Esercizi 1

1) Tutte le distanze introdotte a lezione (meno la metrica discreta) sono *invarianti per traslazioni*; ovvero, $d(x,y) = d(x+z, y+z)$ per ogni x, y e z. Definire su $X = \mathbf{R}$ una metrica non invariante per traslazioni (che non sia la discreta!).

Ad esempio, $d(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ per ogni funzione φ iniettiva su $\mathbf{R}$ (e diversa dall'identità!). Si noti che la metrica discreta non è in generale invariante per traslazioni perché può essere definita su un insieme che non è uno spazio vettoriale (e quindi le traslazioni non hanno senso).

2) Sia X lo spazio delle funzioni integrabili secondo Riemann su $[a,b]$. Perché non è una metrica su X la funzione $d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$?

Perchè se g è ottenuta da f modificandone il valore in un solo punto, g è diversa da f ma l'integrale del modulo di $|f(x) - g(x)|$, ovvero $d(f,g)$, vale zero.

3) Sia $X = C^\infty([a,b], \mathbf{R})$. Definiamo

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_\infty(f^{(n)}, g^{(n)})}{1 + d_\infty(f^{(n)}, g^{(n)})}, \qquad f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Mostrare che d è una distanza su X e determinare $B_d(0,4)$.

Osserviamo innanzitutto che $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ è una funzione minore di 1 su $[0,+\infty)$. Pertanto

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_\infty(f^{(n)}, g^{(n)})}{1 + d_\infty(f^{(n)}, g^{(n)})} \le \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2\,,$$

e quindi d è ben definita su $X \times X$. Evidentemente, d è simmetrica e non negativa; se $d(f,g) = 0$, ogni addendo della serie deve essere nullo, ed in particolare il primo. Siccome $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ si annulla solo per $t = 0$, ciò vuol dire che $d_\infty(f,g) = 0$, da cui $f \equiv g$. Per verificare la disuguaglianza triangolare, osserviamo che la funzione $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ è crescente su $[0,+\infty)$; pertanto, essendo per ogni f, g e h in X, e per ogni n in $\mathbf{N}$,

$$d_\infty(f^{(n)}, g^{(n)}) \le d_\infty(f^{(n)}, h^{(n)}) + d_\infty(h^{(n)}, g^{(n)})\,,$$

si ha,

$$\frac{d_\infty(f^{(n)}, g^{(n)})}{1 + d_\infty(f^{(n)}, g^{(n)})} \le \frac{d_\infty(f^{(n)}, h^{(n)}) + d_\infty(h^{(n)}, g^{(n)})}{1 + d_\infty(f^{(n)}, h^{(n)}) + d_\infty(h^{(n)}, g^{(n)})} \le \frac{d_\infty(f^{(n)}, h^{(n)})}{1 + d_\infty(f^{(n)}, h^{(n)})} + \frac{d_\infty(h^{(n)}, g^{(n)})}{1 + d_\infty(h^{(n)}, g^{(n)})}.$$

Moltiplicando per $\frac{1}{2^n}$ e sommando su n, si ha la disuguaglianza triangolare per d. Infine, essendo

$$d(f,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_\infty(f^{(n)}, 0)}{1 + d_\infty(f^{(n)}, 0)} \le \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2\,,$$

si ha $B_d(0,4) \equiv X$.

4) Verificare che la successione $\{x^{(n)}\}$ definita da $x_k^{(n)} = \frac{1}{n+k}$ per ogni k in $\mathbf{N}$ converge a zero in ℓ^2.

Si ha

$$d_2(x^{(n)}, 0) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+k)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{h=n+1}^{+\infty} \frac{1}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dal momento che la serie di termine generico $1/h^2$ è convergente, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{h=n+1}^{+\infty} \frac{1}{h^2} = 0\,,$$

da cui la tesi.

5) Sia $\{x^n\}$ definita da $x_k^{(n)} = \frac{1}{k}$ per ogni $k \le n$ e zero altrimenti. A cosa converge $x^{(n)}$ in ℓ^2? E in ℓ^1?

Sia $x_k = \frac{1}{k}$ per ogni k in $\mathbf{N}$. Allora x^n converge a x in ℓ^2. Infatti

$$d_2^2(x^n, x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\,,$$

che tende a zero per n tendente ad infinito (dal momento che la serie di termine generico $\frac{1}{k^2}$ è convergente). Dal momento che x_k^n converge a $\frac{1}{k}$ quando n diverge, per ogni k, e siccome la convergenza in ℓ^1 implica la convergenza componente per componente, la successione x^n non converge in ℓ^1 (dato che $x \notin \ell^1$).

6) Una successione $\{x^{(n)}\}$ in ℓ^p $(p > 1)$ si dice *debolmente* convergente a x in ℓ^p se si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} x_k^{(n)}\, y_k \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k\, y_k\,, \qquad \forall y \in \ell^q\,,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Mostrare che se $\{x^{(n)}\}$ converge debolmente a x in ℓ^p, allora $\{x_h^{(n)}\}$ converge a x_h per ogni h in $\mathbf{N}$.

Sia h in $\mathbf{N}$ e sia $y^{[h]}$ la successione di ℓ^q i cui termini sono tutti nulli tranne l'h-mo che vale 1. Allora

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k^{(n)}\, y_h^{[k]} = x_h^{(n)}\,, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} x_k\, y_h^{[k]} = x_h\,,$$

e pertanto $x_h^{(n)}$ converge a x_h per ipotesi.

7) Mostrare che ogni successione che converge in (ℓ^p, d_p) $(p > 1)$ converge debolmente (allo stesso limite). Trovare una successione che converge debolmente a zero in ℓ^p, ma non in (ℓ^p, d_p).

Per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} x_k^{(n)}\, y_k - \sum_{k=1}^{+\infty} x_k\, y_k \right| \le \left| \sum_{k=1}^{+\infty} (x_k^{(n)} - x_k)\, y_k \right| \le d_p(x^{(n)}, x)\, d_q(y, 0)\,,$$

e quindi la tesi, essendo $d_p(x^{(n)}, x)$ tendente a zero. Sia poi $x^{(n)}$ la successione così definita:

$$x_k^{(n)} = \delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{1}$$

Allora, essendo $d_p(x^{(n)}, 0) = 1$ per ogni n, la successione non converge a zero in (ℓ^p, d_p). Si ha però

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k^{(n)}\, y_k = y_n\,,$$

che tende a zero, qualsiasi sia y in ℓ^q, quando n tende ad infinito (perché ogni successione in ℓ^q è infinitesima per la condizione necessaria di convergenza).

8) Un sottoinsieme K di uno spazio metrico (X,d) si dice *compatto per successioni* se da ogni successione $\{x_n\}$ contenuta in K si può estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente ad un elemento x di K. Mostrare che $\bar{B}_{(\ell^2,d_2)}(0,1) = \{x = \{x_n\} \in \ell^2 : d_2(x,0) \le 1\}$ non è compatto per successioni (pur essendo chiuso e limitato).

La successione $\{x^{(n)}\}$ definita in (1) è in $\bar{B}_{(\ell^2,d_2)}(0,1)$ ma non ammette sottosuccessioni convergenti.

9) Si consideri $X = C^1([a,b],\mathbf{R})$ con la distanza $d(f,g) = d_\infty(f',g') + |f(a) - g(a)|$. Mostrare che (X,d) è completo.

Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in (X,d). Questo vuol dire che la successione $\{f_n'\}$ è di Cauchy in $(C^0([a,b],\mathbf{R}), d_\infty)$ e che la successione $\{f_n(a)\}$ è di Cauchy in $(\mathbf{R}, |\cdot|)$. Essendo entrambi gli spazi completi, f_n' converge uniformemente ad una funzione g, e $f_n(a)$ converge ad un valore λ. Definendo

$$f(x) = \lambda + \int_a^x g(t)\,dt\,,$$

si ha (vedere Analisi II) che f_n converge (uniformemente) ad f e che $f' = g$; pertanto, f è in X e f_n converge a f in (X,d).

10) Sia $\# : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to [0,+\infty]$, l'applicazione che ad ogni sottoinsieme di $\mathbf{N}$ associa la sua cardinalità, ovvero $\#(E) =$ (il numero degli elementi di E) se E è finito, $+\infty$ altrimenti. Verificare che, per ogni sottoinsieme E di $\mathbf{N}$ si ha

$$\#(A) = \#(A \cap E) + \#(A \cap E^c)\,, \qquad \forall A \in \mathcal{P}(\mathbf{N})\,.$$

Verificare inoltre che se $\{E_n\}$ è una successione di sottoinsiemi di $\mathbf{N}$ a due a due disgiunti, si ha

$$\#\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \#(E_n)\,.$$

Se E è un sottoinsieme finito di $\mathbf{N}$, $f : E \to \mathbf{R}$, e $p \ge 1$, si definisca

$$\int_E |f(n)|^p\,d\# = \sum_{n\in E} |f(n)|^p\,.$$

Si definisca poi, per $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$,

$$\int_{\mathbf{N}} |f(n)|^p\,d\#$$

così come si definisce l'integrale improprio secondo Riemann su $\mathbf{R}$. Determinare successivamente

$$X = \{f : \mathbf{N} \to \mathbf{R} : \int_{\mathbf{N}} |f(n)|^p\,d\# < +\infty\}\,.$$

Per rispondere alla prima domanda è sufficiente verificare i due casi possibili per A (finito o infinito). La verifica della seconda formula è semplice; gli unici casi "complicati" sono: 1) quando tutti gli E_n, tranne un numero finito, sono l'insieme vuoto e 2) quando tutti gli E_n sono finiti, ed un numero infinito di essi è non vuoto. Ricordando la definizione di integrale secondo Riemann su $\mathbf{R}$, si ha, detto $E_m = \{1,\ldots,m\}$,

$$\int_{\mathbf{N}} |f(n)|^p\,d\# = \lim_{m\to+\infty} \int_{E_m} |f(n)|^p\,d\# = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} |f(n)|^p = \sum_{n=1}^{+\infty} |f(n)|^p\,.$$

Si osservi che il limite delle somme parziali esiste sempre perché la successione $\{|f(n)|^p\}$ è a termini positivi. Evidentemente, essendo $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ una successione, $X = \ell^p$.

Esercizi 2

1) Sia $\mathcal{M}$ la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue. Dati E e F in $\mathcal{M}$, definiamo la differenza simmetrica $E\Delta F = (E\backslash F) \cup (F\backslash E)$. Definiamo la relazione ρ nel seguente modo: $E \,\rho\, F$ se e solo se $m(E\Delta F) = 0$. Mostrare che ρ è una relazione di equivalenza.

Evidentemente, $E \,\rho\, E$ per ogni E in $\mathcal{M}$, dato che $E\Delta E = \emptyset$. Inoltre, se $E \,\rho\, F$, allora $F \,\rho\, E$ dato che la definizione di differenza simmetrica è simmetrica in E e F. Infine, supponiamo che $E \,\rho\, F$ e $F \,\rho\, G$. Si ha

$$E\backslash G = E\cap G^c\cap \mathbf{R} = E\cap G^c\cap(F\cup F^c) = (E\cap G^c\cap F^c)\cup(E\cap G^c\cap F) \subseteq (E\cap F^c)\cup(F\cap G^c) = (E\backslash F)\cup(F\backslash G)\,.$$

Analogamente,

$$G\backslash E \subseteq (G\backslash F) \cup (F\backslash E)\,,$$

e quindi

$$E\Delta G \subseteq (E\Delta F) \cup (F\Delta G)\,. \tag{1}$$

Pertanto, essendo la misura subadditiva,

$$m(E\Delta G) \leq m(E\Delta F) + m(F\Delta G) = 0\,,$$

e quindi $E \,\rho\, G$.

2) Sia $\mathcal{M}' = \mathcal{M}/\rho$. Calcolare $[\emptyset]$. Dare un esempio di almeno cinque insiemi in $[(0,1)]$.

Si ha $E \in [\emptyset]$ se e solo se $m(E\Delta\emptyset) = 0$; essendo $E\Delta\emptyset = E$, ne segue che

$$[\emptyset] = \{E \in \mathcal{M} : m(E) = 0\}\,.$$

Per quanto riguarda la seconda parte, sono in $[(0,1)]$ gli intervalli $(0,1)$, $[0,1)$, $(0,1]$ e $[0,1]$, nonché (ad esempio) l'insieme $[0,1/2) \cup (1/2,1]$.

3) Sia $d : \mathcal{M}' \times \mathcal{M}' \to \bar{\mathbf{R}}$ definita da $d([E],[F]) = m(E\Delta F)$, con $E \in [E]$ e $F \in [F]$. Mostrare che d è ben definita (ovvero che non dipende dalla scelta di E e F) e che è una distanza su $\mathcal{M}'$.

Se E' è in $[E]$ e F' è in $[F]$, allora, per definizione, $m(E\Delta E') = m(F\Delta F') = 0$. Si ha, usando la (1),

$$E'\Delta F' \subseteq (E'\Delta E) \cup (E\Delta F') \subseteq (E'\Delta E) \cup (E\Delta F) \cup (F\Delta F')\,.$$

Passando alle misure,

$$m(E'\Delta F') \leq m(E'\Delta E) + m(E\Delta F) + m(F\Delta F') = m(E\Delta F)\,.$$

Ripetendo il ragionamento a partire da $E\Delta F$ si trova la disuguaglianza opposta e quindi $m(E\Delta F) = m(E'\Delta F')$; pertanto, $d([E],[F])$ non dipende dal rappresentante. Sono inoltre evidenti la positività di d, il fatto che d si annulli se e solo se $[E] = [F]$ (per definizione di ρ), e la simmetria. La disuguaglianza triangolare segue, ancora una volta, da (1) e dalla monotonia e subadditività della misura.

4) Sia $E_n = [n, n+1)$. Calcolare, se esiste, il limite di $\{E_n\}$ in $(\mathcal{M}', d)$. Sia poi $F_n = [\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$; Calcolare, se esiste, il limite di $\{F_n\}$ in $(\mathcal{M}', d)$.

Se $n \neq m$ si ha $d([E_n], [E_m]) = m(E_n \Delta E_m) = m([n, n+1) \cup [m, m+1)) = 2$. Pertanto, la successione $\{[E_n]\}$ non è di Cauchy in $(\mathcal{M}', d)$ e quindi non converge. Detto $F = (0, 1)$, si ha poi

$$d([F_n], [F]) = m(F_n \Delta F) = m\left(\left(0, \frac{1}{n}\right) \cup \left[1, \frac{1}{n}\right]\right) = \frac{2}{n}\,,$$

che tende a zero. Pertanto, $[F_n]$ converge a $[F]$.

5) Sia $\{E_n\}$ una successione di insiemi misurabili; definiamo

$$\liminf_{n \to +\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{m \geq n} E_m \right), \qquad \limsup_{n \to +\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{m \geq n} E_m \right).$$

Dopo aver verificato che $\liminf\limits_{n \to +\infty} E_n \subseteq \limsup\limits_{n \to +\infty} E_n$, mostrare che sono entrambi misurabili e provare che

$$m(\limsup_{n \to +\infty} E_n) = \lim_{n \to +\infty} m\left(\bigcup_{m \geq n} E_m \right),$$

e che, se la misura dell'unione degli E_n è finita, allora

$$m(\liminf_{n \to +\infty} E_n) = \lim_{n \to +\infty} m\left(\bigcap_{m \geq n} E_m \right).$$

Sia x appartenente a $\liminf\limits_{n \to +\infty} E_n$. Allora esiste $n = n(x)$ tale che

$$x \in \bigcap_{m \geq n(x)} E_m\,.$$

Pertanto, x appartiene a E_m per ogni $m \geq n(x)$, ovvero definitivamente; dunque, qualsiasi sia n in $\mathbf{N}$, si ha

$$x \in \bigcup_{m \geq n} E_m\,,$$

e quindi è in $\limsup\limits_{n \to +\infty} E_n$. La misurabilità di $\liminf\limits_{n \to +\infty} E_n$ e $\limsup\limits_{n \to +\infty} E_n$ segue dalle proprietà degli insiemi misurabili rispetto ad unioni e intersezioni numerabili. Sia poi, per n in $\mathbf{N}$,

$$G_n = \bigcap_{m \geq n} E_m\,.$$

Allora G_n è una successione crescente di insiemi misurabili e pertanto (teorema dimostrato a lezione)

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n \right) = \lim_{n \to +\infty} m(G_n)\,,$$

da cui la tesi osservando che l'unione dei G_n è $\liminf\limits_{n \to +\infty} E_n$. Un ragionamento analogo permette di provare la seconda formula (usando l'ipotesi che la misura dell'unione degli E_n sia finita).

6) Sia $\{E_n\}$ una successione crescente di insiemi misurabili; mostrare che $\liminf\limits_{n \to +\infty} E_n = \limsup\limits_{n \to +\infty} E_n$; mostrare inoltre che se l'unione E degli E_n ha misura finita, allora $d(E_n, E)$ tende a zero. Analogamente, se $\{E_n\}$ è una successione decrescente di insiemi misurabili; mostrare che $\liminf\limits_{n\to+\infty} E_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} E_n$ e che se $m(E_1) < +\infty$ e E è l'intersezione E degli E_n, allora $d(E_n, E)$ tende a zero.

Dal momento che $E_n \subseteq E_{n+1}$ si ha, per ogni n in $\mathbf{N}$,

$$\bigcap_{m\geq n} E_m = E_n\,, \qquad \bigcup_{m\geq n} E_m = \bigcup_{m\geq 1} E_m\,.$$

Pertanto

$$\liminf_{n\to+\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcap_{m\geq n} E_m\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{m\geq 1} E_m\right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{m\geq n} E_m\right) = \limsup_{n\to+\infty} E_n\,.$$

Dal momento che E contiene E_n per ogni n, si ha $E\Delta E_n = E\backslash E_n$, e quindi $d(E_n, E) = m(E\backslash E_n)$. D'altra parte, essendo E_n l'unione degli E_m con $m \leq n$, si ha

$$G_n = E\backslash E_n = \bigcup_{m=n+1}^{+\infty} E_m\,.$$

La successione G_n è decrescente all'insieme vuoto e G_1 ha misura finita per ipotesi. Pertanto,

$$0 = m(\emptyset) = \lim_{n\to+\infty} m(G_n) = \lim_{n\to+\infty} m(E\backslash E_n) = \lim_{n\to+\infty} d(E_n, E)\,.$$

La seconda parte dell'esercizio si svolge in maniera analoga.

7) Sia α in $(0,1)$ e sia C_α l'insieme ottenuto da $[0,1]$ come l'insieme di Cantor, ma togliendo al passo n intervalli di ampiezza $\alpha/3^n$. Calcolare $m(C_\alpha)$.

Nella costruzione di C_α, ottenuto come $[0,1]\backslash A_\alpha$, A_α è l'unione disgiunta infinita di E_n, un'unione di 2^n intervalli disgiunti di ampiezza $\alpha/3^n$. Si ha allora

$$m(E_n) = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{\alpha}{3^n} = \alpha\,\frac{2^n}{3^n}\,.$$

Pertanto,

$$m(A_\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha\,\frac{2^n}{3^n} = \alpha\,,$$

da cui segue che $m(C_\alpha) = 1 - \alpha$.

8) Sia $P \subset [0,1]$ un insieme non misurabile. Mostrare che $P \times \{x_0\}$ è misurabile in $\mathbf{R}^2$ per ogni x_0 in $[0,1]$, ma che $P \times [0,1]$ non lo è.

Si ha $P \times \{x_0\} \subset [0,1] \times (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ e pertanto

$$m^*(P \times \{x_0\}) \leq m^*([0,1] \times (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)) = 2\varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di ε, si ha $m^*(P \times \{x_0\}) = 0$ e quindi $P \times \{x_0\})$ è misurabile. Per provare che $P \times [0,1]$ non è misurabile, è sufficiente osservare che, detto $P_i = P \oplus r_i$ (come nella dimostrazione della non misurabilità di P) si ha

$$[0,1] \times [0,1] = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (P_i \times [0,1])\,,$$

che l'unione è disgiunta, e che $m^*(P_i \times [0,1]) = m^*(P \times [0,1])$.

9) Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione continua e crescente con $f(0) \geq 0$. Mostrare che, per ogni k in $\mathbf{R}$,

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geq k\,m(\{x \in [0,1] : f(x) \geq k\})$$

(N.B.: mostrare anche che la formula ha senso, ovvero che $\{x \in [0,1] : f(x) \geq k\}$ è misurabile per ogni k!).

Essendo f continua, f è misurabile, e dunque lo è l'insieme $\{x \in [0,1] : f(x) \geq k\} = E'_k(f)$. Inoltre, essendo f crescente, $\{x \in [0,1] : f(x) \geq k\}$ è un intervallo $[x_k, 1]$ contenuto in $[0,1]$ (eventualmente vuoto). Se $k \leq 0$, non c'è nulla da dimostrare dal momento che l'integrale della f è non negativo, mentre $k\,m(\{x \in [0,1] : f(x) \geq k\}) \leq 0$. Se $0 < k \leq \max\, f(x)$ (e quindi l'intervallo $[x_k, 1]$ è non vuoto),

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_{x_k}^1 f(x)\,dx \geq k \int_{x_k}^1 dx = k\,(1 - x_k) = k\,m(\{x \in [0,1] : f(x) \geq k\})\,.$$

Se $k > \max\, f(x)$, allora l'insieme $\{x \in [0,1] : f(x) \geq k\}$ è vuoto, cosicché la formula è vera essendo l'integrale della f non negativo.

10) Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbf{Q}, \\ x^3 & \text{se } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

mostrare che f è misurabile; dove è continua?

Sia $g(x) = x^2$. La funzione g è continua su $\mathbf{R}$, e pertanto misurabile. Essendo $\mathbf{Q}$ misurabile, la restrizione di g ai razionali è misurabile, il che vuol dire che per ogni α è misurabile l'insieme

$$F_\alpha(g) = \{x \in \mathbf{Q} : g(x) > \alpha\}\,.$$

Analogamente, se $h(x) = x^3$, è misurabile per ogni α l'insieme

$$F_\alpha(h) = \{x \notin \mathbf{Q} : h(x) > \alpha\}\,.$$

Pertanto, l'insieme $E_\alpha(f) = F_\alpha(g) \cup F_\alpha(h)$ è misurabile, e dunque lo è la funzione f. Siccome sia $\mathbf{Q}$ che $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ sono densi in $\mathbf{R}$, f è continua solo nei punti per i quali $x^2 = x^3$, ovvero $x = 0$ e $x = 1$.

Esercizi 3

1) Sia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ misurabile e sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua. Provare che $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $h(x) = f(g(x))$ è misurabile.

Sia α in $\mathbf{R}$ e sia $E = \{x \in \mathbf{R} : f(g(x)) > \alpha\}$. Si ha, ovviamente

$$E = \{x \in \mathbf{R} : g(x) \in E_\alpha(f)\}\,.$$

Essendo f continua, $E_\alpha(f)$ è un aperto di $\mathbf{R}$, e quindi è unione di una famiglia numerabile di intervalli aperti:

$$E_\alpha(f) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (a_n, b_n)\,.$$

Pertanto,

$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{x \in \mathbf{R} : a_n < g(x) < b_n\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [E_{a_n}(g) \cap E''_{b_n}(g)]\,,$$

e quindi E è misurabile come unione numerabile di insiemi misurabili.

2) Trovare una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ di classe C^1, e una funzione non misurabile $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $h(x) = f(g(x))$ sia misurabile.

Ad esempio, $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ e $g(x) = \pi\,\chi_P(x)$, con P non misurabile.

3) Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione misurabile, e definiamo $g(t) = m(\{x \in [0,1] : f(x) \geq t\})$. Provare che g è decrescente e che

$$\lim_{t \to (t_0)^-} g(t) = g(t_0)\,, \qquad \forall t_0 \in \mathbf{R}\,.$$

Data f definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2, \\ x - 2 & \text{se } 2 < x \leq 3, \end{cases}$$

calcolare $g(t)$.

Se $s > t$, allora $\{x \in [0,1] : f(x) \geq s\} \subseteq \{x \in [0,1] : f(x) \geq t\}$; la decrescenza di g segue allora dalla monotonia della misura. Se $\{t_n\}$ è una successione crescente e convergente a t_0, si ha

$$\{x \in [0,1] : f(x) \geq t_0\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{x \in [0,1] : f(x) \geq t_n\}\,,$$

Inoltre, $m(\{x \in [0,1] : f(x) \geq t_1\}) \leq m([0,1]) = 1$, e $\{x \in [0,1] : f(x) \geq t_{n+1}\} \subseteq \{x \in [0,1] : f(x) \geq t_n\}$. Pertanto,

$$g(t_0) = m(\{x \in [0,1] : f(x) \geq t_0\}) = \lim_{n \to +\infty} m(\{x \in [0,1] : f(x) \geq t_n\}) = \lim_{n \to +\infty} g(t_n)\,,$$

da cui la tesi. Per la funzione f data si ha

$$g(t) = \begin{cases} 3 & \text{se } t \leq 0, \\ 3 - t & \text{se } 0 < t \leq 1, \\ 2 - t & \text{se } 1 < t \leq 2, \\ 0 & \text{se } t > 2. \end{cases}$$

Si noti che $g(1) = 2$ è diverso dal limite di $g(t)$ per t tendente a 1 da destra (che vale 1).

4) Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ misurabile, e sia $A = f([0,1])$. Provare che per ogni α in A, tranne al più un'infinità numerabile, si ha $m(G_\alpha(f)) = 0$. Suggerimento: si usi l'esercizio precedente ed il fatto (dato per buono) che ogni funzione monotona ha al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità.

Sia g associata ad f come nell'esercizio precedente. Sappiamo già che il limite da sinistra di $g(t)$ in t_0 è $g(t_0)$. Calcoliamo il limite da destra; sia $\{t_n\}$ una successione decrescente a t_0; allora

$$\{x \in [0,1] : f(x) \geq t_0\} = \{x \in [0,1] : f(x) = t_0\} \cup \{x \in [0,1] : f(x) > t_0\}\,.$$

La successione $\{x \in [0,1] : f(x) \geq t_n\}$ è una successione monotona crescente di insiemi, la cui unione è $\{x \in [0,1] : f(x) > t_0\}$, e quindi

$$m(\{x \in [0,1] : f(x) > t_0\}) = \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in [0,1] : f(x) \geq t_n\}) = \lim_{t\to(t_0)^+} g(t)\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{t\to(t_0)^-} g(t) = g(t_0) = m(\{x \in [0,1] : f(x) = t_0\} + \lim_{t\to(t_0)^+} g(t)\,,$$

e quindi la funzione g è discontinua soltanto per i valori t_0 per i quali $m(\{x \in [0,1] : f(x) = t_0) \neq 0$. Dal momento che g è decrescente, l'insieme di tali valori è numerabile, e quindi si ha la tesi.

5) Sia $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ misurabile, limitata e nonnegativa. Per ogni sottoinsieme misurabile E di $[0,1]$ definiamo

$$\mu(E) = \int_E f(x)\,dx\,.$$

Provare che $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$ per ogni coppia di insiemi misurabili E e F. Lo stesso risultato è vero per l'unione di infiniti insiemi $\{E_n\}$?

Si ha $\chi_E + \chi_F \geq \chi_{E\cup F}$, e pertanto, essendo f non negativa,

$$\int_E f(x)\,dx + \int_F f(x)\,dx = \int_{[0,1]} f(x)\,[\chi_E(x) + \chi_F(x)]\,dx \geq \int_{[0,1]} f(x)\,\chi_{E\cup F}(x)\,dx = \int_{E\cup F} f(x)\,dx\,,$$

da cui la tesi. Sia poi E_N l'unione per n da 1 a N di E_n. Allora la successione $f\,\chi_{E_N}$ converge in maniera monotona crescente a $f\,\chi_E$, dove E è l'unione degli E_n. Per il teorema di convergenza monotona, e per quanto appena dimostrato,

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_{E_N} f(x)\,dx \leq \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_{E_n} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} f(x)\,dx\,.$$

6) Dare un esempio di successione f_n definita su $[0,1]$, convergente quasi ovunque ad f e tale che

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\,dx > \int_{[0,1]} f(x)\,dx\,.$$

Ad esempio, la successione $f_n(x) = n\,\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$. f_n tende a zero quasi ovunque, ma l'integrale di f_n vale 1 per ogni n in $\mathbf{N}$.

7) Sia $f : [0,1]$ una funzione decrescente, limitata e continua in zero. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f\left(\frac{x}{n}\right)\,dx\,.$$

Innanzitutto, essendo f monotona e limitata, f è integrabile secondo Riemann; pertanto, è integrabile secondo Lebesgue e quindi è misurabile. Ma allora $f\left(\frac{x}{n}\right)$ è misurabile (come si verifica facilmente usando la definizione di misurabilità). Inoltre, essendo $\frac{x}{n+1} \le \frac{x}{n}$ per ogni x in $[0,1]$, si ha $f\left(\frac{x}{n}\right) \le f\left(\frac{x}{n+1}\right)$ per ogni x in $[0,1]$. Pertanto, la successione $f_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$ è monotona crescente e converge ovunque a $f(0)$ (essendo f continua in 0). Per il teorema di convergenza monotona, si ha allora

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f\left(\frac{x}{n}\right)\,dx = \int_{[0,1]} f(0)\,dx = f(0)\,.$$

8) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} \frac{x}{1+x^{2n}}\,dx\,.$$

Primo modo: la successione $f_n(x) = \frac{x}{1+x^{2n}}$ converge quasi ovunque in $[0,1]$ a $f(x) = x$; essendo $|f_n(x)| \le 1$, per il teorema di convergenza limitata, l'integrale di f_n tende all'integrale di f, cioè $\frac{1}{2}$. Secondo modo: la convergenza di f_n a f è monotona.

9) Sia $\{q_n\}$ un'enumerazione dei razionali in $[0,1]$, e sia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{\left(q_n - \frac{1}{2^{n+1}},\, q_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}(x)\,.$$

Calcolare l'integrale di f su $\mathbf{R}$.

La successione

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \chi_{\left(q_n - \frac{1}{2^{n+1}},\, q_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)}(x)\,,$$

converge in maniera monotona ad f. Pertanto,

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} f_N(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = 2\,.$$

10) Sia $\{\pi_k\}$ la successione delle cifre decimali di π (ad esempio, $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 4$, $\pi_3 = 1$, $\pi_4 = 5$, eccetera). Sia $a_k = 2$ se π_k è pari, e $a_k = 1$ se π_k è dispari. Detta

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\, \chi_{\left[\frac{1}{2^k},\, \frac{1}{2^{k-1}}\right)}(x)\,,$$

calcolare l'integrale di f su $[0,1]$ con un errore inferiore ad $1/8$.

Con lo stesso ragionamento dell'esercizio precedente,

$$\int_{[0,1]} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \sum_{k=5}^{+\infty} \frac{a_k}{2_k} = \frac{19}{16} + \sum_{k=5}^{+\infty} \frac{a_k}{2_k}\,.$$

Essendo $1 \le a_k \le 2$ per ogni k, si ha

$$\frac{1}{16} = \sum_{k=5}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \le \sum_{k=5}^{+\infty} \frac{a_k}{2_k} \le \sum_{k=5}^{+\infty} \frac{2}{2^k} = \frac{1}{8}\,.$$

Pertanto, l'integrale di f vale $\frac{19}{16}$ con un errore inferiore ad $1/8$ (strettamente inferiore, dal momento che almeno uno dei π_k con $k \ge 5$ è dispari).

Esercizi 4

1) Sia E un insieme misurabile con $m(E) < +\infty$. Dimostrare che f_n converge a f in misura se e solo se

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|}\, dx = 0\,.$$

Se l'integrale tende a zero, allora, essendo la funzione $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ crescente,

$$m(\{|f_n(x)-f(x)| > \lambda\}) \le \frac{1+\lambda}{\lambda} \int_{\{|f_n(x)-f(x)|>\lambda\}} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|}\, dx \le \frac{1+\lambda}{\lambda} \int_E \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|}\, dx\,,$$

da cui segue la convergenza in misura di f_n a f. Viceversa, si ha, essendo $0 \le \frac{t}{1+t} \le \min(t, 1)$,

$$\begin{aligned}\int_E \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|}\, dx &= \int_{\{|f_n(x)-f(x)|\le\lambda\}} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|}\, dx \\ &\quad + \int_{\{|f_n(x)-f(x)|>\lambda\}} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|}\, dx\,, \\ &\le \lambda\, m(E) + m(\{|f_n(x) - f(x)| > \lambda\})\,,\end{aligned}$$

e quindi la tesi, prima scegliendo λ in modo che $\lambda\, m(E)$ sia minore di $\varepsilon/2$, e successivamente n grande in modo che $m(\{|f_n(x) - f(x)| > \lambda\}) \le \varepsilon/2$.

2) Sia f sommabile su $[0, 1]$ e sia

$$F(t) = \int_{[0,t]} f(x)\, dx\,.$$

Dimostrare che F è continua su $[0, 1]$.

Sia $\{t_n\}$ una successione convergente a t_0 in $[0, 1]$. Allora $\chi_{[0,t_n]}$ converge quasi ovunque a $\chi_{[0,t_0]}$. Pertanto, $f\,\chi_{[0,t_n]}$ converge quasi ovunque a $f\,\chi_{[0,t_0]}$. D'altra parte, $|f\,\chi_{[0,t_n]}| \le |f|$, e $|f|$ è sommabile per ipotesi. La continuità della F segue allora dal Teorema di Lebesgue.

3) Siano f e g sommabili su E, e sia

$$H(t) = \int_{E_t(f)} g(x)\, dx\,, \qquad E_t(f) = \{x \in E : f(x) > t\}\,.$$

Calcolare il limite di $H(t)$ per t tendente a $+\infty$ e per t tendente a $-\infty$.

Essendo f sommabile, $m(\{x \in E : f(x) = +\infty\}) = m(\{x \in E : f(x) = -\infty\}) = 0$. È facile allora vedere che $\chi_{E_t(f)}$ tende a zero quasi ovunque per t tendente a $+\infty$, mentre tende a 1 quasi ovunque per t tendente a $-\infty$. Dal momento che $|g\,\chi_{E_t(f)}| \le |g|$, e $|g|$ è sommabile, si ha (per il Teorema di Lebesgue)

$$\lim_{t\to+\infty} H(t) = 0\,, \qquad \lim_{t\to-\infty} H(t) = \int_E g(x)\, dx\,.$$

4) Sia $\{\pi_k\}$ la successione delle cifre decimali di π ($\pi_0 = 3$, $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 4$, eccetera). Sia

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\pi_k}{20^k}\, \chi_{[2^k, 2^{k+1})}(x)\,.$$

Calcolare l'integrale di f su $[1,+\infty)$.

Si ha (per uno dei corollari al Teorema di convergenza monotona),

$$\int_{[1,+\infty)} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_{[1,+\infty)} \frac{\pi_k}{20^k}\, \chi_{[2^k,2^{k+1})}(x)\,dx \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\pi_k}{20^k}\, 2^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\pi_k}{10^k} = \pi\,.$$

5) Sia $f_n(x) = f(x)\,\chi_{[\frac{1}{n},1]}(x)$, con $f(x) = \cos^{19}(\pi\,x)$. Calcolare il limite per n tendente ad infinito dell'integrale di f_n su $[0,1]$.

Applicando il Teorema di convergenza limitata (o dominata),

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\,dx = \int_{[0,1]} \cos^{19}(\pi\,x)\,dx = 0\,,$$

dal momento che $\cos^{19}(\pi\,x)$ è "dispari" rispetto alla retta $x = 1/2$.

6) Sia $f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}\,\chi_{[n,n+2)}(x)$, e sia

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,.$$

Calcolare l'integrale di g su $[0,+\infty)$.

Per un corollario del Teorema di convergenza monotona,

$$\int_{[0,+\infty)} g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{[0,+\infty)} f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{[k,k+2)} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} [\operatorname{arc\,tg}(k+2) - \operatorname{arc\,tg}(k)] = \frac{3\pi}{4}\,.$$

7) Sia

$$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{1+nx^2}\,, \qquad x \in (0,1)\,.$$

Calcolare il limite per n tendente ad infinito dell'integrale di f_n su $(0,1)$.

La successione $f_n(x)$ converge puntualmente a zero in $(0,1)$. Inoltre,

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

Dal momento che $g(x) = 1/\sqrt{x}$ è sommabile su $(0,1)$, dal Teorema di Lebesgue segue che l'integrale di f_n tende a zero. Per verificare che g è sommabile, si consideri la successione $g_n(x)$ ottenuta da g troncandola a quota n, e sia calcoli l'integrale di g_n (che coincide con il suo integrale secondo Riemann, essendo g_n continua).

8) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sommabile, sia $A_n = \{x \in \mathbf{R} : -n \le f(x) \le n\}$, e sia $f_n(x) = f(x)\,\chi_{A_n}(x)$. Calcolare il limite per n tendente ad infinito dell'integrale di f_n su $\mathbf{R}$.

Essendo f sommabile, χ_{A_n} tende ad 1 quasi ovunque in $\mathbf{R}$ (vanno esclusi i punti in cui f assume il valore $\pm\infty$, ma questi hanno misura nulla). Essendo $|f_n| \le |f|$, per il Teorema di Lebesgue l'integrale di f_n converge all'integrale di f.

9) Sia $f : E \to \mathbf{R}$ non negativa e sommabile, e sia $m(E) < +\infty$. Siano $A_n = \{x \in E : f(x) \geq n\}$ e $B_n = \{x \in E : n \leq f(x) < n+1\}$. Dimostrare che si ha

$$\int_E f(x)\,dx \leq \sum_{k=0}^{+\infty} m(A_k) \leq \int_E [f(x)+1]\,dx\,.$$

Suggerimento: si usi il fatto che A_n è l'unione disgiunta (per $k \geq n$) dei B_k.

Essendo

$$A_k = \bigcup_{h=k}^{+\infty} B_h\,,$$

ed essendo l'unione disgiunta, si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} m(A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{h=k}^{+\infty} m(B_h)\,.$$

Cambiando l'ordine di sommatoria, si ha allora

$$\sum_{k=0}^{+\infty} m(A_k) = \sum_{h=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{h} m(B_h) = \sum_{h=0}^{+\infty} (h+1)\,m(B_h) = \sum_{h=0}^{+\infty} \int_{B_h} [h+1]\,dx\,.$$

Ora, ricordando la definizione di B_h,

$$\int_{B_h} f(x)\,dx = \int_{\{h \leq f(x) < h+1\}} f(x)\,dx \leq \int_{B_h} [h+1]\,dx \leq \int_{\{h \leq f(x) < h+1\}} [f(x)+1]\,dx = \int_{B_h} [f(x)+1]\,dx\,.$$

Pertanto,

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \int_{B_h} f(x)\,dx \leq \sum_{k=0}^{+\infty} m(A_k) \leq \sum_{h=0}^{+\infty} \int_{B_h} [f(x)+1]\,dx\,.$$

Essendo i B_h a due a due disgiunti, ed essendo la loro unione $E\backslash\{f(x) = +\infty\}$ (ovvero, E meno un insieme di misura nulla), si ha

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \int_{B_h} f(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx\,, \qquad \sum_{h=0}^{+\infty} \int_{B_h} [f(x)+1]\,dx = \int_E [f(x)+1]\,dx\,,$$

e quindi la tesi.

10) Sia $f : E \to \mathbf{R}$ non negativa e misurabile, e sia $m(E) < +\infty$. Sia $A_t = \{x \in E : f(x) \geq t\}$, e supponiamo che $m(A_t) \leq \frac{1}{t^2}$ per ogni $t > 0$. Dimostrare che f è sommabile su E.

Il risultato segue dall'esercizio precedente:

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{\{x \in E : f(x) \leq 1\}} f(x)\,dx + \int_{\{x \in E : f(x) > 1\}} f(x)\,dx \leq m(E) + \sum_{k=1}^{+\infty} m(A_k) \leq m(E) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty\,.$$

Esercizi 5

1) Sia $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ per x in $(0,1)$, e $g(x) = 0$ altrove. Sia $\{x_k\}$ una successione di numeri reali. Dimostrare che appartiene a $L^1(\mathbf{R})$ la funzione

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{g(x-x_k)}{2^k}\,.$$

Calcolare l'integrale di f su $\mathbf{R}$ ed il limite di $f(x)$ per x tendente a x_k da destra.

La funzione g appartiene a $L^1(\mathbf{R})$. Infatti

$$\int_{\mathbf{R}} g(x)\,dx = \int_{(0,1)} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \mathrm{R}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\,.$$

Inoltre, per ogni k,

$$\int_{\mathbf{R}} g(x-x_k)\,dx = \int_{(x_k,x_k+1)} \frac{1}{\sqrt{x-x_k}}\,dx = \mathrm{R}\int_{x_k}^{x_k+1} \frac{1}{\sqrt{x-x_k}}\,dx = \mathrm{R}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\,.$$

Essendo $g(x-x_k)/2^k \geq 0$, per il corollario del teorema di convergenza monotona si ha

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \int_{\mathbf{R}} g(x-x_k)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 2\,.$$

Per la risposta alla seconda domanda, si osservi che (essendo $g(x-x_h)/2^h \geq 0$ per ogni h)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{g(x-x_k)}{2^k} \geq \frac{g(x-x_h)}{2^h}\,,$$

e quindi il limite di $f(x)$ per x tendente a x_h da destra è $+\infty$. Lo studente diligente disegni il grafico di f nel caso in cui $\{x_k\} = \mathbf{Q} \cap (0,1)$.

2) Sia

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \chi_{[0,n]}(x)\,.$$

Dimostrare che f_n converge in $L^1([0,+\infty))$ a $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

Si verifica facilmente che f_n converge a f quasi ovunque. Inoltre, per ogni n in $\mathbf{N}$ si ha $f_n(x) \leq \mathrm{e}^{-x}$. Infatti, si ha

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x} \iff 1 - \frac{x}{n} \leq \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}} \iff 1 - t \leq \mathrm{e}^{-t}\,, \qquad \forall t \geq 0\,,$$

e l'ultima disuguaglianza si verifica facilmente (ad esempio osservando che $g(t) = \mathrm{e}^{-t}$ è convessa, e che $1-t$ è la tangente nell'origine a $g(t)$). Dal momento che

$$\int_{[0,+\infty)} \mathrm{e}^{-x}\,dx = \mathrm{R}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx = 1\,,$$

la funzione e^{-x} è in $L^1([0,+\infty))$. La tesi segue allora dal teorema di convergenza dominata.

3) Sia

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + (x-n)^2}\,.$$

Trovare il limite di f_n in $L^1([0,+\infty))$, in $L^p([0,+\infty))$ (per $p>1$), ed in $L^\infty([0,+\infty))$.

È abbastanza facile verificare che $f_n(x)$ tende a zero ovunque in $[0,+\infty)$. D'altra parte, $0\le f_n(x)\le \mathrm{e}^{-x}$. Pertanto, f_n tende a zero in $L^1([0,+\infty))$. Essendo e^{-px} in $L^1([0,+\infty))$, lo stesso ragionamento prova che f_n converge a zero in $L^p([0,+\infty))$. Si ha poi, facendo i conti,

$$f_n'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\,\frac{(x-n+1)^2}{[1+(x-n)^2]^2}\le 0\,.$$

Pertanto, $f_n(x)\le f_n(0)=\frac{1}{1+n^2}$; si ha allora che f_n converge uniformemente a zero in $[0,+\infty)$ e quindi in $L^\infty([0,+\infty))$.

4) Sia $\alpha>0$ e sia

$$f_n(x)=\frac{1}{n^\alpha}\,\chi_{[n,2n]}(x)\,.$$

Per quali $q\ge 1$ la successione f_n converge a zero in $L^q(\mathbf{R})$? Per quali $q\ge 1$ è in $L^q(\mathbf{R})$ la funzione

$$g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,?$$

Per quali $\alpha>0$ la successione f_n converge a zero in misura?

Si ha

$$\int_{\mathbf{R}} |f_n(x)|^q\,dx=\int_{[n,2n]}\frac{1}{n^{\alpha q}}\,dx=\frac{1}{n^{\alpha q-1}}\,.$$

Pertanto, f_n tende a zero in $L^q(\mathbf{R})$ se e solo se $q>\frac{1}{\alpha}$. Si ha poi

$$m(\{x\in\mathbf{R}:|f_n(x)|\ge\lambda\})=\begin{cases}0 & \text{se } \lambda>\frac{1}{n^\alpha},\\ 2n & \text{se } \lambda\le\frac{1}{n^\alpha}.\end{cases}$$

Dal momento che, per ogni fissato $\alpha>0$, la successione $\frac{1}{n^\alpha}$ tende a zero, qualsiasi sia $\lambda>0$ si ha definitivamente in n che $m(\{x\in\mathbf{R}:|f_n(x)|\ge\lambda\})=0$, e quindi f_n converge a zero in misura. La seconda domanda è abbastanza complicata. Iniziamo scrivendo g come somma di una serie di funzioni caratteristiche definite su insiemi a due a due disgiunti:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\,\chi_{[n,2n]}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=n}^{2n-1}\chi_{[k,k+1)}(x)\,.$$

Cambiamo ora l'ordine di sommatoria: detta $[\cdot]$ la parte intera, si ha

$$g(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=\left[\frac{k}{2}\right]+1}^{k}\frac{1}{n^\alpha}\right)\chi_{[k,k+1)}(x)\,.$$

Pertanto, per il corollario del teorema di convergenza monotona,

$$\int_{\mathbf{R}}|g(x)|^q\,dx=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=\left[\frac{k}{2}\right]+1}^{k}\frac{1}{n^\alpha}\right)^q\,.$$

Osservando che

$$\frac{1}{k^\alpha}\le\frac{1}{n^\alpha}\le\frac{1}{\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)^\alpha}\,,\qquad \forall n\in\left\{\left[\frac{k}{2}\right]+1,\dots,k\right\}\,,$$

si ha

$$\frac{1}{2k^{\alpha-1}} = \frac{\frac{k}{2}}{k^\alpha} \leq \frac{k-\left[\frac{k}{2}\right]}{k^\alpha} \leq \sum_{n=\left[\frac{k}{2}\right]+1}^{k} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{k-\left[\frac{k}{2}\right]}{\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)^\alpha} \leq \frac{\frac{k}{2}+1}{\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)^\alpha} \leq \frac{1}{\left(\frac{k}{2}+1\right)^{\alpha-1}} = \frac{2^{\alpha-1}}{(k+2)^{\alpha-1}}\,.$$

Pertanto, g è in $L^q(\mathbf{R})$ se e solo se la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{(\alpha-1)\,q}}\,,$$

è convergente, ovvero se e solo se $q > \frac{1}{\alpha-1}$ (si noti che deve essere $\alpha > 1$).

5) Siano α e β numeri reali positivi, e sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\alpha} & \text{se } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{x^\beta} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Per quali α e β la funzione f appartiene a $L^p((0,+\infty))$?

Si ha

$$\int_{(0,+\infty)} |f(x)|^p\,dx = \int_{(0,1)} \frac{1}{x^{\alpha\,p}}\,dx + \int_{(1,+\infty)} \frac{1}{x^{\beta\,p}}\,dx = \mathrm{R}\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha\,p}}\,dx + \mathrm{R}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta\,p}}\,dx\,.$$

Deve essere allora $\alpha\,p < 1$ e $\beta\,p > 1$, e quindi $\alpha < \frac{1}{p} < \beta$.

6) Sia f in $L^1((0,+\infty))$. Dimostrare che se esiste il limite di f a $+\infty$, allora tale limite è 0. Trovare una f in $L^1((0,+\infty))$ tale che il limite a $+\infty$ non esiste.

Se il limite di $f(x)$ a $+\infty$ fosse $L \neq 0$, allora $|f(x)|$ convergerebbe a $|L| > 0$ a $+\infty$. Pertanto, esisterebbe $M > 0$ tale che $|f(x)| \geq \frac{|L|}{2}$ per ogni $x \geq M$. Allora

$$\int_{(0,+\infty)} |f(x)|\,dx \geq \int_{(M,+\infty)} |f(x)|\,dx \geq \frac{|L|}{2}\,m((M,+\infty)) = +\infty\,,$$

da cui l'assurdo essendo f in $L^1((0,+\infty))$. In maniera analoga si esclude il caso $L = \pm\infty$. La funzione

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\,\chi_{\left[k,k+\frac{1}{k^3}\right]}(x)\,,$$

è in $L^1((0,+\infty))$, ma non ha limite a $+\infty$ (il massimo limite è $+\infty$, il minimo limite è 0).

7) Trovare una funzione continua f in $L^1(\mathbf{R})\backslash L^2(\mathbf{R})$ e una funzione continua g in $L^2(\mathbf{R})\backslash L^1(\mathbf{R})$.

Sia

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-1,1] \\ \frac{1}{|x|} & \text{se } x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Allora g è continua ed appartiene a $L^2(\mathbf{R})\backslash L^1(\mathbf{R})$. Per quanto riguarda la funzione f, l'esempio è un po' più complicato, perchè se una funzione continua f è in $L^1(\mathbf{R})$ e tende a zero a $\pm\infty$, allora f è anche in $L^2(\mathbf{R})$ (Esercizio!). Pertanto, per l'esercizio precedente, si deve scegliere una funzione f in $L^1(\mathbf{R})$ che non ammette limite a $+\infty$ (o a $-\infty$). La funzione f dell'esercizio precedente è (come si verifica facilmente) una funzione di $L^1(\mathbf{R})\backslash L^2(\mathbf{R})$, ma ha il difetto di non essere continua. Definiamo allora

$$f_k(x) = \begin{cases} k^4\left(x-k+\frac{1}{k^3}\right) & \text{se } k-\frac{1}{k^3} \leq x \leq k, \\ k & \text{se } k \leq x \leq k+\frac{1}{k^3}, \\ k^4\left(k+\frac{2}{k^3}-x\right) & \text{se } k+\frac{1}{k^3} \leq x \leq k+\frac{2}{k^3}, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

La funzione
$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\,,$$
è allora una funzione continua in $L^1(\mathbf{R})\backslash L^2(\mathbf{R})$.

8) Siano $1 \le p < q \le +\infty$, e sia f in $L^p(\mathbf{R}) \cap L^q(\mathbf{R})$. Dimostrare che f appartiene a $L^r(\mathbf{R})$ per ogni r in $[p,q]$, e che si ha
$$\left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1-\alpha}{q}} \qquad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}\,.$$

Sia β in $(0,1)$ tale che $r = \beta\,p + (1-\beta)\,q$. Allora, per la disuguaglianza di Hölder
$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^r\,dx = \int_{\mathbf{R}} |f(x)|^{\beta\,p}\,|f(x)|^{(1-\beta)\,q}\,dx \le \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p\,dx\right)^{\beta} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^q\,dx\right)^{1-\beta} < +infty\,.$$
Si ha poi
$$\beta = \frac{q-r}{p-q}\,, \qquad \alpha = \frac{p}{r}\,\frac{q-r}{p-q} = \beta\,\frac{p}{r}\,, \qquad 1-\alpha = (1-\beta)\,\frac{q}{r}\,.$$
Pertanto,
$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^r\,dx \le \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{\alpha\,r}{p}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{(1-\alpha)\,r}{q}}\,,$$
da cui la tesi. La disuguaglianza appena dimostrata si chiama **disuguaglianza di interpolazione**.

9) Sia f in $L^p((0,1))$ per ogni $p \ge 1$ tale che
$$\left(\int_{(0,1)} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le K\,, \qquad \forall p \ge 1\,.$$
Dimostrare che f è in $L^\infty((0,1))$ e che $\operatorname{ess\,sup}_{(0,1)} |f(x)| \le K$. Trovare un esempio di funzione che è in tutti gli spazi $L^p((0,1))$, ma non in $L^\infty((0,1))$.

Sia $E_{2K} = \{x \in (0,1) : |f(x)| > 2K\}$. Allora
$$K^p \ge \int_{(0,1)} |f(x)|^p\,dx \ge \int_{E_{2k}} |f(x)|^p\,dx \ge (2K)^p\,m(E_{2K})\,.$$
Pertanto, $m(E_{2K}) \le 1/2^p$ (per ogni $p \ge 1$) e quindi $m(E_{2K}) = 0$. Ne segue che $|f(x)| \le 2K$ quasi ovunque, e quindi f è in $L^\infty((0,1))$. La tesi segue allora dal fatto che, se f è in $L^\infty((0,1))$, allora
$$\lim_{p\to+\infty} \left(\int_{(0,1)} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \operatorname{ess\,sup}_{(0,1)} |f(x)|\,.$$
La funzione $f(x) = -\ln(x)$ è in $L^p((0,1))$ per ogni p, ma non in $L^\infty((0,1))$.

10) Sia $p \ge 1$ ed E un insieme misurabile di misura finita. Una funzione misurabile $f : E \to \bar{\mathbf{R}}$ si dice appartenere allo spazio di Marcinkiewicz $M^p(E)$ (detto anche "spazio L^p-debole") se esiste una costante non negativa C tale che
$$m(\{x \in E : |f(x)| \ge t\}) \le \frac{C}{t^p}\,, \qquad \forall t > 0\,.$$
Dimostrare che $L^p(E) \subset M^p(E)$ e che l'inclusione è stretta.

Sia f in $L^p(E)$. Allora, dal momento che $\frac{|f(x)|^p}{t^p} \ge 1$ sull'insieme $\{x \in E : |f(x)| \ge t\}$, si ha
$$m(\{x \in E : |f(x)| \ge t\}) \le \frac{1}{t^p} \int_{\{x\in E:|f(x)|\ge t\}} |f(x)|^p\,dx \le \frac{1}{t^p} \int_E |f(x)|^p\,dx = \frac{C}{t^p}\,,$$
e quindi f appartiene a $M^p(E)$. La funzione $\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}}$ è in $M^p((0,1))$ ma non in $L^p((0,1))$.

Esercizi 6

1) Sia f in $L^1(\mathbf{R})$, con $f \geq 0$. Sia $f_n(x) = f(nx)$. Calcolare il limite per n tendente ad infinito dell'integrale di f_n su $[0,1]$. A cosa tende quasi ovunque (se tende) f_n?

Si ha

$$\int_{[0,1]} f_n(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_{[0,n]} f(y)\,dy\,.$$

Dal momento che l'integrale di f su $[0,n]$ converge all'integrale di f su $[0,+\infty)$ (perché tale integrale è finito), l'integrale di f_n tende a zero. Pertanto, a meno di sottosuccessioni, $f_n(x)$ tende a zero quasi ovunque. Se, però, f ammette limite a $+\infty$, tale limite vale zero (si veda l'esercizio 6 del compito del 7 novembre), ed allora $f_n(x)$ tende a zero per ogni x in $[0,1]$, escluso $x = 0$ (dove tende — essendo costantemente uguale — a $f(0)$).

2) Sia $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ per x in $[-\pi,\pi]$, e $f(0) = 0$. Sia

$$a_k(f) = \int_{[-\pi,\pi]} f(x)\,\cos(kx)\,dx\,.$$

Dimostrare che $\{a_k(f)\}$ non è in ℓ^2.

Essendo $\{a_k(f)\}$ la successione dei coefficienti di Fourier di f (si noti che f è pari, e pertanto $b_k(f) = 0$ per ogni k), se $\{a_k(f)\}$ fosse in ℓ^2, la serie di Fourier convergerebbe in $L^2([-\pi,\pi])$ ad f, e dunque f apparterrebbe ad $L^2([-\pi,\pi])$, il che non è.

3) Sia

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}(kx)}{k}\,.$$

Calcolare l'integrale di f su $[-\pi,\pi]$ e dimostrare che, detta $g(x) = f^2(x)$, allora $b_k(g) = 0$ per ogni k.

La successione $b_k = \frac{1}{k}$ è in ℓ^2; pertanto, la serie converge in $L^2([-\pi,\pi])$ ad f. Dal momento che la convergenza in $L^2([-\pi,\pi])$ implica la convergenza in $L^1([-\pi,\pi])$, la serie converge ad f in $L^1([-\pi,\pi])$. Ma allora

$$\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{[-\pi,\pi]} \frac{\mathrm{sen}(kx)}{k}\,dx = 0\,.$$

Essendo g in $L^1([-\pi,\pi])$, i suoi coefficienti di Fourier sono ben definiti; inoltre, essendo f dispari, $g = f^2$ è pari e pertanto $b_k(g) = 0$.

4) Sia f in $L^1([-\pi,\pi])$. Dimostrare che

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\,\cos(kx)\,dx = 0\,.$$

Suggerimento: si dimostri che è vero se $f = \chi_{(a,b)}$.

Si ha

$$\int_{[-\pi,\pi]} \chi_{(a,b)}(x)\,\cos(kx)\,dx = \int_{(a,b)} \cos(kx)\,dx = \mathrm{R}\int_a^b \cos(kx)\,dx = \frac{\mathrm{sen}(kb) - \mathrm{sen}(ka)}{k}\,,$$

che tende a zero per k tendente ad infinito. Se φ è una funzione semplice, si ha allora

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{[-\pi,pi]} \varphi(x)\,\cos(kx)\,dx = 0\,.$$

Se f è in $L^1([-\pi,\pi])$, sia $\{\varphi_n\}$ una successione di funzioni semplici che converge ad f in $L^1([-\pi,\pi])$. Allora

$$\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\,\cos(kx)\,dx = \int_{[-\pi,\pi]} [f(x)-\varphi_n(x)]\,\cos(kx)\,dx$$
$$+\int_{[-\pi,\pi]} \varphi_n(x)\,\cos(kx)\,dx \le d_1(f,\varphi_n) + \int_{[-\pi,\pi]} \varphi_n(x)\,\cos(kx)\,dx\,,$$

ed entrambi i termini possono essere resi piccoli, scegliendo prima n grande per il primo, e poi k grande per il secondo.

5) Sia $g(x) = \chi_{[0,1]}(x) - \chi_{[-1,0)}(x)$, e sia $\bar{g}$ la prolungata per periodicità su $\mathbf{R}$. Definiamo $g_k(x) = \bar{g}(2^k\,x)$. Dimostrare che, per ogni f in $L^2([-1,1])$, si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{[-1,1]} f(x)\,g_k(x)\,dx = 0\,.$$

Facendo un po' di tentativi, si vede che è possibile scrivere (quasi ovunque)

$$g_k(x) = \sum_{j=0}^{2^{k+1}-1} (-1)^j\,\chi_{\left[\frac{j}{2^k}-1,\,\frac{j+1}{2^k}-1\right]}(x)\,.$$

Sia ora $k < h$ e calcoliamo $g_k(x)\,g_h(x)$. Consideriamo, per j compreso tra 0 e $2^{k+1}-1$, l'intervallo $\left[\frac{j}{2^k}-1, \frac{j+1}{2^k}-1\right]$. Su questo intervallo $g_k(x)$ vale 1 (se j è pari), o -1 (se j è dispari), mentre $g_h(x)$ ha integrale nullo: si osservi infatti che g_h assume alternativamente i valori ± 1 sui 2^{h-k} intervalli nei quali è suddiviso l'intervallo $\left[\frac{j}{2^k}-1, \frac{j+1}{2^k}-1\right]$ dai punti di discontinuità di g_h. Pertanto,

$$\int_{\left[\frac{j}{2^k}-1,\,\frac{j+1}{2^k}-1\right]} g_k(x)\,g_h(x)\,dx = (-1)^j \int_{\left[\frac{j}{2^k}-1,\,\frac{j+1}{2^k}-1\right]} g_h(x)\,dx = 0\,.$$

Essendo

$$\int_{[-1,1]} g_k(x)\,g_h(x)\,dx = \sum_{j=0}^{2^{k+1}-1} \int_{\left[\frac{j}{2^k}-1,\,\frac{j+1}{2^k}-1\right]} g_k(x)\,g_h(x)\,dx\,, \qquad \int_{[-1,1]} [g_k(x)]^2\,dx = 2\,,$$

si ha che $\{g_k/\sqrt{2}\}$ è un sistema ortonormale in $L^2([-1,1])$. Pertanto, essendo

$$\int_{[-1,1]} f(x)\,g_k(x)\,dx$$

i coefficienti di Fourier di f nel sistema $\{g_k\}$ (a meno di un fattore $\sqrt{2}$), ne segue che tali coefficienti sono in ℓ^2 (per la disuguaglianza di Bessel), e quindi tendono a zero.

6) Siano $f(x) = x$ e $h(x) = x^2$. Calcolare i coefficienti di Fourier di f e h rispetto al sistema ortonormale $\{g_k\}$ definito nell'esercizio precedente. $\{g_k\}$ è completo?

Essendo g_k dispari per ogni k, i coefficienti di Fourier di h sono tutti nulli; pertanto, $\{g_k\}$ non è completo. Calcoliamo ora i coefficienti di f. Si ha

$$\int_{[-1,1]} f(x)\,g_k(x)\,dx = \sum_{j=0}^{2^{k+1}-1} (-1)^j \int_{\left[\frac{j}{2^k}-1,\,\frac{j+1}{2^k}-1\right]} x\,dx = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2^{k+1}-1} (-1)^j \left[\left(\frac{j+1}{2^k}-1\right)^2 - \left(\frac{j}{2^k}-1\right)^2\right].$$

Sviluppando i quadrati e semplificando, si trova

$$\int_{[-1,1]} f(x)\,g_k(x)\,dx = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2^{k+1}-1}(-1)^j\left(\frac{j}{2^{2k-1}}+\frac{1}{2^{2k}}-\frac{1}{2^{k-1}}\right) = \frac{1}{2^{2k}}\sum_{j=0}^{2^{k+1}-1}(-1)^j\,j = -\frac{1}{2^k}\,.$$

7) Siano p e q maggiori di 1 e tali che $1/p+1/q=1$. Sia g in $L^q(\mathbf{R})$. Sia $F : L^p(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ l'applicazione definita da

$$F(f) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\,g(x)\,dx\,.$$

Dimostrare che F è continua (ovvero che se f_n converge a f in $L^p(\mathbf{R})$, allora $F(f_n)$ converge a $F(f)$ in $\mathbf{R}$).

Dalla disuguaglianza di Hölder si ha

$$|F(f_n)-F(f)| = \left|\int_{\mathbf{R}}[f_n(x)-f(x)]\,g(x)\,dx\right| \le \left(\int_{\mathbf{R}}|f_n(x)-f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbf{R}}|g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

e quindi la tesi.

8) Sia $F : L^2([-\pi,\pi]) \to \mathbf{R}$ lineare e continua. Dimostrare che esiste $C \ge 0$ tale che

$$|F(f)| \le C\left(\int_{[-\pi,\pi]}|f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall f \in L^2([-\pi,\pi])\,.$$

Suggerimento: dimostrare per assurdo che non è possibile che $\{f_n\}$ sia 1) limitata in $L^2([-\pi,\pi])$ e 2) tale che $F(f_n)$ diverge.

Se non esiste alcuna costante C, allora per ogni $C>0$ esiste $f=f_C$ in $L^2([-\pi,\pi])$ tale che

$$|F(f_C)| > C\left(\int_{[-\pi,\pi]}|f_C(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prendendo $C=n$, esiste dunque f_n in $L^2([-\pi,\pi])$ tale che

$$|F(f_n)| > n\left(\int_{[-\pi,\pi]}|f_n(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dividendo per $\left(\int_{[-\pi,\pi]}|f_n(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = d_2(f_n,0)$, e sfruttando la linearità di F, si trova pertanto

$$\left|F\left(\frac{f_n}{d_2(f_n,0)}\right)\right| > n\,.$$

Sia ora

$$g_n = \frac{f_n}{d_2(f_n,0)}\,.$$

Allora l'integrale di g_n^2 su $[-\pi,\pi]$ vale 1, e pertanto g_n è una successione limitata in $L^2([-\pi,\pi])$ e tale che $|F(g_n)| > n$ per ogni n in $\mathbf{N}$. Dividendo per $\sqrt{n}$ si trova

$$\left|F\left(\frac{g_n}{\sqrt{n}}\right)\right| > \sqrt{n}\,,$$

da cui l'assurdo perché, essendo $g_n/\sqrt{n}$ convergente a zero in $L^2([-\pi,\pi])$, si ha $|F(g_n/\sqrt{n})|$ tendente a $|F(0)| = 0$ per continuità e linearità.

9) Sia $F : L^2([-\pi,\pi]) \to \mathbf{R}$ lineare e continua. Sia $\{e_k(x)\}$ un sistema ortonormale completo in $L^2([-\pi,\pi])$ (ad esempio, $\mathcal{T}$), e sia $a_k = F(e_k)$. Si dimostri che $\{a_k\}$ è in ℓ^2. Suggerimento: detta $s_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k\, e_k(x)$, calcolare $(s_n \,|\, s_n)$, $F(s_n)$, ed usare l'esercizio precedente.

Ricordando la definizione di a_k si ha per linearità di F,

$$F(s_n) = F\left(\sum_{k=1}^n F(e_k)\, e_k\right) = \sum_{k=1}^n F(e_k)\, F(e_k) = \sum_{k=1}^n [F(e_k)]^2 \,.$$

D'altra parte, essendo $(e_k|e_h) = \delta_{kh}$, si ha

$$(s_n|s_n) = \sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n [F(e_k)]^2 \,.$$

Pertanto, per l'esercizio precedente, e ricordando la definizione di prodotto scalare in $L^2([-\pi,\pi])$,

$$(s_n|s_n) = F(s_n) = |F(s_n)| \le C\,\sqrt{(s_n|s_n)}\,,$$

da cui $(s_n|s_n) \le C^2$. Essendo questa disuguaglianza vera per ogni n in $\mathbf{N}$, si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 \le C^2\,,$$

e quindi $\{a_k\}$ è in ℓ^2.

10) Sia $F : L^2([-\pi,\pi]) \to \mathbf{R}$ lineare e continua, e sia $\{a_k\}$ come nell'esercizio precedente; sia

$$g_F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\, e_k(x)\,.$$

Dimostrare che

$$F(f) = \int_{[-\pi,\pi]} f(x)\, g_F(x)\, dx = (f \,|\, g_F)\,, \qquad \forall f \in L^2([-\pi,\pi])\,.$$

Concludere che per ogni applicazione lineare e continua da $L^2([-\pi,\pi])$ in $\mathbf{R}$ esiste g_F in $L^2([-\pi,\pi])$ tale che $F(f) = (f \,|\, g_F)$, e viceversa, che se g è in $L^2([-\pi,\pi])$, $F(f) = (f \,|\, g)$ è lineare e continua su $L^2([-\pi,\pi])$ (che analogia c'è con il duale di $\mathbf{R}^N$?).

Sia f in $L^2([-\pi,\pi])$; allora la sua serie di Fourier converge ad f in $L^2([-\pi,\pi])$, ovvero

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (f|e_k)\, e_k(x)\,,$$

e l'uguaglianza è vera in $L^2([-\pi,\pi])$. Essendo F continua, si ha

$$F(f) = F\left(\sum_{k=1}^{+\infty} (f|e_k)\, e_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (f|e_k)\, F(e_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (f|e_k)\, a_k\,.$$

D'altra parte, per definizione di g_F, e per l'esercizio precedente, g_F appartiene ad $L^2([-\pi,\pi])$, nel senso che la serie converge in $L^2([-\pi,\pi])$; ma allora

$$(f|g_F) = \left(f \,\middle|\, \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\, e_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (f|e_k)\, a_k\,.$$

Pertanto, $F(f) = (f|g_F)$ e quindi la tesi. In definitiva, ogni operatore lineare e continuo su $L^2([-\pi,\pi])$ si può "rappresentare" mediante il prodotto scalare con un vettore di $L^2([-\pi,\pi])$, e questo è esattamente quello che accade per gli elementi del duale di $\mathbf{R}^N$.

Esercizi 7

1) Sia, per α e β in $\mathbf{R}$, e per f in $L^2([-1,1])$,

$$F(\alpha,\beta) = \int_{[-1,1]} |f(x) - (\alpha + \beta\, x^2)|^2\, dx\,.$$

Determinare α e β in modo tale che $F(\alpha,\beta)$ sia minimo su $\mathbf{R}^2$.

Invece di risolvere l'esercizio considerando 1 e x^2 come base (non ortogonale) di un sottospazio lineare di $L^2([-1,1])$, scriviamo esplicitamente $F(\alpha,\beta)$ sviluppando il quadrato:

$$F(\alpha,\beta) = \int_{[-1,1]} [f^2(x) - 2f(x)\,(\alpha+\beta\,x^2) + \alpha^2 + 2\alpha\,\beta\,x^2 + \beta^2\,x^4]\,dx = 2\alpha^2 + \frac{4}{3}\,\alpha\,\beta + \frac{2}{5}\,\beta^2 - 2\alpha\,c_0 - 2\beta\,c_1 + c_2\,,$$

dove

$$c_0 = \int_{[-1,1]} f(x)\,dx\,, \qquad c_1 = \int_{[-1,1]} f(x)\,x^2\,dx\,, \qquad c_2 = \int_{[-1,1]} f^2(x)\,dx\,.$$

Calcoliamo ora i punti critici di F su $\mathbf{R}^2$. Derivando, si ha

$$F_\alpha(\alpha,\beta) = 4\alpha + \frac{4}{3}\beta - 2c_0\,, \qquad F_\beta(\alpha,\beta) = \frac{4}{5}\beta + \frac{4}{3}\alpha - 2c_1\,,$$

che uguagliati a zero danno

$$\alpha_0 = \frac{27c_0 - 45c_1}{24}\,, \qquad \beta_0 = \frac{135c_1 - 45c_0}{24}\,.$$

Calcolando l'Hessiano, si vede che (α_0,β_0) è un punto di minimo. Dal momento che F diverge quando α e β tendono ad infinito (che ci si creda o no, per la disuguaglianza di Hölder), (α_0,β_0) è di minimo assoluto.

2) Sia $\mathcal{P} = \{g \in L^2([-1,1]) : g(x) \geq 0\}$. Data f in $L^2([-1,1])$, determinare (se esiste) g in $\mathcal{P}$ tale che

$$\int_{[-1,1]} |f(x) - g(x)|^2\,dx = \min\left\{\int_{[-1,1]} |f(x) - h(x)|^2\,dx\,,\ h \in \mathcal{P}\right\}.$$

Suggerimento: che succede se f è positiva?

Se $f \geq 0$, allora $g = f$ risolve il problema di minimo (dal momento che l'integrale di $|f(x) - g(x)|^2$ è sempre positivo). In maniera analoga, se $f \leq 0$ la scelta minimizzante è $g = 0$. In entrambi i casi, $g = f^+$. Dimostriamo ora che tale scelta è la migliore in ogni caso:

$$\int_{[-1,1]} |f(x) - g(x)|^2\,dx = \int_{\{f\geq 0\}} |f^+(x) - g(x)|^2\,dx + \int_{\{f<0\}} |-f^-(x) - g(x)|^2\,dx = I^+(g) + I^-(g)\,.$$

Se prendiamo $g = f^+$ su $f \geq 0$, allora $I^+(g) = 0$, e questo è il valore minimo possibile. Per $I^-(g)$ si ha, ricordando che f^- e g sono non negativi

$$I^-(g) = \int_{\{f<0\}} |-f^-(x) - g(x)|^2\,dx = \int_{\{f<0\}} [f^-(x) + g(x)]^2\,dx \geq \int_{\{f<0\}} [f^-(x)]^2\,dx\,,$$

e pertanto il minimo si raggiunge prendendo $g = 0$ dove $f < 0$. In definitiva, scegliendo

$$g(x) = f^+(x)\,\chi_{\{f\geq 0\}}(x) + 0\,\chi_{\{f<0\}}(x) = f^+(x)\,,$$

si ha il minimo.

3) Siano a, b due numeri reali positivi, e sia $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da $F(x, y) = (ax, by)$. Dimostrare che $m_2(F(E)) = a\,b\,m_2(E)$ per ogni insieme misurabile E in $\mathbf{R}^2$. Suggerimento: dimostrarlo prima per E in $\mathcal{R}$, poi per E in $\mathcal{R}_\cup$, per E in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$, ed infine per E qualsiasi.

Se $I = (\alpha, \beta)$ è un intervallo di $\mathbf{R}$, allora $a\,I = (a\,\alpha, a\,\beta)$ e $l(a\,I) = a\,l(I)$. Pertanto, se E è un sottoinsieme qualsiasi di $\mathbf{R}$, si ha $m^*(a\,E) = a\,m^*(E)$. Si dimostra poi che se E è misurabile in $\mathbf{R}$, allora $a\,E$ lo è (e pertanto $m(a\,E) = a\,m(E)$). È allora chiaro che se E è un rettangolo di $\mathbf{R}^2$, allora $E = A \times B$ e $F(E) = (a\,A) \times (b\,B)$; pertanto, $m_2(F(E)) = a\,b\,m_2(E)$. Sia ora R in $\mathcal{R}_\cup$ (che supponiamo di misura finita, altrimenti la formula da dimostrare è evidentemente vera). Allora R è unione disgiunta di rettangoli di $\mathbf{R}^2$. Essendo l'immagine dell'unione l'unione delle immagini, la formula appena dimostrata sui rettangoli si trasporta a $\mathcal{R}_\cup$ grazie alla σ-additività di m_2 e all'iniettività di F:

$$m_2(F(E)) = m_2\left(F\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n\right)\right) = \sum_{n\in\mathbf{N}} m_2(F(E_n)) = a\,b \sum_{n\in\mathbf{N}} m_2(E_n) = a\,b\,m_2(E)\,.$$

Con ragionamento analogo (usando il fatto che ogni insieme di $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ di misura finita si può scrivere come intersezione di una successione decrescente di insiemi in $\mathcal{R}_\cup$ di misura finita) si dimostra che se E è in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ allora $m_2(F(E)) = a\,b\,m_2(E)$. Sia ora E è un insieme misurabile di misura nulla. Allora esiste G in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$, contenente E, e tale che $m_2(E) = m_2(G)$. Ma allora

$$0 \le m_2(F(E)) \le m_2(F(G)) = a\,b\,m_2(G) = 0\,,$$

e pertanto anche $F(E)$ ha misura nulla (ovvero, la formula è valida per insiemi misurabili di misura nulla). Infine, se E è un misurabile qualsiasi, esiste G in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ contenente E e con la stessa misura; pertanto, $G = E \cup H$, con $m_2(H) = 0$. Allora $F(G) = F(E) \cup F(H)$ (unione disgiunta) e quindi

$$a\,b\,m_2(E) = a\,b\,m_2(G) = m_2(F(G)) = m_2(F(E)) + m_2(F(H)) = m_2(F(E))\,,$$

ovvero la tesi.

4) Sia $F(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$ e siano $F_1(x, y) = F(x, y)$, $F_2(x, y) = F(x, y) + (1, 0)$ e $F_3(x, y) = F(x, y) + (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Sia S_0 il triangolo equilatero di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(1, \sqrt{3})$ e sia, per k in $\mathbf{N}$,

$$S_k = \bigcup_{j=1}^{3} F_j(S_{k-1})\,.$$

Detta S l'intersezione degli S_k, calcolare $m_2(S)$; disegnare S_3.

L'effetto di F_1 è quello di "dimezzare" S_0 (sia in altezza che in larghezza); in altre parole, $F_1(S_0)$ è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; analogamente, $F_2(S_0)$ è il triangolo di vertici $(1, 0)$, $(2, 0)$ e $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, mentre $F_3(S_0)$ è il triangolo di vertici $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(1, \sqrt{3})$. Pertanto, S_1 è ottenuto da S_0 "eliminando" il triangolo centrale di vertici $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(1, 0)$, e quindi $S_1 \subset S_0$. Continuando, S_2 è ottenuto da S_1 "eliminando" i tre triangoli centrali dei tre triangoli la cui unione è S_1, e così via. Pertanto, $\{S_k\}$ è una successione decrescente di insiemi, il primo dei quali ha misura finita, cosicché la misura di S è il limite delle misure di S_k. Per l'esercizio precedente, $m_2(F_1(S_0)) = m_2(F_2(S_0)) = m_2(F_3(S_0)) = \frac{m_2(S_0)}{4}$ e quindi $m_2(S_1) = \frac{3}{4}\,m_2(S_0)$. Iterando il ragionamento, $m_2(S_k) = \left(\frac{3}{4}\right)^k m_2(S_0)$, che implica $m_2(S) = 0$. S è detto "triangolo di Sierpinski", ed è un frattale di dimensione $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$, maggiore di 1 ma minore di 2 (ed infatti ha misura bidimensionale nulla).

5) Sia $F(x, y) = (\frac{x}{3}, \frac{y}{3})$ e sia

$$F_{ij}(x, y) = F(x, y) + (i - 1, j - 1)\,, \qquad i, j = 1, \ldots, 3\,.$$

Sia $M_0 = ([0,3] \times [0,3]) \backslash ([1,2] \times [1,2])$ e sia, per k in $\mathbf{N}$,

$$M_k = \bigcup_{\substack{i,j=1,\ldots,3 \\ (i,j)\neq(2,2)}} F_{ij}(M_{k-1})\,.$$

Detta M l'intersezione degli M_k, calcolare $m_2(M)$; disegnare M_3.

Con ragionamento analogo all'esercizio precedente si vede che F_{ij} riduce di un terzo le dimensioni di M_0, e lo sposta in 8 posizioni diverse. In definitiva, M_1 è il costituito da 8 copie disgiunte (e opportunamente traslate) di $F_{11}(M_0)$ che è il quadrato $[0,1] \times [0,1]$ privato del "terzo" centrale $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Pertanto, M_1 è contenuto in M_0, e la sua misura è $\frac{8}{9}$ della misura di M_0. Continuando, si ottiene che M_k è contenuto in M_{k-1}, e la sua misura è gli $\frac{8}{9}$ della misura di M_{k-1}. Pertanto, $m_2(M_k) = \left(\frac{8}{9}\right)^k m_2(M_0)$, e quindi $m_2(M) = 0$. M è detto "tappeto di Sierpinski" (o "spugna di Menger bidimensionale"), ed è un frattale di dimensione $\frac{\ln(8)}{\ln(3)}$ (di poco inferiore a 2).

6) Siano f e g due funzioni di $L^1(\mathbf{R})$, con $f(x) \leq g(x)$ quasi ovunque. Sia E misurabile in $\mathbf{R}$ e sia $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in E\,,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$. Dimostrare (usando il Teorema di Fubini-Tonelli) che

$$m_2(D) = \int_E [g(x) - f(x)]\,dx\,.$$

Si ha, essendo

$$D_x = \begin{cases} [f(x), g(x)] & \text{per quasi ogni } x \in E, \\ \emptyset & \text{se } x \notin E \text{ e per alcuni } x \text{ in } E \text{ (di misura nulla)}, \end{cases}$$

$$m_2(D) = \iint_{\mathbf{R}^2} \chi_D(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} \chi_{D_x}(y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbf{R}} [g(x) - f(x)]\,\chi_E(x)\,dx = \int_E [g(x) - f(x)]\,dx\,,$$

e quindi la tesi, se però sapessimo che D è misurabile. Per dimostrare che D è misurabile, è sufficiente dimostrare che è misurabile l'insieme $F = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq h(x)\}$, dove h è una funzione misurabile e non negativa. Dal momento che esiste una successione di funzioni semplici φ_n che approssima h crescendo, ed essendo l'insieme $E_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq \varphi_n(x)\}$ un elemento di $\mathcal{R}_\cup$ (come si verifica facilmente), ne segue che $G = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y < h(x)\}$ è in $\mathcal{R}_\cup$ e quindi è misurabile. Infine, essendo

$$F = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y < h(x) + \frac{1}{n}\}\,,$$

ne segue che F è in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ e quindi è misurabile.

7) Siano f in $L^1(\mathbf{R})$ e g in $L^p(\mathbf{R})$. Dimostrare (usando il Teorema di Fubini-Tonelli) che è in $L^p(\mathbf{R})$ la funzione (detta *convoluzione* fra f e g)

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y)\,g(x-y)\,dy\,.$$

Sia g in $L^1(\mathbf{R})$. Allora

$$\int_{\mathbf{R}} |(f*g)(x)|\,dx = \int_{\mathbf{R}} \left| \int_{\mathbf{R}} f(y)\,g(x-y)\,dy \right| dx \leq \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dy \right) dx\,,$$

e quindi, per il Teorema di Fubini-Tonelli,

$$\int_{\mathbf{R}} |(f*g)(x)|\,dx = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dx \right) dx = \left(\int_{\mathbf{R}} |f(y)|\,dy \right) \left(\int_{\mathbf{R}} |g(z)|\,dz \right) < +\infty\,.$$

Sia ora g in $L^p(\mathbf{R})$ con $p > 1$. Scriviamo, detto q il numero reale tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\int_{\mathbf{R}} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dy = \int_{\mathbf{R}} |f(y)|^{\frac{1}{q}}\,|f(y)|^{\frac{1}{p}}\,|g(x-y)|\,dy \le \left(\int_{\mathbf{R}} |f(y)|\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(y)|\,|g(x-y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pertanto,

$$\int_{\mathbf{R}} |(f*g)(x)|^p\,dx \le \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dy\right)^p dx \le \left(\int_{\mathbf{R}} |f(y)|\,dy\right)^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(y)|\,|g(x-y)|^p\,dy\right) dx\,.$$

Infine, ragionando come nel caso g in $L^1(\mathbf{R})$,

$$\int_{\mathbf{R}} |(f*g)(x)|^p\,dx \le \left(\int_{\mathbf{R}} |f(y)|\,dy\right)^{\frac{p}{q}+1} \left(\int_{\mathbf{R}} |g(z)|^p\,dz\right) = \left(\int_{\mathbf{R}} |f(y)|\,dy\right)^p \left(\int_{\mathbf{R}} |g(z)|^p\,dz\right) < +\infty\,.$$

8) Sia f in $L^1(\mathbf{R})$ e sia g continua su $\mathbf{R}$ e nulla fuori da un insieme compatto. Dimostrare che è continua la funzione $f*g$ definita come nell'esercizio precedente.

Sia x_n convergente a x_0. Allora $f(y)\,g(x_n-y)$ converge a $f(y)\,g(x_0-y)$ per quasi ogni y (tolti al più quelli per i quali $f(y)$ vale $\pm\infty$); essendo g continua e nulla fuori da un compatto, g è limitata. Pertanto $|f(y)\,g(x_n-y)| \le M\,|f(y)|$, e $M\,|f|$ è in $L^1(\mathbf{R})$. Per il teorema di Lebesgue

$$\lim_{n\to+\infty} (f*g)(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} f(y)\,g(x_n-y)\,dy = \int_{\mathbf{R}} f(y)\,g(x_0-y)\,dy = (f*g)(x_0)\,.$$

9) Sia $\rho \ge 0$ una funzione continua su $\mathbf{R}$, nulla fuori da $[-1,1]$, con integrale uguale ad 1 su $\mathbf{R}$ (ovvero, su $[-1,1]$. Sia $\rho_n(x) = n\,\rho(nx)$ e sia $f(x) = \chi_{(a,b)}(x)$. Dimostrare che $\rho_n * f$ converge quasi ovunque a f in $\mathbf{R}$, e che $\rho_n * f$ converge in $L^1(\mathbf{R})$ a f.

Per definizione, ρ_n è diverso da zero solo sull'intervallo $[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$. Allora

$$(\rho_n * f)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y)\,\rho_n(x-y)\,dy = \int_{\left[x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right]} f(y)\,\rho_n(x-y)\,dy\,.$$

Sia x in (a,b). Allora, definitivamente in n, $\left[x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right] \subset (a,b)$. Pertanto,

$$(\rho_n * f)(x) = \int_{\left[x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right]} f(y)\,\rho_n(x-y)\,dy = \int_{\left[x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right]} \rho_n(x-y)\,dy = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} n\,\rho(nz)\,dz = \int_{-1}^{1} \rho(s)\,ds = 1\,,$$

e quindi $(\rho_n * f)(x)$ converge a 1 se x è in (a,b). Se x non è in $[a,b]$, allora $\left[x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right] \cap (a,b) = \emptyset$ definitivamente in n, e quindi $(\rho_n * f)(x) = 0$. Pertanto, $(\rho_n * f)$ converge a $\chi_{(a,b)}(x)$ per ogni x diverso da a e b, e quindi quasi ovunque (si verifica facilmente che $(\rho_n * f)(a)$ converge all'integrale tra 0 e 1 di ρ, mentre $(\rho_n * f)(b)$ converge all'integrale tra -1 e 0 di ρ). Inoltre, come abbiamo appena verificato, $0 \le (\rho_n * f)(x) \le \chi_{(a-1,b+1)}(x)$, che è una funzione di $L^1(\mathbf{R})$. La convergenza di $\rho_n * f$ a f segue allora dal Teorema di Lebesgue.

10) Sia ρ_n come prima e f in $L^1(\mathbf{R})$. Dimostrare che $\rho_n * f$ converge a f in $L^1(\mathbf{R})$.

Usando la linearità dell'integrale e l'esercizio precedente si dimostra facilmente che se φ è una funzione semplice nulla fuori da un intervallo compatto, allora $\rho_n * \varphi$ converge in $L^1(\mathbf{R})$ a φ. Essendo le funzioni semplici nulle fuori da un intervallo compatto dense in $L^1(\mathbf{R})$, sia (per $\varepsilon > 0$ fissato) φ_ε tale che

$$\int_{\mathbf{R}} |f(y) - \varphi_\varepsilon(y)|\,dy \le \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Dall'esercizio 7 (e dal fatto che $\rho \geq 0$) si ha

$$\int_{\mathbf{R}} |\rho_n * (f - \varphi_\varepsilon)|(x)\, dx \leq \left(\int_{\mathbf{R}} |\rho_n(z)|\, dz \right) \left(\int_{\mathbf{R}} |f(y) - \varphi_\varepsilon(y)|\, dy \right) \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Infine, sia n_ε in $\mathbf{N}$ tale che

$$\int_{\mathbf{R}} |(\rho_n * \varphi_\varepsilon)(x) - \varphi_\varepsilon(x)|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Si ha allora la tesi, per la disuguaglianza triangolare in $L^1(\mathbf{R})$ e per il fatto che $\rho_n * f - \rho_n * \varphi_\varepsilon = \rho_n * (f - \varphi_\varepsilon)$. Si noti che, essendo $\rho_n * f$ continua (per l'esercizio 8), si è ri-dimostrata la densità delle funzioni continue in $L^1(\mathbf{R})$. Analogo risultato vale se f è in $L^p(\mathbf{R})$.