Compito di Analisi Reale — a.a. 2005-2006

25 gennaio 2006

Chi deve fare lo scritto: svolgere non più di tre esercizi per ognuna delle due parti.
Chi è esonerato da una delle due parti: svolgere più esercizi possibile dell'altra.

1) Studiare la convergenza in ℓ^p , $1 \leq p \leq +\infty$ della successione $\{x^{(n)}\}$ definita da

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\right) & \text{se } k \leq n, \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

2) Dire perché è misurabile l'insieme

$$E = \{x \in \mathbb{R} : 1 < e^x < 10\} \cup \left\{ \frac{\sqrt{2}}{n^2}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3^n}, 1 + \frac{1}{4^n} \right),$$

e successivamente calcolarne la misura.

3) Sia $g : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile, sia $E = \{x \in [-2, 2] : 2 < g(x) < 3\}$ e sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in E, \\ x^4 & \text{se } x \in [-2, 2] \setminus E. \end{cases}$$

Studiare la misurabilità di f . Se $g(x) = |x| + 1$, studiare la continuità di f .

4) Calcolare, giustificando i passaggi, la misura di $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n}, \frac{1}{3^n} \right)$.

5) Sia a_n la successione $1, 3, 9, 1, 3, 9, 1, 3, \dots$. Calcolare, giustificando i passaggi,

$$\int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \chi_{\left(\frac{1}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}\right)}(x).$$

1) Calcolare, giustificando i passaggi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{(0,1)} x^n (1-x) e^x.$$

2) Studiare la convergenza in $L^p((0, +\infty))$, $1 \leq p \leq +\infty$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\cos(n-x)}{n+x^2}.$$

3) Per quali valori di $p \geq 1$ appartiene ad $L^p((1, +\infty))$ la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \chi_{[4^n, 4^{n+2})}(x)?$$

4) Sia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \operatorname{sen}(nx).$$

Dopo aver dimostrato che f è in $L^2((-\pi, \pi))$, dimostrare che f è derivabile due volte con continuità.

5) Studiare la convergenza in $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq +\infty$ della successione di funzioni

$$f_n(x, y) = \cos(nxy) e^{-n(x^2+y^2)}.$$