Analisi - 10 settembre 2008
Corso di Laurea in Fisica - Fisica ed Astrofisica

Chi deve fare lo scritto di Derivate e Integrali (vecchio ordinamento) deve svolgere gli esercizi: **1, 2, 3, 4, 5**

Esercizio 1. Data la successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} x_1 = a\,, \\ x_{n+1} = \min\{2, x_n^2\}\,, \end{cases}$$

i) dimostrare che per ogni $0 < a < 1$ la successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ è decrescente;
ii) dimostrare che per ogni $a \geq 1$ la successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ è definitivamente costante;
iii) dimostrare che la successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge per ogni $a \geq 0$ e calcolarne il limite al variare di $a \geq 0$.

Dal momento che $0 < x < 1$ implica $0 < x^2 < x < 1$ per ogni x, si ha che, per ogni n, il minimo tra 2 e x_n^2 è x_n^2. In definitiva, se $0 < a < 1$ si ha $x_{n+1} = x_n^2$, cosicché la successione è decrescente. Detto L il limite, dalla condizione di chiusura si ricava $L = L^2$ e quindi o $L = 1$ (che non è possibile dato che $x_n < 1$ per ogni n ed è decrescente), o $L = +\infty$ (che non è possibile per lo stesso motivo) o $L = 0$ (che è l'unica possibilità rimasta). Se $a = 1$ si ha $x_2 = \min(2, 1^2) = 1 = x_1$, cosicché $x_2 = x_1 = 1$, da cui $x_3 = x_2$ e così via: in definitiva, la successione è identicamente uguale ad 1 e quindi converge ad 1. Dal momento che $x > 1$ implica $x^2 > x > 1$, il valore di x_2 (partendo da $a > 1$) dipende dall'essere a minore o maggiore di $\sqrt{2}$: se $a < \sqrt{2}$, allora x_2 sarà a^2, mentre se $a \geq \sqrt{2}$, il valore di x_2 sarà 2. Dal momento che $x_2 = 2$ implica $x_3 = \min(2, 2^2) = 2 = x_2$, e quindi che la successione vale costantemente 2 da x_2 in poi, ne segue che se $a \geq \sqrt{2}$ la successione converge (essendo definitivamente uguale) a 2. Rimane, pertanto, solo il caso $1 < a < \sqrt{2}$, che fa sì che $x_2 = a^2 < 2$. Se, però, si ha $a^4 \geq 2$ (vale a dire, se $a \geq \sqrt[4]{2}$), allora $x_3 = \min(2, a^4) = 2$ e quindi, per quanto detto prima, si ha $x_n = 2$ per ogni $n \geq 3$, fatto che implica che la successione è convergente e converge a 2. Rimane così da trattare il caso $1 < a < \sqrt[4]{2}$, per il quale si ha $x_3 = a^4 < 2$. Se però... Generalizzando, se esiste n per il quale $a > \sqrt[2n]{2}$, allora si ha $x_{n+1} = 2$ e, da quell'indice in poi, la successione è costante e quindi converge a 2. In definitiva, rimane da trattare il caso in cui $1 < a < \sqrt[2n]{2}$ per ogni n. Dal momento, però, che $\sqrt[2n]{2}$ tende ad 1 per n divergente, non esiste alcun valore di a per il quale tale disuguaglianza è soddisfatta; in altre parole, qualsiasi sia $a > 1$ esiste sempre un valore di n a partire dal quale si ha $x_n = 2$, con il che la successione converge a 2.

Esercizio 2. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \left[1 - \cos\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n^2}\right)\right] .$$

Ricordando che

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} ,$$

la serie data ha, per il criterio del confronto asintotico, lo stesso carattere della serie di termine generico

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n^2}\right)^2 .$$

Dal momento che si ha $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2}$ per $n \geq 5$, si ha

$$0 \leq \sum_{n=5}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n^2}\right)^2 \leq \sum_{n=5}^{+\infty} n \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)^2 = \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{4}{n^3} .$$

Essendo l'ultima serie convergente, lo è, per il criterio del confronto, anche la serie di partenza.

Esercizio 3. Determinare gli insiemi di definizione, continuità e derivabilità, limiti ed asintoti, gli intervalli di crescenza e decrescenza, intervalli di convessità e concavità della funzione

$$f(x) = \frac{\ln[(x-1)^2]}{\ln[(x-1)^2] + 1} .$$

Disegnare il grafico di f.

Prima di studiare la funzione, osserviamo che si ha $f(x) = g(x-1)$, dove

$$g(x) = \frac{\ln(x^2)}{\ln(x^2) + 1} = 1 - \frac{1}{\ln(x^2) + 1} .$$

Sarà allora sufficiente studiare $g(x)$ e poi "traslare" verso destra di 1 tutti i risultati ottenuti. La funzione g è definita per ogni x reale diverso da 0 (valore per il quale non è definito $\log(x^2)$) e da $\pm \mathrm{e}^{-1/2}$ (valori per i quali si annulla il denominatore). La funzione g è pari, ed è quindi sufficiente studiarla solo per $x > 0$. Essendo $\ln(x^2) > 0$ se e solo se $x > 1$, e $\ln(x^2) + 1 > 0$ se e solo se $x > \mathrm{e}^{-1/2}$, la funzione g è positiva per $0 < x < \mathrm{e}^{-1/2}$ e per $x > 1$, e negativa altrimenti. Per quanto riguarda limiti ed asintoti si ha

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1 , \qquad \lim_{x \to (\mathrm{e}^{-1/2})^\pm} g(x) = \mp\infty , \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 1 .$$

In particolare, la funzione può essere prolungata per continuità nell'origine definendo $g(0) = 1$. Per quanto riguarda la derivata, si ha

$$g'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2}}{(\ln(x^2)+1)^2} = \frac{2}{x\,(\ln(x^2)+1)^2}\,,$$

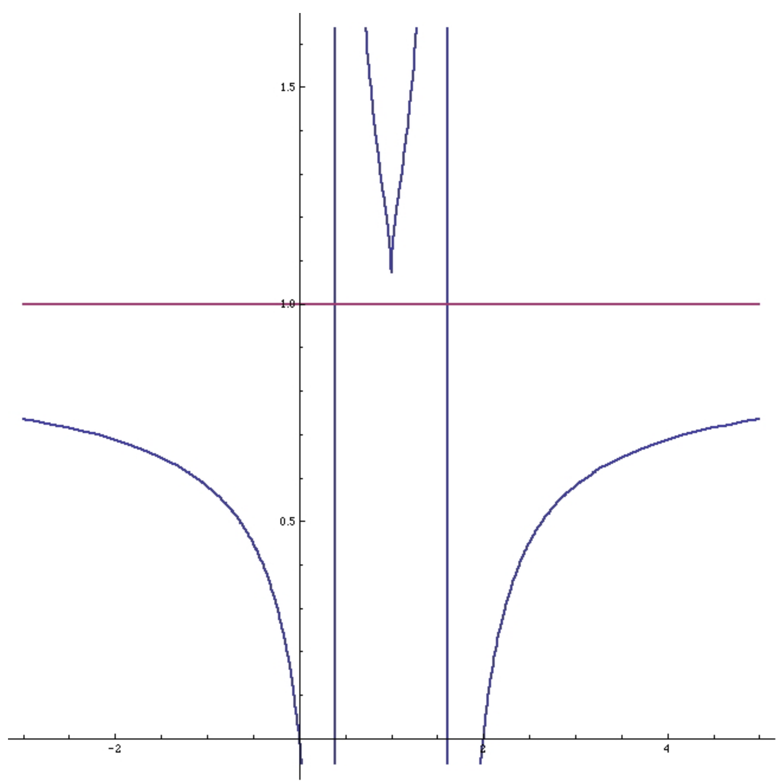
che è positiva per ogni valore di $x > 0$. Ne segue che la funzione è crescente in $(0, \mathrm{e}^{-1/2})$ e in $(\mathrm{e}^{-1/2}, +\infty)$. Nell'origine la funzione non è derivabile essendo

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = +\infty\,.$$

Derivando ulteriormente, si ha

$$g''(x) = -\frac{2(5+\ln(x^2))}{x^2\,(\ln(x^2)+1)^3}\,,$$

che è positiva per $\mathrm{e}^{-1/5} < x < \mathrm{e}^{-1/2}$ e negativa altrimenti. In definitiva, e "traslando" il grafico a destra di 1, si ha:



Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy

$$y' = \frac{1}{x}\,y - x^2, \qquad y(-1) = 1.$$

Troviamo inizialmente la soluzione dell'equazione omogenea associata:

$$y' = \frac{1}{x}\,y\,.$$

Dividendo per y ed integrando, si trova $y(x) = C\,x$, con C costante arbitraria. Cercando una soluzione della forma $C(x)\,x$ si ottiene

$$C'(x)\,x + C(x) = \frac{1}{x}\,C(x)\,x - x^2 = C(x) - x^2\,,$$

da cui $C'(x) = -x$ e quindi $C(x) = -x^2/2 + D$, con D costante arbitraria. In definitiva, la soluzione generale del problema è data da

$$y(x) = -\frac{x^3}{2} + D\,x\,,$$

con D costante arbitraria. Assegnando la condizione iniziale si trova $D = -\frac{1}{2}$ e quindi

$$y(x) = -\frac{x + x^3}{2}\,.$$

Esercizio 5. Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx.$$

Sostituendo $t = \sqrt{x}$, da cui $x = t^2$ e quindi $dx = 2t\,dt$, si ottiene

$$\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^2 t^2\,\mathrm{e}^t\,dt\,.$$

Integrando per parti si ha

$$\int t^2\,\mathrm{e}^t\,dt = t^2\,\mathrm{e}^t - 2\int t\,\mathrm{e}^t\,dt\,.$$

Integrando nuovamente per parti si ha

$$\int t\,\mathrm{e}^t\,dt = t\,\mathrm{e}^t - \int \mathrm{e}^t\,dt = (t-1)\,\mathrm{e}^t\,.$$

Mettendo assieme i risultati, si ha

$$\int t^2 \, \mathrm{e}^t \, dt = (t^2 - 2t + 2) \, \mathrm{e}^t \, ,$$

e quindi

$$\int_0^4 \sqrt{x} \, \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \, dx = 2(t^2 - 2t + 2) \, \mathrm{e}^t \Big|_{t=0}^{t=2} = 4(\mathrm{e}^2 - 1) \, .$$

Esercizio 6. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - x - y + 4$$

determinare i punti stazionari di f in $\mathbb{R}^2$ e studiarne il carattere.
Si ha $\nabla f = (x^2 - 1, y^2 - 1)$. Annullando il gradiente si trovano quattro punti: $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (1, -1)$, $P_3 = (-1, 1)$ e $P_4 = (-1, -1)$. Essendo $f_{xx} = 2x$, $f_{xy} = 0 = f_{yx}$ e $f_{yy} = 2y$, la matrice Hessiana è

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} .$$

Essendo la matrice diagonale, si vede facilmente che $H(x, y)$ non è definita in P_2 e P_3 (che sono punti di sella), mentre è definita positiva in P_1 (che dunque è un minimo) e definita negativa in P_4 (che dunque è un massimo).