Analisi - A.A. 2007-2008
Prova in itinere del 21-I-2008

Esercizio 1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{\pi}{2}}$$

Il limite è una forma indeterminata del tipo 0/0. Grazie al teorema di de l'Hopital, abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{\pi}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\,\cos(x^2)}{\frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}\,\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\,\cos(x^2)}{\frac{-2x}{x^4+1}} = -1\,.$$

Si noti che essendo $\operatorname{arc\,tg}(y) + \operatorname{arc\,tg}(1/y) = \pi/2$ per ogni $y > 0$ (derivare per credere), il limite poteva essere ricavato calcolando

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{-\operatorname{arc\,tg}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \mathrm{o}(x^2)}{-x^2 + \mathrm{o}(x^2)} = -1\,.$$

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{\mathrm{e}^t + 3 + 2\,\mathrm{e}^{-t}}$$

Essendo $\mathrm{e}^t + 3 + 2\,\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^t + 2)$, con la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ si ha

$$\int_0^1 \frac{dt}{\mathrm{e}^t + 3 + 2\,\mathrm{e}^{-t}} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}\,.$$

Dal momento che si ha

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\,,$$

si tratta di calcolare

$$\int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) = \log\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=\mathrm{e}} = \log\left(\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}+2}\right) - \log\left(\frac{2}{3}\right)\,.$$

Esercizio 3. Data l'equazione differenziale

$$y'' + y' = x + 9\mathrm{e}^{2x}$$

determinarne:

(a) la soluzione generale;

(b) la soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = y'(0) = 0$.

Il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea è $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$, che ha come radici 0 e -1. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono allora della forma

$$y_0(x) = C_1 + C_2\, e^{-x}\,,$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie. Per quanto riguarda le soluzioni particolari, cerchiamo prima la soluzione con "dato" x, e poi la soluzione con "dato" $9e^{2x}$. Nel primo caso dovremmo cercare una soluzione del tipo $\overline{y}_1(x) = Ax+B$, con A e B costanti da determinare, ma essendo le costanti già soluzioni, cercheremo soluzioni della forma $\overline{y}_1(x) = x(Ax + B)$. Derivando e sostituendo, si trova $2A + (2Ax + B) = x$, da cui $A = \frac{1}{2}$ e $B = -1$, da cui $\overline{y}_1(x) = \frac{x^2}{2} - x$. La seconda soluzione particolare è della forma $\overline{y}_2(x) = Ce^{2x}$, con C da determinare. Sostituendo, si trova $4Ce^{2x} + 2Ce^{2x} = 9e^{2x}$, da cui $C = \frac{3}{2}$ e quindi $\overline{y}_2(x) = \frac{3e^{2x}}{2}$. La soluzione generale dell'equazione è dunque

$$y(x) = C_1 + C_2\, e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x + \frac{3e^{2x}}{2}\,,$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie. Per il secondo quesito, si tratta di risolvere il sistema

$$C_1 + C_2 + \frac{3}{2} = 0\,, \quad -C_2 - 1 + 3 = 0\,,$$

da cui $C_2 = 2$ e quindi $C_1 = -\frac{7}{2}$. La soluzione cercata è pertanto

$$y(x) = -\frac{7}{2} + 2e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x + \frac{3e^{2x}}{2}\,.$$

Esercizio 4. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} |x|^{\frac{5}{3}}\, |y|^{\frac{4}{3}}\, \dfrac{\log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali prime e la differenziabilità di f nell'origine.

Passando a coordinate polari, si ha

$$f(x,y) = \rho^3\,|\cos(\theta)|^{\frac{5}{3}}\,|\mathrm{sen}(\theta)|^{\frac{4}{3}}\,\frac{\log(\rho^2)}{\rho^2} = 2|\cos(\theta)|^{\frac{5}{3}}\,|\mathrm{sen}(\theta)|^{\frac{4}{3}}\,\rho\,\log(\rho)\,.$$

Essendo $0 \le 2|\cos(\theta)|^{\frac{5}{3}}\,|\mathrm{sen}(\theta)|^{\frac{4}{3}} \le 2$, ed essendo

$$\lim_{\rho\to 0^+} \rho\,\log(\rho) = 0\,,$$

la funzione ammette limite uguale a zero nell'origine ed è dunque continua. Essendo inoltre $f(x,0) \equiv 0$ e $f(0,y) \equiv 0$, la funzione ammette derivate parziali nulle nell'origine. Per quanto riguarda la differenziabilità, si tratta di verificare se si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,.$$

Passando nuovamente a coordinate polari, si ha

$$\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \rho^3\,|\cos(\theta)|^{\frac{5}{3}}\,|\mathrm{sen}(\theta)|^{\frac{4}{3}}\,\frac{\log(\rho^2)}{\rho^3} = 2|\cos(\theta)|^{\frac{5}{3}}\,|\mathrm{sen}(\theta)|^{\frac{4}{3}}\,\log(\rho)\,,$$

che non tende a zero. La funzione f non è pertanto differenziabile nell'origine.

Esercizio 5. Data la funzione

$$f(x,y) = x^3 - y^2 - 3x + 4y - 2,$$

determinare i punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2$ e studiarne il carattere.

Si ha $\nabla f(x,y) = (3x^2-3, -2y+4)$, che si annulla nei punti $P_1 = (1,2)$ e $P_2 = (-1,2)$. Essendo $f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{xy}(x,y) = 0 = f_{yx}(0,0)$ e $f_{yy}(x,y) = -2$, la matrice Hessiana è

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si ha allora

$$H(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad H(-1,2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

È evidente che $H(1,2)$ non è definita (e dunque P_1 è di sella), mentre $H(-1,2)$ è definita negativa (e dunque P_2 è un massimo).

Analisi - A.A. 2007-2008
Prova in itinere del 21-1-08

Esercizio 1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}$$

Il limite è una forma indeterminata del tipo 0/0. Grazie al teorema di de l'Hopital, abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\,e^{x^2}}{-\frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\,e^{x^2}}{\frac{2x}{x^4+1}} = 1\,.$$

Si noti che essendo $\operatorname{arc\,tg}(y) + \operatorname{arc\,tg}(1/y) = \pi/2$ per ogni $y > 0$ (derivare per credere), il limite poteva essere ricavato calcolando

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\operatorname{arc\,tg}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = 1\,.$$

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{e^t + 4 + 3\,e^{-t}}.$$

Essendo $e^t + 4 + 3\,e^{-t} = e^{-t}(e^{2t} + 4e^t + 3)$, con la sostituzione $x = e^t$ si ha

$$\int_0^1 \frac{dt}{e^t + 4 + 3\,e^{-t}} = \int_1^e \frac{dx}{x^2+4x+3} = \int_1^e \frac{dx}{(x+1)(x+3)}\,.$$

Dal momento che si ha

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+3}\,,$$

si tratta di calcolare

$$\frac{1}{2}\int_1^e \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x+3}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=e} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{e+1}{e+3}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)\,.$$

Esercizio 3. Data l'equazione differenziale

$$y'' + y' = 2x + \mathrm{e}^{2x}$$

determinarne:

(a) la soluzione generale;

(b) la soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = y'(0) = 0$.

Il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea è $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$, che ha come radici 0 e -1. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono allora della forma

$$y_0(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-x}\,,$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie. Per quanto riguarda le soluzioni particolari, cerchiamo prima la soluzione con "dato" $2x$, e poi la soluzione con "dato" e^{2x}. Nel primo caso dovremmo cercare una soluzione del tipo $\overline{y}_1(x) = Ax+B$, con A e B costanti da determinare, ma essendo le costanti già soluzioni, cercheremo soluzioni della forma $\overline{y}_1(x) = x(Ax + B)$. Derivando e sostituendo, si trova $2A + (2Ax + B) = 2x$, da cui $A = 1$ e $B = -2$, da cui $\overline{y}_1(x) = x^2 - 2x$. La seconda soluzione particolare è della forma $\overline{y}_2(x) = C\mathrm{e}^{2x}$, con C da determinare. Sostituendo, si trova $4C\mathrm{e}^{2x} + 2C\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$, da cui $C = \frac{1}{6}$ e quindi $\overline{y}_2(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{6}$. La soluzione generale dell'equazione è dunque

$$y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + x^2 - 2x + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{6}\,,$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie. Per il secondo quesito, si tratta di risolvere il sistema

$$C_1 + C_2 + \frac{1}{6} = 0\,, \quad -C_2 - 2 + \frac{1}{3} = 0\,,$$

da cui $C_2 = -\frac{5}{3}$ e quindi $C_1 = \frac{3}{2}$. La soluzione cercata è pertanto

$$y(x) = \frac{3}{2} - \frac{5}{3}\mathrm{e}^{-x} + x^2 - 2x + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{6}\,.$$

Esercizio 4. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^{\frac{1}{2}}\,|y|^{\frac{5}{2}}\,\dfrac{\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali prime e la differenziabilità di f nell'origine.

Passando a coordinate polari, si ha

$$f(x,y) = \rho^3 \,|\cos(\theta)|^{\frac{1}{2}}\, |\mathrm{sen}(\theta)|^{\frac{5}{2}}\, \frac{\log(\rho^2)}{\rho^2} = 2|\cos(\theta)|^{\frac{1}{2}}\, |\mathrm{sen}(\theta)|^{\frac{5}{2}}\, \rho \log(\rho)\,.$$

Essendo $0 \leq 2|\cos(\theta)|^{\frac{1}{2}}\, |\mathrm{sen}(\theta)|^{\frac{5}{2}} \leq 2$, ed essendo

$$\lim_{\rho\to 0^+} \rho \log(\rho) = 0\,,$$

la funzione ammette limite uguale a zero nell'origine ed è dunque continua. Essendo inoltre $f(x,0) \equiv 0$ e $f(0,y) \equiv 0$, la funzione ammette derivate parziali nulle nell'origine. Per quanto riguarda la differenziabilità, si tratta di verificare se si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,.$$

Passando nuovamente a coordinate polari, si ha

$$\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \rho^3 \,|\cos(\theta)|^{\frac{1}{2}}\, |\mathrm{sen}(\theta)|^{\frac{5}{2}}\, \frac{\log(\rho^2)}{\rho^3} = 2|\cos(\theta)|^{\frac{1}{2}}\, |\mathrm{sen}(\theta)|^{\frac{5}{2}}\, \log(\rho)\,,$$

che non tende a zero. La funzione f non è pertanto differenziabile nell'origine.

Esercizio 5. Data la funzione

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 12x - 2y - 1,$$

determinare i punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2$ e studiarne il carattere.

Si ha $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 12, 2y - 2)$, che si annulla nei punti $P_1 = (2,1)$ e $P_2 = (-2,1)$. Essendo $f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{xy}(x,y) = 0 = f_{yx}(0,0)$ e $f_{yy}(x,y) = 2$, la matrice Hessiana è

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha allora

$$H(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad H(-2,1) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

È evidente che $H(-2,1)$ non è definita (e dunque P_2 è di sella), mentre $H(2,1)$ è definita positiva (e dunque P_1 è un minimo).

Analisi - A.A. 2007-2008
Prova in itinere del 21/I/2008

Esercizio 1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}$$

Il limite è una forma indeterminata del tipo 0/0. Grazie al teorema di de l'Hopital, abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{-\frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}\,\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\frac{2x}{x^4+1}} = \frac{1}{2}\,.$$

Si noti che essendo $\operatorname{arc\,tg}(y) + \operatorname{arc\,tg}(1/y) = \pi/2$ per ogni $y > 0$ (derivare per credere), il limite poteva essere ricavato calcolando

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\operatorname{arc\,tg}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)}{x^2 + \mathrm{o}(x^2)} = \frac{1}{2}\,.$$

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{\mathrm{e}^t + 5 + 6\,\mathrm{e}^{-t}}.$$

Essendo $\mathrm{e}^t + 5 + 6\,\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{2t} + 5\mathrm{e}^t + 6)$, con la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ si ha

$$\int_0^1 \frac{dt}{\mathrm{e}^t + 5 + 6\,\mathrm{e}^{-t}} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{dx}{x^2 + 5x + 6} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{dx}{(x+2)(x+3)}\,.$$

Dal momento che si ha

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\,,$$

si tratta di calcolare

$$\int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) = \log\left(\frac{x+2}{x+3}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=\mathrm{e}} = \log\left(\frac{\mathrm{e}+2}{\mathrm{e}+3}\right) - \log\left(\frac{3}{4}\right)\,.$$

Esercizio 3. Data l'equazione differenziale

$$y'' - y' = x + 9\mathrm{e}^{2x}$$

determinarne:

(a) la soluzione generale;

(b) la soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = y'(0) = 0$.

Il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea è $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$, che ha come radici 0 e 1. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono allora della forma

$$y_0(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x\,,$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie. Per quanto riguarda le soluzioni particolari, cerchiamo prima la soluzione con "dato" x, e poi la soluzione con "dato" $9\mathrm{e}^{2x}$. Nel primo caso dovremmo cercare una soluzione del tipo $\overline{y}_1(x) = Ax+B$, con A e B costanti da determinare, ma essendo le costanti già soluzioni, cercheremo soluzioni della forma $\overline{y}_1(x) = x(Ax + B)$. Derivando e sostituendo, si trova $2A-(2Ax+B) = 2x$, da cui $A = -\frac{1}{2}$ e $B = -1$, da cui $\overline{y}_1(x) = -\frac{x^2}{2}-x$. La seconda soluzione particolare è della forma $\overline{y}_2(x) = C\mathrm{e}^{2x}$, con C da determinare. Sostituendo, si trova $4C\mathrm{e}^{2x} - 2C\mathrm{e}^{2x} = 9\mathrm{e}^{2x}$, da cui $C = \frac{9}{2}$ e quindi $\overline{y}_2(x) = \frac{9\mathrm{e}^{2x}}{2}$. La soluzione generale dell'equazione è dunque

$$y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} - x + \frac{9\mathrm{e}^{2x}}{2}\,,$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie. Per il secondo quesito, si tratta di risolvere il sistema

$$C_1 + C_2 + \frac{9}{2} = 0\,, \quad C_2 - 1 + 9 = 0\,,$$

da cui $C_2 = -8$ e quindi $C_1 = \frac{7}{2}$. La soluzione cercata è pertanto

$$y(x) = \frac{7}{2} - 8\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} - x + \frac{9\mathrm{e}^{2x}}{2}\,.$$

Esercizio 4. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^{\frac{4}{3}}\,|y|^{\frac{5}{3}}\,\dfrac{\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali prime e la differenziabilità di f nell'origine.

Passando a coordinate polari, si ha

$$f(x,y) = \rho^3\,|\cos(\theta)|^{\frac{4}{3}}\,|\mathrm{sen}(\theta)|^{\frac{5}{3}}\,\frac{\log(\rho^2)}{\rho^2} = 2|\cos(\theta)|^{\frac{4}{3}}\,|\mathrm{sen}(\theta)|^{\frac{5}{3}}\,\rho\,\log(\rho)\,.$$

Essendo $0 \leq 2|\cos(\theta)|^{\frac{4}{3}}\,|\mathrm{sen}(\theta)|^{\frac{5}{3}} \leq 2$, ed essendo

$$\lim_{\rho\to 0^+} \rho\,\log(\rho) = 0\,,$$

la funzione ammette limite uguale a zero nell'origine ed è dunque continua. Essendo inoltre $f(x,0) \equiv 0$ e $f(0,y) \equiv 0$, la funzione ammette derivate parziali nulle nell'origine. Per quanto riguarda la differenziabilità, si tratta di verificare se si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,.$$

Passando nuovamente a coordinate polari, si ha

$$\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \rho^3\,|\cos(\theta)|^{\frac{4}{3}}\,|\mathrm{sen}(\theta)|^{\frac{5}{3}}\,\frac{\log(\rho^2)}{\rho^3} = 2|\cos(\theta)|^{\frac{4}{3}}\,|\mathrm{sen}(\theta)|^{\frac{5}{3}}\,\log(\rho)\,,$$

che non tende a zero. La funzione f non è pertanto differenziabile nell'origine.

Esercizio 5. Data la funzione

$$f(x,y) = x^3 - y^2 - 3x + 2y + 2,$$

determinare i punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2$ e studiarne il carattere.

Si ha $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3, -2y + 2)$, che si annulla nei punti $P_1 = (1,1)$ e $P_2 = (-1,1)$. Essendo $f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{xy}(x,y) = 0 = f_{yx}(0,0)$ e $f_{yy}(x,y) = -2$, la matrice Hessiana è

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si ha allora

$$H(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad H(-1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

È evidente che $H(1,1)$ non è definita (e dunque P_1 è di sella), mentre $H(-1,1)$ è definita negativa (e dunque P_2 è un massimo).

Analisi - A.A. 2007-2008
Prova in itinere del 21/1/08

Esercizio 1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{\pi}{2}}$$

Il limite è una forma indeterminata del tipo 0/0. Grazie al teorema di de l'Hopital, abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{\pi}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}\,\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{-\frac{2x}{x^4+1}} = -1\,.$$

Si noti che essendo $\operatorname{arc\,tg}(y) + \operatorname{arc\,tg}(1/y) = \pi/2$ per ogni $y > 0$ (derivare per credere), il limite poteva essere ricavato calcolando

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{-\operatorname{arc\,tg}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \mathrm{o}(x^2)}{-x^2 + \mathrm{o}(x^2)} = -1\,.$$

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{\mathrm{e}^t + 5 + 4\,\mathrm{e}^{-t}}.$$

Essendo $\mathrm{e}^t + 5 + 4\,\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{2t} + 5\mathrm{e}^t + 4)$, con la sostituzione $x = \mathrm{e}^t$ si ha

$$\int_0^1 \frac{dt}{\mathrm{e}^t + 5 + 4\,\mathrm{e}^{-t}} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{dx}{x^2 + 5x + 4} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{dx}{(x+1)(x+4)}\,.$$

Dal momento che si ha

$$\frac{1}{(x+1)(x+4)} = \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+4}\,,$$

si tratta di calcolare

$$\frac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4}\right) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{x+1}{x+4}\right)\bigg|_{x=1}^{x=\mathrm{e}} = \frac{1}{3}\log\left(\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}+4}\right) - \frac{1}{3}\log\left(\frac{2}{5}\right)\,.$$

Esercizio 3. Data l'equazione differenziale

$$y'' - y' = 2x + \mathrm{e}^{2x}$$

determinarne:

(a) la soluzione generale;

(b) la soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = y'(0) = 0$.

Il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea è $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$, che ha come radici 0 e 1. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono allora della forma

$$y_0(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x\,,$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie. Per quanto riguarda le soluzioni particolari, cerchiamo prima la soluzione con "dato" $2x$, e poi la soluzione con "dato" e^{2x}. Nel primo caso dovremmo cercare una soluzione del tipo $\overline{y}_1(x) = Ax+B$, con A e B costanti da determinare, ma essendo le costanti già soluzioni, cercheremo soluzioni della forma $\overline{y}_1(x) = x(Ax + B)$. Derivando e sostituendo, si trova $2A-(2Ax+B) = 2x$, da cui $A = -1$ e $B = -2$, da cui $\overline{y}_1(x) = -x^2-2x$. La seconda soluzione particolare è della forma $\overline{y}_2(x) = C\mathrm{e}^{2x}$, con C da determinare. Sostituendo, si trova $4C\mathrm{e}^{2x} - 2C\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$, da cui $C = \frac{1}{2}$ e quindi $\overline{y}_2(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$. La soluzione generale dell'equazione è dunque

$$y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^x - x^2 - 2x + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,,$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie. Per il secondo quesito, si tratta di risolvere il sistema

$$C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0\,, \quad C_2 - 2 + 1 = 0\,,$$

da cui $C_2 = 1$ e quindi $C_1 = -\frac{3}{2}$. La soluzione cercata è pertanto

$$y(x) = -\frac{3}{2} + \mathrm{e}^x - x^2 - 2x + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,.$$

Esercizio 4. Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^{\frac{5}{2}}\,|y|^{\frac{1}{2}}\,\dfrac{\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali prime e la differenziabilità di f nell'origine.

Passando a coordinate polari, si ha

$$f(x,y) = \rho^3\,|\cos(\theta)|^{\frac{5}{2}}\,|\text{sen}(\theta)|^{\frac{1}{2}}\,\frac{\log(\rho^2)}{\rho^2} = 2|\cos(\theta)|^{\frac{5}{2}}\,|\text{sen}(\theta)|^{\frac{1}{2}}\,\rho\,\log(\rho)\,.$$

Essendo $0 \leq 2|\cos(\theta)|^{\frac{5}{2}}\,|\text{sen}(\theta)|^{\frac{1}{2}} \leq 2$, ed essendo

$$\lim_{\rho\to 0^+} \rho\,\log(\rho) = 0\,,$$

la funzione ammette limite uguale a zero nell'origine ed è dunque continua. Essendo inoltre $f(x,0) \equiv 0$ e $f(0,y) \equiv 0$, la funzione ammette derivate parziali nulle nell'origine. Per quanto riguarda la differenziabilità, si tratta di verificare se si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,.$$

Passando nuovamente a coordinate polari, si ha

$$\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \rho^3\,|\cos(\theta)|^{\frac{5}{2}}\,|\text{sen}(\theta)|^{\frac{1}{2}}\,\frac{\log(\rho^2)}{\rho^3} = 2|\cos(\theta)|^{\frac{5}{2}}\,|\text{sen}(\theta)|^{\frac{1}{2}}\,\log(\rho)\,,$$

che non tende a zero. La funzione f non è pertanto differenziabile nell'origine.

Esercizio 5. Data la funzione

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x - 2y + 1,$$

determinare i punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2$ e studiarne il carattere.

Si ha $\nabla f(x,y) = (3x^2-3, 2y-2)$, che si annulla nei punti $P_1 = (1,1)$ e $P_2 = (-1,1)$. Essendo $f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{xy}(x,y) = 0 = f_{yx}(0,0)$ e $f_{yy}(x,y) = 2$, la matrice Hessiana è

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Si ha allora

$$H(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\,, \qquad H(-1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

È evidente che $H(-1,1)$ non è definita (e dunque P_2 è di sella), mentre $H(1,1)$ è definita positiva (e dunque P_1 è un minimo).