Compito di Analisi Reale — 6 giugno 2005

1) Sia

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[5]{k}}\right) & \text{se } k \geq n \\ 0 & \text{se } k < n \end{cases}$$

Studiare la convergenza della successione $\{x_k^{(n)}\}$ in ℓ^p, $1 \leq p \leq +\infty$.

2) Sia

$$g_k(x) = \frac{x^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Calcolare, motivando la risposta,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 g_k(x)\,dx\,.$$

3) Sia

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{\sqrt{k+1}}\,\chi_{\left(\frac{1}{6^{k+1}},\frac{1}{6^k}\right)}(x)\,.$$

Per quali p, $1 \leq p \leq +\infty$, f appartiene a $L^p((0,1))$?

4) Siano

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt[2]{\operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{n}\right)}}\,, \qquad g_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^{n+2}}\,.$$

Studiare la convergenza di f_n in $L^p((0,1))$ e di g_n in $L^p((0,+\infty))$, $1 \leq p \leq +\infty$.

5) Sia

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{2^k}\,, \qquad x \in [-\pi,\pi]\,.$$

Dopo aver dimostrato che f appartiene a $L^2((-\pi,\pi))$, calcolare

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx\,.$$

Dimostrare inoltre che f è derivabile infinite volte con continuità.