (3.1), la somma $w := u + v$ è soluzione dell'equazione (3.1). Quindi *la soluzione generale dell'equazione non omogenea (3.1) è*

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) \quad \text{dove} \quad \begin{cases} y_0 & \text{soluzione generale di (2.5)} \\ \bar{y} & \text{soluzione particolare di (3.1).} \end{cases}$$

Dato che abbiamo già una strategia generale per trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea (2.5), per risolvere il problema nel caso non omogeneo, basta trovare una *singola* soluzione di (3.1).

Principio di sovrapposizione. Supponiamo di decomporre la funzione f come somma di due funzioni f_1 e f_2 , cioè supponiamo che sia

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

Se y_1 è una soluzione di $y'' + 2by' + cy = f_1(t)$ e y_2 è una soluzione di $y'' + 2by' + cy = f_2(t)$, allora la funzione somma $y(t) := y_1(t) + y_2(t)$ è soluzione di (3.1). Questo fatto è noto come PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE. Sostanzialmente significa che se abbiamo una forza “complicata” che, però, può essere decomposta come somma di singole parti “elementari”, possiamo ottenere l'evoluzione del fenomeno completo sommando le evoluzioni relative ad ogni singola parte. In termini matematici possiamo dire che la soluzione generale di

$$y'' + 2by' + cy = f_1(t) + \cdots + f_n(t)$$

è data da

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}_1(t) + \cdots + \bar{y}_n(t)$$

dove

$$y_0 \quad \text{soluzione generale di} \quad y'' + 2by' + cy = 0$$

$$\bar{y}_i \quad \text{soluzione particolare di} \quad y'' + 2by' + cy = f_i(t).$$

L'obiettivo è quindi quello di determinare una soluzione particolare di (3.1) nel caso di f particolarmente semplici e poi determinare la soluzione particolare per funzioni più complicate che si decompongano come somma di funzioni “semplici”.

Forzanti periodiche. $f(t) = Ce^{i\omega t}$ Il caso più importante è quello di forzante periodica, cioè del tipo

$$C \cos(\omega t) \quad \text{o} \quad C \sin(\omega t) \quad (C, \omega \in \mathbb{R}).$$

Invece di lavorare con queste funzioni trigonometriche, è estremamente più semplice ed elegante lavorare nell'ambito complesso. Poniamo $f(t) = Ce^{i\omega t}$ e studiamo

$$(3.2) \quad z'' + 2bz' + cz = Ce^{i\omega t} \quad C, \omega \in \mathbb{R},$$

in cui l'incognita è la funzione $z = z(t)$ a valori in $\mathbb{C}$. Prima di risolvere questa equazione, poniamoci il problema del “ritorno”: *una volta trovata una soluzione z a valori complessi, come determiniamo la soluzione reale y che cerchiamo?* Indichiamo la funzione z , soluzione di (3.2), nella forma

$$z(t) = y_1(t) + iy_2(t),$$

dove $y_1 = \operatorname{Re} z$ e $y_2 = \operatorname{Im} z$. Inserendo in (3.2), abbiamo

$$y_1'' + 2by_1' + cy_1 + i(y_2'' + 2by_2' + cy_2) = C \cos(\omega t) + iC \sin(\omega t).$$

Quindi, uguagliando la parte reale e la parte immaginaria,

$$y_1'' + 2by_1' + cy_1 = C \cos(\omega t)$$

$$y_2'' + 2by_2' + cy_2 = C \sin(\omega t),$$

cioè y_1 , parte reale di z , verifica l'equazione con termine forzante $C \cos(\omega t)$ e y_2 , parte immaginaria di z , con termine forzante $C \sin(\omega t)$. A seconda della funzione f che stiamo considerando, sceglieremo la parte reale o la parte immaginaria della soluzione complessa.

Con la tranquillità di poter tornare nell'ambito reale, riprendiamo lo studio dell'equazione (3.2) con l'obiettivo di trovarne una soluzione particolare. È sensato immaginare che esista una soluzione con la stessa frequenza di oscillazione di f :

$$z(t) = \sigma e^{i\omega t} \quad \sigma \in \mathbb{C}.$$

Il numero complesso σ è da determinare imponendo la condizione che z sia soluzione dell'equazione cercata.

ESEMPIO 3.1. Partiamo da un problema specifico: trovare una soluzione di

$$y'' - y = \cos t.$$

Dato che $\cos t = \operatorname{Re} e^{it}$, cerchiamo $\sigma \in \mathbb{C}$ tale che $z(t) = \sigma e^{it}$ sia soluzione di $z'' - z = e^{it}$. Dato che $z'' = -\sigma e^{it}$, sostituendo, otteniamo $(-\sigma - \sigma)e^{it} = e^{it}$ da cui $\sigma = -\frac{1}{2}$. Quindi la soluzione complessa z è $-\frac{1}{2}e^{it}$. La soluzione particolare $\bar{y}$ dell'equazione richiesta è data dalla parte reale di z , cioè

$$\bar{y}(t) = \operatorname{Re} z(t) = -\frac{1}{2} \cos t.$$

Nel caso generale, dato che $z'(t) = i\omega\sigma e^{i\omega t}$ e $z''(t) = -\omega^2\sigma e^{i\omega t}$, sostituendo ed eliminando il termine $e^{i\omega t}$, otteniamo

$$-\omega^2\sigma + 2bi\omega\sigma + c\sigma = C \quad \Rightarrow \quad (-\omega^2 + 2bi\omega + c)\sigma = C.$$

Quindi, se $c - \omega^2 + 2bi\omega \neq 0$,

$$\sigma = \frac{C}{c - \omega^2 + 2bi\omega} = C \frac{c - \omega^2 - 2bi\omega}{(c - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}.$$

Questo valore di σ può essere riscritto nella forma esponenziale

$$\sigma = C\alpha e^{-i\omega\delta} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \alpha = |\sigma| = \frac{1}{\sqrt{(c - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \\ \cos(\omega\delta) = (c - \omega^2)\alpha, \quad \sin(\omega\delta) = -2b\omega\alpha \end{cases}$$

La soluzione complessa z è quindi

$$z(t) = C\alpha e^{i\omega(t-\delta)}.$$

di cui scegliere la parte reale o la parte immaginaria a seconda della funzione f data.

ESERCIZIO 3.2. *Determinare una soluzione particolare di $y'' + 2y' + 2y = 2\sin(2t)$.*

Soluzione. Sostituendo $z(t) = \sigma e^{2it}$ in $z'' + 2z' + 2z = 2e^{2it}$, segue $-4\sigma + 4i\sigma + 2\sigma = 2$ da cui $\sigma = \frac{1}{2i-1} = -\frac{1+2i}{5}$. Quindi

$$z(t) = -\frac{1+2i}{5} [\cos(2t) + i\sin(2t)]$$

La soluzione particolare è data dalla parte immaginaria di z

$$y(t) = \text{Im } z(t) = -\frac{1}{5} [2\cos(2t) + \sin(2t)].$$

Attenzione! Il metodo appena esposto funziona se $c - \omega^2 + 2bi\omega \neq 0$. Rimane quindi da capire il caso in cui

$$c = \omega^2, \quad b\omega = 0.$$

Per cominciare, supponiamo $\omega \neq 0$. La seconda condizione implica $b = 0$ e quindi

$$z'' + cz = Ce^{i\omega t} \quad C, \omega \in \mathbb{R}.$$

Cercando soluzioni $z(t) = \sigma e^{i\omega t}$ con $\sigma \in \mathbb{C}$, otteniamo l'equazione $(c - \omega^2)\sigma = C$. Se $\omega^2 = c$ la relazione precedente dice che non esiste nessuna soluzione della forma $z(t) = \sigma e^{i\omega t}$! Non ci perdiamo d'animo e, in analogia con quanto visto per le equazioni omogenee, cerchiamo una soluzione della forma

$$z(t) = \sigma t e^{i\omega t} \quad \sigma \in \mathbb{C}.$$

Dato che $z'(t) = \sigma(1 + i\omega t)e^{i\omega t}$ e $z''(t) = \sigma(2i\omega - \omega^2 t)e^{i\omega t}$, sostituendo e semplificando il termine $e^{i\omega t}$,

$$2\sigma i\omega = C \quad \implies \quad \sigma = \frac{C}{2i\omega} = -C \frac{i}{2\omega}$$

avendo tenuto conto di $\omega^2 = c$.

ESERCIZIO 3.3. *Determinare una soluzione particolare di $y'' + y = \sin t$.*

Soluzione. Studiamo l'equazione complessa $z'' + z = e^{it}$ e cerchiamone soluzioni della forma $z(t) = \sigma t e^{it}$. Sostituendo nell'equazione $z'(t) = \sigma(1 + it)e^{it}$ e $z''(t) = \sigma(2i - t)e^{it}$,

$$\sigma(2i - t)e^{it} + \sigma t e^{it} = e^{it} \Rightarrow 2\sigma i = 1.$$

Quindi la soluzione complessa è

$$z(t) = -\frac{it}{2}e^{it} = -\frac{it}{2}(\cos t + i \sin t) = \frac{t}{2} \sin t - i \frac{t}{2} \cos t.$$

La soluzione desiderata è la parte immaginaria di z : $y(t) = \operatorname{Im} z(t) = -\frac{1}{2} t \cos t$. $\square$

Resta escluso un solo caso: quello in cui $c - \omega^2 + 2bi\omega = 0$ e $\omega = 0$. Allora $c = 0$ e l'equazione diventa $y'' + 2by' = C$. Ecco le soluzioni cercate in questi casi

$$b \neq 0 : \quad \bar{y} = \frac{Ct}{2b} \quad \text{e} \quad b = 0 : \quad \bar{y} = \frac{Ct^2}{2}.$$

Verificate!

Risonanza. Se $c - \omega^2 + 2bi\omega \neq 0$, una soluzione particolare dell'equazione complessa è

$$z(t) = C\alpha e^{i\omega(t-\delta)} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \alpha = |\sigma| = \frac{1}{\sqrt{(c - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \\ \cos(\omega\delta) = (c - \omega^2)\alpha, \quad \sin(\omega\delta) = -2b\omega\alpha \end{cases}$$

Il fattore α corrisponde ad un fattore di “distorsione” e il fattore $\omega\delta$ ad un fattore di “spostamento di fase” rispetto al segnale esterno originale $Ce^{i\omega t}$.

Il fattore α descrive quanto il “segnale esterno” $Ce^{i\omega t}$ viene amplificato dal sistema. Immaginiamo b, c fissati, e supponiamo di far variare la frequenza ω del segnale. Il grafico di

$$(3.3) \quad \phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(c - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}$$

è detto *curva di risonanza*.

Nel caso $b, c \neq 0$, ϕ è definita dappertutto, pari e tende a zero per $\omega \rightarrow \pm\infty$ con ordine 2:

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \frac{1/\sqrt{(c - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}{1/\omega^2} = \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \left[\left(1 - \frac{c}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4b^2}{\omega^2} \right]^{-1/2} = 1.$$

La derivata prima di ϕ è

$$\phi'(\omega) = -\frac{4\omega[\omega^2 - (c - 2b^2)]}{[(c - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2]^{3/2}}.$$

– Se $2b^2 \geq c$, la funzione ha un andamento particolarmente semplice: decresce per $\omega > 0$ e cresce per $\omega < 0$, il suo valore massimo è assunto in $\omega = 0$

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} \phi(\omega) = \phi(0) = \frac{1}{|c|}.$$

– Se $2b^2 < c$, la funzione ha due punti di massimo simmetrici nei valori

$$\omega = \pm\sqrt{c - 2b^2},$$

il massimo della funzione è dato da

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} \phi(\omega) = \phi(\pm\sqrt{c - 2b^2}) = \frac{1}{2|b|\sqrt{c - b^2}}.$$

Il fatto significativo è che questo valore massimo tende a $+\infty$ per $b \rightarrow 0$, cioè se l'effetto dell'attrito è piccolo, per una scelta di ω particolare (vicino a $\sqrt{c - b^2}$), il sistema determinato

dall'equazione differenziale risponde al segnale esterno $e^{i\omega t}$ con una distorsione estremamente grande. Questo fenomeno è detto *fenomeno della risonanza* e appare in natura in moltissime situazioni differenti.

4. Equazioni lineari a coefficienti variabili

Equazioni del I ordine. In questo paragrafo studiamo

$$(4.1) \quad y' + a(t)y = b(t) \quad t \in \mathbb{R},$$

dove a e b sono funzioni reali continue e la funzione incognita $y = y(x)$ è anch'essa una funzione reale. L'equazione differenziale (4.1) si dice *equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti variabili*. L'equazione è

- del *primo ordine*, perché compaiono derivate fino al primo ordine,
- *lineare*, perché la dipendenza da y , y' è lineare,
- a *coefficienti variabili*, perché $a = a(t)$, coefficiente di y , può essere non costante.

Dato che la difficoltà del problema non cambia, studiamo direttamente l'equazione in cui sia presente il termine b , cioè l'equazione *non omogenea*.

Come sempre, il PROBLEMA DI CAUCHY consiste nel trovare la soluzione di

$$(4.2) \quad y' + a(t)y = b(t) \quad y(t_0) = y_0,$$

dove t_0 e y_0 sono assegnati.

Ecco come procedere per determinare l'integrale generale di (4.1).

Passo 1. Cerchiamo una primitiva A della funzione a :

$$A(t) = \int a(t) dt.$$

Come è noto, una funzione continua ammette sempre primitiva, quindi la funzione A è sempre ben definita. Nella pratica, è piacevole che la funzione A sia data in termini espliciti, quindi, se possibile, si determina A .

Passo 2. Moltiplichiamo l'equazione per la funzione $e^{A(t)}$, ottenendo

$$e^{A(t)} y'(t) + e^{A(t)} a(t)y(t) = e^{A(t)} b(t).$$

Il termine a primo membro è la derivata della funzione $e^{A(t)}y(t)$, infatti

$$(e^{A(t)}y(t))' = e^{A(t)}y'(t) + (e^{A(t)})'y(t) = e^{A(t)}y'(t) + e^{A(t)}a(t)y(t).$$

Quindi l'equazione prende la forma

$$(e^{A(t)}y(t))' = e^{A(t)}b(t).$$

Passo 3. Calcoliamo l'integrale indefinito del secondo membro

$$\int e^{A(t)} b(t) dt = F(t) + C.$$

Dato che la derivata di $e^{A(t)} y(t)$ è la funzione $e^{A(t)} b(t)$, deve valere

$$e^{A(t)} y(t) = F(t) + C.$$

Esplicitando rispetto a y , otteniamo la soluzione generale di (4.1):

$$(4.3) \quad y(t) = (F(t) + C)e^{-A(t)} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} A(t) = \int a(t) dt, \\ F(t) = \int e^{A(t)} b(t) dt, \\ C \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 4.1. *Risolvere l'equazione differenziale $y' + y \cos t = \frac{1}{2} \sin(2t)$.*

Soluzione. Dato che $\int \cos t dt = \sin t + C$, moltiplichiamo l'equazione per $e^{\sin t}$:

$$(y e^{\sin t})' = y' e^{\sin t} + y \cos t e^{\sin t} = \frac{1}{2} \sin(2t) e^{\sin t} = e^{\sin t} \sin t \cos t.$$

Integrando, si ottiene $y e^{\sin t} = \int e^{\sin t} \sin t \cos t dt$. Dato che

$$\begin{aligned} \int e^{\sin t} \sin t \cos t dt &= \int e^{\sin t} \sin t D(\sin t) dt = \int t e^t dt = t e^t - \int e^t dt \\ &= (t - 1)e^t + C = (\sin t - 1)e^{\sin t} + C, \end{aligned}$$

la soluzione generale dell'equazione è $y = \sin t - 1 + C e^{-\sin t}$. $\square$

Nel caso in cui si debba risolvere un problema di Cauchy, quindi se è assegnata anche la condizione iniziale $y(t_0) = y_0$, basta imporre che la generica soluzione data da (4.3) soddisfi la condizione data.

Una strada alternativa segue lo stesso schema visto in precedenza:

– si calcola A , primitiva di a , e si moltiplica l'equazione per $e^{A(t)}$ in modo da ottenere

$$(y e^{A(t)})' = b(t) e^{A(t)}.$$

– si integra in (t_0, t) e, per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$y(t) e^{A(t)} - y(t_0) e^{A(t_0)} = \int_{t_0}^t b(t) e^{A(t)} dt,$$

– si usa la condizione $y(t_0) = y_0$ e si esplicita $y(t)$,

$$y(t) = y_0 e^{A(t_0) - A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t b(t) e^{A(t)} dt,$$

Se $A(t)$ è scelta come $\int_{t_0}^t a(s) ds$, la formula può essere riscritta come

$$y(t) = y_0 \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right) + \int_{t_0}^t b(t) \exp \left(- \int_t^t a(s) ds \right) dt.$$

ESERCIZIO 4.2. *Risolvere il problema di Cauchy*

$$ty' - y + t \ln t = 0 \quad y(1) = 1.$$

Soluzione. Dividendo per t otteniamo una equazione della forma nota

$$y' - \frac{y}{t} = -\ln t.$$

Calcoliamo la funzione A :

$$A(t) = \int_1^t -\frac{ds}{s} = -\ln s \Big|_1^t = -\ln t = \ln \left(\frac{1}{t} \right).$$

Moltiplicando l'equazione per $e^{\ln(1/t)} = \frac{1}{t}$, otteniamo

$$\left(\frac{y}{t} \right)' = -\frac{\ln t}{t}.$$

Integriamo in $(1, t)$ (usando per la variabile di integrazione un nome diverso da t)

$$\frac{y(t)}{t} - \frac{y(1)}{1} = - \int_1^t \frac{\ln t}{t} dt = - \int_0^{\ln t} \tau d\tau = -\frac{1}{2} \ln^2 t.$$

Imponendo la condizione $y(1) = 1$, ricaviamo la soluzione $y(t) = \frac{1}{2}t(2 - \ln^2 t)$. $\square$

Equazioni del II ordine. Un'equazione differenziale del secondo ordine, lineare, a coefficienti variabili, omogenea è

$$(4.4) \quad y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

dove a_0, a_1 sono funzioni assegnate. Come nel caso dei coefficienti costanti, $y \equiv 0$ è una soluzione dell'equazione. Inoltre, anche in questa situazione più generale, *se y_1 e y_2 sono soluzioni linearmente indipendenti di (4.4), tutte le soluzioni di (4.4) sono della forma $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$* . Quindi per conoscere tutte le soluzioni basta individuare una coppia di soluzioni linearmente indipendenti... Il problema è tutto qui: mentre è possibile dimostrare che esistono coppie di soluzioni linearmente indipendenti, non esiste un algoritmo generale per costruirle esplicitamente. Se ci si imbatte in equazioni di questo genere, dedurre proprietà sulle soluzioni è, di conseguenza, più complicato (ma non impossibile!).

ESEMPIO 4.3. Il caso conservativo. In casi specifici, è possibile che si riesca a scrivere esplicitamente la soluzione. Ad esempio, se $a_0(t) = a_1'(t)$, allora $a_1(t)y' + a_0(t)y = a_1(t)y' + a_1'(t)y = (a_1(t)y)'$ e l'equazione si può scrivere in *forma conservativa*, cioè come segue

$$(y' + a_1(t)y)' = 0.$$

Questa espressione mostra che la quantità $y' + a_1(t)y$ è conservata al variare di t , cioè rimane costante. Perciò y verifica l'equazione del primo ordine $y' + a_1(t)y = C$ per qualche $C \in \mathbb{R}$. A questo punto la soluzione può essere determinata esplicitamente tramite il procedimento già visto per le equazioni lineari di primo grado, arrivando a

$$(4.5) \quad y(t) = \left(C \int e^{A(t)} dt + D \right) e^{-A(t)} \quad \text{dove} \quad A(t) = \int a_1(t) dt, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

Nel caso non omogeneo generale (quindi con a_1 e a_0 qualsiasi)

$$(4.6) \quad y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$$

è ancora vero che la soluzione generale dell'equazione è

$$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) \quad \text{dove} \quad \begin{cases} y_0 & \text{soluzione generale di (4.4)} \\ \bar{y} & \text{soluzione particolare di (4.6)} \end{cases}$$

e anche il principio di sovrapposizione seguita a valere, ma continuiamo a non avere a disposizione una maniera generale per scrivere le soluzioni esplicitamente. Peccato.

- ESERCIZIO 4.4. (i) *Determinare tutte le soluzioni di $y'' + 2ty' + 2y = 0$.*
(ii) *Determinare tutte le soluzioni dell'equazione nonomogenea $y'' + 2ty' + 2y = 1$.*
(iii) *Determinare tutte le soluzioni dell'equazione nonomogenea $y'' + a(t)y' + a'(t)y = f(t)$, dove a, f sono funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.*