Programma del corso di Analisi Reale, a.a. 2005—2006

Capitolo 1

Spazi metrici: definizioni ed esempi; disuguaglianze in $\mathbf{R}$ e $\mathbf{R}^N$ (senza dimostrazione). Spazi ℓ^p, definizioni e proprietà. Spazi di funzioni continue, distanze d_p. Convergenza negli spazi metrici, spazi metrici completi. Completezza di $L(X, Y)$ e $C(X, Y)$. Teorema di completamento (senza dimostrazione).

Capitolo 2

Misura secondo Lebesgue. Definizione e proprietà della misura esterna. $m^*(I) = l(I)$ per ogni intervallo (senza dimostrazione). Definizione di insieme misurabile. Misurabilità degli insiemi di misura esterna nulla. Proprietà della famiglia degli insiemi misurabili. Misura di unioni ed intersezioni di successioni di insiemi. Gli intervalli sono misurabili (senza dimostrazione). Regolarità della misura (Teorema 2.3.12). Un insieme non misurabile. Funzioni misurabili: definizione e proprietà. Definizione di "quasi ovunque". Funzioni semplici. Continuità della funzioni misurabili a meno di insiemi di misura piccola (cenni della dimostrazione).

Capitolo 3

Teoria dell'integrazione. Integrale per funzioni limitate su insiemi di misura finita. Una funzione limitata è integrabile se (con dimostrazione) e solo se (senza dimostrazione) è misurabile. Proprietà dell'integrale. Teorema di convergenza limitata. Integrale per funzioni non negative: definizione e proprietà. Lemma di Fatou (senza dimostrazione), teorema di Beppo Levi e suoi corollari. Disuguaglianza di Chebyshev. Assoluta continuità dell'integrale (senza dimostrazione). Integrale di Lebesgue generale, funzioni sommabili. Teorema di Lebesgue.

Capitolo 4

Gli spazi $L^p(E)$: definizioni ed esempi. Completezza di $L^1(E)$ (cenni della dimostrazione). L^1 è il completamento di C^0. Separabilità di $L^p(E)$ (cenni della dimostrazione). Se E ha misura finita e $p < q$, allora $L^q(E) \subset L^p(E)$. Spazi di Hilbert: definizioni ed esempi. Disuguaglianza di Bessel ed identità di Parseval. Coefficienti di Fourier. Isomorfismo isometrico di H con ℓ^2. Il sistema trigonometrico in L^2. Completezza del sistema trigonometrico (il Teorema 4.5.7 senza dimostrazione).

Capitolo 5

Misure prodotto. Definizione di misura in $\mathbf{R}^2$. Semi-algebre. Misura definita a partire da una semia-algebra. Intervalli e rettangoli. Misurabilità dei rettangoli in $\mathbf{R}^2$ (senza dimostrazione). Il teorema di Fubini-Tonelli per funzioni caratteristiche di insiemi di misura finita (Osservazione 5.2.9). Approssimazione di funzioni non negative con successioni crescenti di funzioni semplici (cenni della dimostrazione). Il teorema di Tonelli. Il teorema di Fubini.