## Esercizi 5

**1)** Sia $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x$ in $(0,1)$, e $g(x) = 0$ altrove. Sia $\{x_k\}$ una successione di numeri reali. Dimostrare che appartiene a $L^1(\mathbf{R})$ la funzione

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{g(x - x_k)}{2^k}\,.$$

Calcolare l'integrale di $f$ su $\mathbf{R}$ ed il limite di $f(x)$ per $x$ tendente a $x_k$ da destra.

**2)** Sia

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \chi_{[0,n]}(x)\,.$$

Dimostrare che $f_n$ converge in $L^1([0,+\infty))$ a $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

**3)** Sia

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + (x-n)^2}\,.$$

Trovare il limite di $f_n$ in $L^1([0,+\infty))$, in $L^p([0,+\infty))$ (per $p > 1$), ed in $L^\infty([0,+\infty))$.

**4)** Sia $\alpha > 0$ e sia

$$f_n(x) = \frac{1}{n^\alpha}\,\chi_{[n,2n]}(x)\,.$$

Per quali $q \geq 1$ la successione $f_n$ converge a zero in $L^q(\mathbf{R})$? Per quali $q \geq 1$ è in $L^q(\mathbf{R})$ la funzione

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,?$$

Per quali $\alpha > 0$ la successione $f_n$ converge a zero in misura?

**5)** Siano $\alpha$ e $\beta$ numeri reali positivi, e sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\alpha} & \text{se } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{x^\beta} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Per quali $\alpha$ e $\beta$ la funzione $f$ appartiene a $L^p((0,+\infty))$?

**6)** Sia $f$ in $L^1((0,+\infty))$. Dimostrare che se esiste il limite di $f$ a $+\infty$, allora tale limite è 0. Trovare una $f$ in $L^1((0,+\infty))$ tale che il limite a $+\infty$ non esiste.

**7)** Trovare una funzione continua $f$ in $L^1(\mathbf{R})\backslash L^2(\mathbf{R})$ e una funzione continua $g$ in $L^2(\mathbf{R})\backslash L^1(\mathbf{R})$.

**8)** Siano $1 \leq p < q \leq +\infty$, e sia $f$ in $L^p(\mathbf{R}) \cap L^q(\mathbf{R})$. Dimostrare che $f$ appartiene a $L^r(\mathbf{R})$ per ogni $r$ in $[p,q]$, e che si ha

$$\left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1-\alpha}{q}} \qquad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}\,.$$

**9)** Sia $f$ in $L^p((0,1))$ per ogni $p \geq 1$ tale che

$$\left(\int_{(0,1)} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq K\,, \qquad \forall p \geq 1\,.$$

Dimostrare che $f$ è in $L^\infty((0,1))$ e che $\operatorname{ess\,sup}_{(0,1)} |f(x)| \leq K$. Trovare un esempio di funzione che è in tutti gli spazi $L^p((0,1))$, ma non in $L^\infty((0,1))$.

**10)** Sia $p \geq 1$ ed $E$ un insieme misurabile di misura finita. Una funzione misurabile $f : E \to \bar{\mathbf{R}}$ si dice appartenere allo spazio di Marcinkiewicz $M^p(E)$ (detto anche "spazio $L^p$-debole") se esiste una costante non negativa $C$ tale che

$$m(\{x \in E : |f(x)| \geq t\}) \leq \frac{C}{t^p}\,, \qquad \forall t > 0\,.$$

Dimostrare che $L^p(E) \subset M^p(E)$ e che l'inclusione è stretta.