Esercizi 6

1) Sia f in $L^1(\mathbf{R})$, con $f \geq 0$. Sia $f_n(x) = f(nx)$. Calcolare il limite per n tendente ad infinito dell'integrale di f_n su $[0, 1]$. A cosa tende quasi ovunque (se tende) f_n?

2) Sia $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ per x in $[-\pi, \pi]$, e $f(0) = 0$. Sia

$$a_k(f) = \int_{[-\pi,\pi]} f(x) \cos(kx)\, dx\,.$$

Dimostrare che $\{a_k(f)\}$ non è in ℓ^2.

3) Sia

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}(kx)}{k}\,.$$

Calcolare l'integrale di f su $[-\pi, \pi]$ e dimostrare che, detta $g(x) = f^2(x)$, allora $b_k(g) = 0$ per ogni k.

4) Sia f in $L^1([-\pi, \pi])$. Dimostrare che

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{[-\pi,\pi]} f(x) \cos(kx)\, dx = 0\,.$$

Suggerimento: si dimostri che è vero se $f = \chi_{(a,b)}$.

5) Sia $g(x) = \chi_{[0,1]}(x) - \chi_{[-1,0)}(x)$, e sia $\bar{g}$ la prolungata per periodicità su $\mathbf{R}$. Definiamo $g_k(x) = \bar{g}(2^k\, x)$. Dimostrare che, per ogni f in $L^2([-1, 1])$, si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{[-1,1]} f(x)\, g_k(x)\, dx = 0\,.$$

6) Siano $f(x) = x$ e $h(x) = x^2$. Calcolare i coefficienti di Fourier di f e h rispetto al sistema ortonormale $\{g_k\}$ definito nell'esercizio precedente. $\{g_k\}$ è completo?

7) Siano p e q maggiori di 1 e tali che $1/p + 1/q = 1$. Sia g in $L^q(\mathbf{R})$. Sia $F : L^p(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ l'applicazione definita da

$$F(f) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\, g(x)\, dx\,.$$

Dimostrare che F è continua (ovvero che se f_n converge a f in $L^p(\mathbf{R})$, allora $F(f_n)$ converge a $F(f)$ in $\mathbf{R}$).

8) Sia $F : L^2([-\pi, \pi]) \to \mathbf{R}$ lineare e continua. Dimostrare che esiste $C \geq 0$ tale che

$$|F(f)| \leq C \left(\int_{[-\pi,\pi]} |f(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall f \in L^2([-\pi, \pi])\,.$$

Suggerimento: dimostrare per assurdo che non è possibile che $\{f_n\}$ sia 1) limitata in $L^2([-\pi, \pi])$ e 2) tale che $F(f_n)$ diverge.

9) Sia $F : L^2([-\pi, \pi]) \to \mathbf{R}$ lineare e continua. Sia $\{e_k(x)\}$ un sistema ortonormale completo in $L^2([-\pi, \pi])$ (ad esempio, $\mathcal{T}$), e sia $a_k = F(e_k)$. Si dimostri che $\{a_k\}$ è in ℓ^2. Suggerimento: detta $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, e_k(x)$, calcolare $(s_n \,|\, s_n)$, $F(s_n)$, ed usare l'esercizio precedente.

10) Sia $F : L^2([-\pi, \pi]) \to \mathbf{R}$ lineare e continua, e sia $\{a_k\}$ come nell'esercizio precedente; sia

$$g_F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\, e_k(x)\,.$$

Dimostrare che

$$F(f) = \int_{[-\pi,\pi]} f(x)\, g_F(x)\, dx = (f \,|\, g_F)\,, \qquad \forall f \in L^2([-\pi, \pi])\,.$$

Concludere che per ogni applicazione lineare e continua da $L^2([-\pi, \pi])$ in $\mathbf{R}$ esiste g_F in $L^2([-\pi, \pi])$ tale che $F(f) = (f \,|\, g_F)$, e viceversa, che se g è in $L^2([-\pi, \pi])$, $F(f) = (f \,|\, g)$ è lineare e continua su $L^2([-\pi, \pi])$ (che analogia c'è con il duale di $\mathbf{R}^N$?).