Esercizi 4

1) Sia E un insieme misurabile con $m(E) < +\infty$. Dimostrare che f_n converge a f in misura se e solo se

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} \, dx = 0 .$$

2) Sia f sommabile su $[0,1]$ e sia

$$F(t) = \int_{[0,t]} f(x) \, dx .$$

Dimostrare che F è continua su $[0,1]$.

3) Siano f e g sommabili su E, e sia

$$H(t) = \int_{E_t(f)} g(x) \, dx , \qquad E_t(f) = \{x \in E : f(x) > t\} .$$

Calcolare il limite di $H(t)$ per t tendente a $+\infty$ e per t tendente a $-\infty$.

4) Sia $\{\pi_k\}$ la successione delle cifre decimali di π ($\pi_0 = 3$, $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 4$, eccetera). Sia

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\pi_k}{20^k} \, \chi_{[2^k, 2^{k+1})}(x) .$$

Calcolare l'integrale di f su $[1, +\infty)$.

5) Sia $f_n(x) = f(x) \, \chi_{[\frac{1}{n}, 1]}(x)$, con $f(x) = \cos^{19}(\pi \, x)$. Calcolare il limite per n tendente ad infinito dell'integrale di f_n su $[0,1]$.

6) Sia $f_n(x) = \frac{1}{1+x^2} \, \chi_{[n, n+2)}(x)$, e sia

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) .$$

Calcolare l'integrale di g su $[0, +\infty)$.

7) Sia

$$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{x}} \, \frac{1}{1 + nx^2} , \qquad x \in (0,1) .$$

Calcolare il limite per n tendente ad infinito dell'integrale di f_n su $(0,1)$.

8) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sommabile, sia $A_n = \{x \in \mathbf{R} : -n \leq f(x) \leq n\}$, e sia $f_n(x) = f(x) \, \chi_{A_n}(x)$. Calcolare il limite per n tendente ad infinito dell'integrale di f_n su $\mathbf{R}$.

9) Sia $f : E \to \mathbf{R}$ non negativa e sommabile, e sia $m(E) < +\infty$. Siano $A_n = \{x \in E : f(x) \geq n\}$ e $B_n = \{x \in E : n \leq f(x) < n + 1\}$. Dimostrare che si ha

$$\int_E f(x) \, dx \leq \sum_{k=0}^{+\infty} m(A_k) \leq \int_E [f(x) + 1] \, dx .$$

Suggerimento: si usi il fatto che A_n è l'unione disgiunta (per $k \geq n$) dei B_k.

10) Sia $f : E \to \mathbf{R}$ non negativa e misurabile, e sia $m(E) < +\infty$. Sia $A_t = \{x \in E : f(x) \geq t\}$, e supponiamo che $m(A_t) \leq \frac{1}{t^2}$ per ogni $t > 0$. Dimostrare che f è sommabile su E.