Esercizi 3

1) Sia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ misurabile e sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua. Provare che $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $h(x) = f(g(x))$ è misurabile.

2) Trovare una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ di classe C^1, e una funzione non misurabile $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $h(x) = f(g(x))$ sia misurabile.

3) Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione misurabile, e definiamo $g(t) = m(\{x \in [0,1] : f(x) \geq t\})$. Provare che g è decrescente e che

$$\lim_{t \to (t_0)^-} g(t) = g(t_0)\,, \qquad \forall t_0 \in \mathbf{R}\,.$$

Data f definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2, \\ x-2 & \text{se } 2 < x \leq 3, \end{cases}$$

calcolare $g(t)$.

4) Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ misurabile, e sia $A = f([0,1])$. Provare che per ogni α in A, tranne al più un'infinità numerabile, si ha $m(G_\alpha(f)) = 0$. Suggerimento: si usi l'esercizio precedente ed il fatto (dato per buono) che ogni funzione monotona ha al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità.

5) Sia $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ misurabile, limitata e nonnegativa. Per ogni sottoinsieme misurabile E di $[0,1]$ definiamo

$$\mu(E) = \int_E f(x)\,dx\,.$$

Provare che $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$ per ogni coppia di insiemi misurabili E e F. Lo stesso risultato è vero per l'unione di infiniti insiemi $\{E_n\}$?

6) Dare un esempio di successione f_n definita su $[0,1]$, convergente quasi ovunque ad f e tale che

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\,dx > \int_{[0,1]} f(x)\,dx\,.$$

7) Sia $f : [0,1]$ una funzione decrescente, limitata e continua in zero. Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{[0,1]} f\left(\frac{x}{n}\right)\,dx\,.$$

8) Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{[0,1]} \frac{x}{1 + x^{2n}}\,dx\,.$$

9) Sia $\{q_n\}$ un'enumerazione dei razionali in $[0,1]$, e sia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{\left(q_n - \frac{1}{2^{n+1}},\, q_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}(x)\,.$$

Calcolare l'integrale di f su $\mathbf{R}$.

10) Sia $\{\pi_k\}$ la successione delle cifre decimali di π (ad esempio, $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 4$, $\pi_3 = 1$, $\pi_4 = 5$, eccetera). Sia $a_k = 2$ se π_k è pari, e $a_k = 1$ se π_k è dispari. Detta

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\, \chi_{\left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)}(x)\,,$$

calcolare l'integrale di f su $[0,1]$ con un errore inferiore ad $1/8$.