Compito di Analisi Reale — a.a. 2005-2006

5 giugno 2006

Chi deve fare lo scritto: svolgere non più di tre esercizi per ognuna delle due parti.
Chi è esonerato da una delle due parti: svolgere più esercizi possibile dell'altra.

1) Studiare la convergenza in ℓ^p , $1 \leq p \leq +\infty$ della successione $\{x^{(n)}\}$ definita da

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt[k]{k^2}}\right) & \text{se } k \leq n, \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

2) Dire perché è misurabile l'insieme

$$E = \{x \in \mathbb{R} : 0 < \log(|x|) \leq 5\} \cup \{q^2 - q, q \in \mathbb{Q}\} \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} (n, n+2),$$

e successivamente calcolarne la misura.

3) Sia $g : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile, sia $E = \{x \in [-2, 2] : g^3(x) > 1\}$ e sia

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{se } x \in E, \\ x^2 & \text{se } x \in [-2, 2] \setminus E. \end{cases}$$

Studiare la misurabilità di f . Se $g(x) = x$, studiare la continuità di f .

4) Calcolare, giustificando i passaggi, la misura di $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n}, \frac{1}{5^n}\right)$.

5) Sia a_n la successione $1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots$. Calcolare, giustificando i passaggi,

$$\int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \chi_{\left(\frac{1}{5^n}, \frac{1}{5^{n-1}}\right)}(x).$$

1) Calcolare, giustificando i passaggi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{(0,1)} \frac{1}{n!} x^{2n} \frac{1}{x^3} dx.$$

2) Studiare la convergenza in $L^p((0, 1))$, $1 \leq p \leq +\infty$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\cos(x/n)}{\sqrt[3]{x + \frac{1}{n}}}.$$

3) Per quali valori di $p \geq 1$ appartiene ad $L^p((1, +\infty))$ la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5^n} \chi_{[6^n, 6^{n+2})}(x)?$$

4) Sia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sen(1/n^2) \sen(nx).$$

Dopo aver dimostrato che f è in $L^2((-\pi, \pi))$, dimostrare che f è continua e che ha una derivata in $L^2((-\pi, \pi))$.

5) Studiare la convergenza in $L^p(B_1(0))$, $1 \leq p \leq +\infty$ della successione di funzioni

$$f_n(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + \frac{1}{n}}.$$