Appunti di
Analisi Reale
a.a. 2008-2009

Luigi Orsina

27 settembre 2008

Indice

1 Spazi metrici **2**
- 1.1 Definizioni ed esempi . . . 2
- 1.2 Proprietà degli spazi metrici . . . 11
- 1.3 Spazi metrici completi . . . 14

2 Teoria della misura **23**
- 2.1 La misura secondo Peano-Jordan . . . 23
- 2.2 La misura secondo Lebesgue . . . 25
- 2.3 Misurabilità e misura . . . 29
- 2.4 Funzioni misurabili . . . 43

3 Teoria dell'integrazione **53**
- 3.1 L'integrale secondo Riemann . . . 53
- 3.2 L'integrale secondo Lebesgue . . . 56
  - 3.2.1 Funzioni limitate su insiemi di misura finita . . . 56
  - 3.2.2 Funzioni non negative . . . 68
  - 3.2.3 L'integrale di Lebesgue generale . . . 76
  - 3.2.4 Convergenza in misura . . . 78

4 Gli spazi L^p **82**
- 4.1 $L^1(E)$ . . . 82
- 4.2 $L^p(E)$ e $L^\infty(E)$ . . . 90
- 4.3 Convergenza in $L^p(E)$ . . . 94
- 4.4 Separabilità . . . 97
- 4.5 $L^2(E)$ . . . 100
  - 4.5.1 Gli spazi di Hilbert . . . 101
  - 4.5.2 $L^2([-\pi,\pi])$ e serie di Fourier . . . 105

5 Misure prodotto **114**
- 5.1 Definizione della misura in $\mathbb{R}^2$ . . . 114
- 5.2 Il teorema di Fubini-Tonelli . . . 120

Capitolo 1

Spazi metrici

1.1 Definizioni ed esempi

Definizione 1.1.1 Sia X un insieme qualsiasi. Una **distanza** su X è un'applicazione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che

i) $d(x, y) \geq 0$ per ogni x, y in X, e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$ (positività);

ii) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni x, y in X (simmetria);

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni x, y e z in X (disuguaglianza triangolare).

Uno **spazio metrico** è una coppia (X, d) con X insieme qualsiasi, e d distanza su X.

Esempio 1.1.2 Sia X un insieme qualsiasi e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$, $d(x, y) = 0$ se $x = y$. Si verifica facilmente che i) e ii) valgono; per la iii), se $x = y$ non c'è nulla da dimostrare; se $x \neq y$, si deve provare che $d(x, z) + d(z, y) \geq 1$ per ogni x, y e z in X con $x \neq y$, fatto questo che risulta essere vero, essendo almeno uno tra i valori $d(x, z)$ e $d(y, z)$ uguale a 1 (non possono essere entrambi nulli, dato che se lo fossero, si avrebbe $x = z$ e $z = y$ per la i), da cui $x = y$, il che non è). La distanza d prende il nome di distanza discreta.

Esempio 1.1.3 Sia $X = \mathbb{R}$ e $d(x, y) = |x - y|$. Allora $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ è uno spazio metrico (le tre proprietà sono ben note...).

Teorema 1.1.4 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz) *Date due N-ple di numeri reali $(s_1, \ldots, s_N)$ e $(t_1, \ldots, t_N)$, si ha:*

$$\sum_{i=1}^{N} |s_i\, t_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (s_i^2 + t_i^2)\,. \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} |s_i\, t_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{N} s_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} t_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{1.2}$$

Dimostrazione. La formula (1.1) si ottiene sommando (per i che va da 1 a N) le disuguaglianze

$$|s_i\, t_i| \leq \frac{s_i^2 + t_i^2}{2}\,,$$

evidentemente vere essendo equivalenti alla disuguaglianza $(|s_i| - |t_i|)^2 \geq 0$. Per dimostrare la (1.2), osserviamo che è evidentemente vera se $(s_1, \ldots, s_N) = (0, \ldots, 0)$ o se $(t_1, \ldots, t_N) = (0, \ldots, 0)$; altrimenti, applichiamo la (1.1) alle N-ple $(x_1, \ldots, x_N)$ e $(y_1, \ldots, y_N)$ definite da

$$x_i = \frac{|s_i|}{\left(\sum_{i=1}^{N} s_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}}\,, \qquad y_i = \frac{|t_i|}{\left(\sum_{i=1}^{N} t_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Si ottiene, essendo $\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 1 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2$,

$$\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N} s_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} t_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \sum_{i=1}^{N} |s_i\, t_i| = \sum_{i=1}^{N} \frac{|s_i\, t_i|}{\left(\sum_{i=1}^{N} s_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} t_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \leq 1\,,$$

da cui la tesi. ∎

Esempio 1.1.5 Sia $X = \mathbb{R}^N$ e

$$d((x_1, \ldots, x_N), (y_1, \ldots, y_N)) = \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Si ha che $(\mathbb{R}^N, d)$ è uno spazio metrico. La i) e la ii) sono evidenti, mentre per la iii) procediamo come segue, indicando con $X = (x_1, \dots, x_N)$, $Y = (y_1, \dots, y_N)$ e $Z = (z_1, \dots, z_N)$ tre vettori di $\mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned}
[d(X,Y)]^2 &= \sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N} [(x_i - z_i)^2 + 2(x_i - z_i)\,(z_i - y_i) + (z_i - y_i)^2] \\
&= [d(X,Z)]^2 + [d(Z,Y)]^2 + 2 \sum_{i=1}^{N} (x_i - z_i)\,(z_i - y_i)\,.
\end{aligned}$$

Applicando la (1.2), si ha

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - z_i)\,(z_i - y_i) \le \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i - z_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} (z_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = d(X,Y)\, d(Z,Y)\,.$$

Pertanto,

$$[d(X,Y)]^2 \le [d(X,Z)]^2 + [d(Z,Y)]^2 + 2d(X,Z)\, d(Z,Y) = [d(X,Z) + d(Z,Y)]^2\,,$$

che è la iii).

Teorema 1.1.6 (Disuguaglianza di Young) *Siano s, t due numeri reali e siano p e q due numeri reali tali che*

$$p > 1\,, \quad q > 1\,, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Allora

$$|s\,t| \le \frac{|s|^p}{p} + \frac{|t|^q}{q}\,. \tag{1.3}$$

Dimostrazione. Se uno tra s e t è zero, non c'è nulla da provare. Se sono entrambi non nulli, dividiamo la (1.3) per $|t|^q$, ottenendo

$$\frac{|s|}{|t|^{q-1}} \le \frac{|s|^p}{p\,|t|^q} + \frac{1}{q}\,.$$

Definiamo
$$\rho = \frac{|s|}{|t|^{q-1}}\,.$$
Essendo $1/p + 1/q = 1$, si ha $p(q-1) = q$, e quindi
$$\rho^p = \frac{|s|^p}{|t|^{p(q-1)}} = \frac{|s|^p}{|t|^q}\,.$$
Dimostrare la (1.3) è quindi equivalente a mostrare che
$$\rho \le \frac{\rho^p}{p} + \frac{1}{q}\,,$$
per ogni $\rho \ge 0$, ovvero che
$$\varphi(\rho) = \frac{\rho^p}{p} - \rho + \frac{1}{q}$$
è positiva su $[0, +\infty)$. Si ha $\varphi(0) = 1/q$, mentre φ diverge per ρ tendente a $+\infty$ (essendo $p > 1$). Si ha poi
$$\varphi'(\rho) = \rho^{p-1} - 1\,,$$
e quindi $\varphi'(\rho) = 0$ se e solo se $\rho = 1$. Si vede facilmente che $\rho = 1$ è di minimo (assoluto) per φ; essendo
$$\varphi(1) = \frac{1}{p} - 1 + \frac{1}{q} = 0\,,$$
si ha la tesi. ■

Semplice conseguenza del Teorema precedente (si ragiona come nella dimostrazione del Teorema 1.1.4) è il risultato che segue.

Teorema 1.1.7 (Disuguaglianza di Hölder) *Siano date due N-ple di numeri reali $(s_1, \ldots, s_N)$ e $(t_1, \ldots, t_N)$. Siano p e q due numeri reali tali che*
$$p > 1\,, \quad q > 1\,, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$
Allora
$$\sum_{i=1}^{N} |s_i\, t_i| \le \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{N} |s_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{N} |t_i|^q\,. \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} |s_i\, t_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |s_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{N} |t_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} . \tag{1.5}$$

Si osservi che essendo $1/2 + 1/2 = 1$ (!), le formule (1.1) e (1.2) sono casi particolari di (1.4) e (1.5).

Esempio 1.1.8 Sia $X = \mathbb{R}^N$, $p > 1$ e

$$d_p((x_1, \ldots, x_N), (y_1, \ldots, y_N)) = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Allora $(\mathbb{R}^N, d_p)$ è uno spazio metrico. Al solito, i) e ii) sono evidenti, mentre la disuguaglianza triangolare è di dimostrazione più complicata; si ha (supponendo $d_p(X, Y) \neq 0$, altrimenti la tesi è banale)

$$\begin{aligned} [d_p(X,Y)]^p &= \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1}\, |x_i - y_i| \\ &= \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p\, |x_i - z_i + z_i - y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1}\, |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1}\, |z_i - y_i| \, . \end{aligned} \tag{1.6}$$

Applicando la (1.5), si ha

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1}\, |x_i - z_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{(p-1)\, q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

e

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1}\, |z_i - y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{(p-1)\, q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{N} |z_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Essendo $(p-1)q = p$, si ha allora

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1}\, |x_i - z_i| \leq [d_p(X,Y)]^{\frac{p}{q}}\, d_p(X,Z) \, ,$$

e

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^{p-1} |z_i - y_i| \leq [d_p(X,Y)]^{\frac{p}{q}} d_p(Z,Y) .$$

Sostituendo in (1.6), si ha

$$[d_p(X,Y)]^p \leq [d_p(X,Y)]^{\frac{p}{q}} [d_p(X,Z) + d_p(Z,Y)] .$$

Dividendo per $d_p(X,Y)$ (che è diverso da zero per ipotesi), si ottiene la disuguaglianza triangolare osservando che $p - p/q = 1$.

Sempre in $\mathbb{R}^N$ è possibile definire

$$d_\infty((x_1,\dots,x_N),(y_1,\dots,y_N)) = \max\{|x_i - y_i|, i = 1,\dots,N\} .$$

Lo spazio $(\mathbb{R}^N, d_\infty)$ è uno spazio metrico (verifica molto semplice, in questo caso).

Esercizio 1.1.9 Dimostrare che

$$\lim_{p\to+\infty} d_p((x_1,\dots,x_N),(y_1,\dots,y_N)) = d_\infty((x_1,\dots,x_N),(y_1,\dots,y_N)) .$$

Teorema 1.1.10 (Cauchy-Schwartz e Hölder) *Siano date $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ due successioni di numeri reali;*

a) se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} s_n^2 < +\infty , \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} t_n^2 < +\infty ,$$

si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n\, t_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} s_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t_n^2\right)^{\frac{1}{2}} ; \tag{1.7}$$

b) dati p e q due numeri reali tali che

$$p > 1 , \quad q > 1 , \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 ,$$

se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n|^p < +\infty , \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} |t_n|^q < +\infty ,$$

si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n\, t_n| \le \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |s_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |t_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} . \tag{1.8}$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima formula (l'altra ha dimostrazione analoga). Sia N fissato; applicando (1.2), si ha

$$\sum_{n=1}^{N} |s_n\, t_n| \le \left(\sum_{n=1}^{N} s_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} t_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{n=1}^{+\infty} s_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} ;$$

la seconda disuguaglianza è dovuta al fatto che le serie sono a termini non negativi (e quindi la successione delle somme parziali è monotona crescente). Pertanto, essendo la disuguaglianza precedente vera per ogni N in $\mathbb{N}$, si ha

$$\sup \left\{ \sum_{n=1}^{N} |s_n\, t_n|, n \in \mathbb{N} \right\} \le \left(\sum_{n=1}^{+\infty} s_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Essendo la serie di termine generico $|s_n\, t_n|$ una serie a termini non negativi, la successione delle somme parziali è monotona crescente, cosicché l'estremo superiore coincide con il limite per N tendente a $+\infty$, cioè la somma della serie. ∎

Esempio 1.1.11 Sia $p \ge 1$, e siano

$$X = \ell^p = \left\{ \{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\} ,$$

$$d_p(\{x_n\}, \{y_n\}) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Allora (ℓ^p, d_p) è uno spazio metrico. Come al solito, i) e ii) sono di verifica immediata, più complicato è il controllo della disuguaglianza triangolare. La verifica si effettua come nel caso di $(\mathbb{R}^n, d_p)$, usando (1.8). Se $p = 1$, la verifica discende semplicemente dalla disugaglianza triangolare in $\mathbb{R}$.

Si noti che gli spazi ℓ^p soddisfano le seguenti inclusioni, se $q > p \ge 1$:

$$\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q ,$$

e le inclusioni sono strette. Per verificare le inclusioni, è sufficiente osservare che se $\{x_n\}$ appartiene a ℓ^p, allora $|x_n|^p$ tende a zero, e quindi $|x_n|$ tende a zero. Pertanto, $|x_n|$ è definitivamente minore di 1, il che implica che $|x_n|^q \leq |x_n|^p$ definitivamente (essendo $q > p$). Quindi $\{x_n\}$ appartiene a ℓ^q (per il criterio del confronto). L'inclusione è stretta in quanto (ad esempio) $x_n = 1/[n^{1/q} \ln^2(n)]$ è in ℓ^q ma non in ℓ^p se $p < q$.

Sia poi

$$X = \ell^\infty = \{\{x_n\} \subset \mathbb{R} : \{x_n\} \text{ è limitata}\} ,$$
$$d_\infty(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup\{|x_n - y_n|, n \in \mathbb{N}\} . \tag{1.9}$$

Allora (ℓ^∞, d_∞) è uno spazio metrico (la verifica questa volta è facile!) tale che $\ell^p \subset \ell^\infty$ per ogni $p \geq 1$, con inclusione stretta (ogni successione limitata ma non infinitesima non appartiene ad ℓ^p dal momento che la condizione necessaria di convergenza della serie non è verificata).

Esempio 1.1.12 Siano

$$X = C^0([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \;\; f \text{ continua}\} ,$$

e

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in [a, b]\} = \max\{|f(x) - g(x)|, x \in [a, b]\} .$$

Allora $(C^0([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ è uno spazio metrico, come si verifica facilmente (anche la disuguaglianza triangolare!).

Esempio 1.1.13 Siano

$$X = C^0([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \;\; f \text{ continua}\} ,$$

e

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx .$$

Allora $(C^0([a, b], \mathbb{R}), d_1)$ è uno spazio metrico: la ii) e la iii) sono facilmente verificate (ricordando la monotonia dell'integrale), mentre la i) segue dall'osservazione che se l'integrale del modulo di una funzione continua h è nullo, allora h è identicamente nulla. Infatti, se h non fosse nulla, esisterebbe x_0 in $[a, b]$ tale che $|h(x_0)| > 0$; per il teorema della permanenza del segno, esisterebbe un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sul quale si ha $|h(x)| > |h(x_0)|/2$. Pertanto

$$0 = \int_a^b |h(x)|\, dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |h(x)|\, dx > \delta\, |h(x_0)| > 0\,,$$

da cui l'assurdo.

Teorema 1.1.14 (Disuguaglianza di Hölder) *Siano f e g due funzioni in $C^0([a,b],\mathbb{R})$ e siano p e q maggiori di 1 e tali che $1/p + 1/q = 1$. Allora*

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.10}$$

Dimostrazione. È sufficiente partire dalla disuguaglianza di Young, vera per ogni x in $[a,b]$,

$$|f(x)\, g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}\,,$$

integrare i due termini su $[a,b]$ e poi applicare la disuguaglianza così trovata a

$$\overline{f}(x) = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}}\,, \qquad \overline{g}(x) = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}}\,,$$

non prima di aver osservato che se l'integrale di $|f(x)|^p$ (o di $|g(x)|^q$) è nullo, la f (ovvero la g) è nulla e la disuguaglianza (1.10) è banalmente vera.

■

Esempio 1.1.15 Siano $p > 1$,

$$X = C^0([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \;\; f \text{ continua}\}\,,$$

e

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ragionando come nell'Esempio 1.1.11, ed usando la (1.10), si dimostra facilmente che $(C^0([a,b],\mathbb{R}), d_p)$ è uno spazio metrico.

☹ **Esercizio 1.1.16** Dimostrare che

$$\lim_{p\to+\infty} d_p(f,g) = d_\infty(f,g)\,.$$

Esempio 1.1.17 Siano

$$X = C^1([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\ \ f \text{ continua con derivata continua}\}\,,$$

$$\overline{d}_{\infty,1}(f,g) = \sup\{|f'(x) - g'(x)|, x \in [a,b]\} = d_\infty(f',g')\,,$$

e

$$d_{\infty,1}(f,g) = d_\infty(f',g') + d_\infty(f,g)\,.$$

Allora $(C^1([a,b],\mathbb{R}),\overline{d}_{\infty,1})$ non è uno spazio metrico (dal momento che se f e g differiscono per una costante, $\overline{d}$ è nulla), mentre $(C^1([a,b],\mathbb{R}), d_{\infty,1})$ lo è. Dal momento che l'aggiunta di $d_\infty(f,g)$ è dovuta solo alla necessità di distinguere due funzioni la cui differenza è costante, si può considerare su $C^1([a,b],\mathbb{R})$ la distanza

$$\tilde{d}_{\infty,1}(f,g) = d_\infty(f',g') + |f(x_0) - g(x_0)|\,,$$

con x_0 punto qualsiasi di $[a,b]$. In questa maniera, per calcolare la distanza tra f e g è sufficiente "conoscere" le derivate di f e g, ed il valore delle due funzioni in un unico punto (e non su tutto l'intervallo).

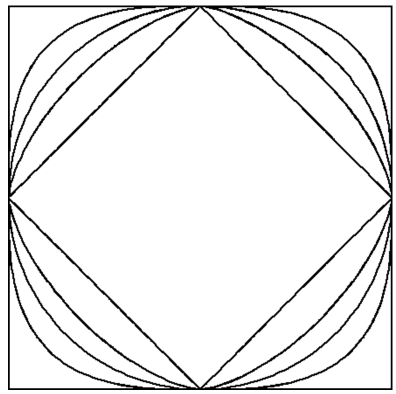
1.2 Proprietà degli spazi metrici

Definizione 1.2.1 Sia (X,d) uno spazio metrico, sia x_0 in X e $r > 0$. La **sfera aperta** di centro x_0 e raggio r è l'insieme

$$B_d(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}\,.$$

Un sottoinsieme A di (X,d) si dice **aperto** se per ogni x_0 in A esiste $r > 0$ tale che $B_d(x_0,r) \subseteq A$. Un sottoinsieme C di (X,d) si dice **chiuso** se $A = C^{\mathrm{c}} = X \setminus C$ è aperto.

Si verifica facilmente che in $(X,\text{discreta})$ ogni sottoinsieme è aperto (e quindi anche chiuso), mentre gli aperti di $(\mathbb{R},|\cdot|)$ e di $(\mathbb{R}^N, d_p)$ (per ogni p) sono gli aperti "soliti".



Le sfere di $(\mathbb{R}^2, d_p)$ per $p = 1, \frac{3}{2}, 2, 3$ e ∞ (procedendo dall'interno verso l'esterno)

Definizione 1.2.2 Sia (X, d) uno spazio metrico. Una successione $\{x_n\}$ contenuta in X si dice **convergente** a x_0 in X se si ha

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_0) = 0\,.$$

Quindi, come si vede, la definizione di convergenza in uno spazio metrico è ricondotta (in maniera naturale) alla convergenza a zero in $\mathbb{R}$ (meglio, nello spazio metrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$) della successione $\{d(x_n, x_0)\}$.

Ad esempio, nello spazio metrico dell'Esempio 1.1.2, le successioni convergenti sono tutte e sole le successioni che sono definitivamente costanti. La convergenza in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ e in $(\mathbb{R}^N, d_p)$ (per ogni p) è la convergenza solita che si dà per successioni in $\mathbb{R}$ ed in $\mathbb{R}^N$ (quest'ultima è — come è noto — equivalente alla convergenza in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ delle N componenti).

La convergenza in $C^0([a, b]), d_\infty)$ è la convergenza uniforme.

Teorema 1.2.3 *Sia $\{x_n\}$ una successione convergente in (X, d). Allora il limite è unico.*

Dimostrazione. Se x_n convergesse a x_0 e a y_0, si avrebbe

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_0) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_0) = 0\,.$$

Ma allora, per la disuguaglianza triangolare,

$$d(x_0, y_0) \le d(x_n, x_0) + d(x_n, y_0)\,,$$

da cui, ricordando che $d(x_0, y_0) \ge 0$ e passando al limite, $d(x_0, y_0) = 0$. Pertanto, $x_0 = y_0$. ■

Definizione 1.2.4 Siano (X, d) e $(Y, \overline{d})$ due spazi metrici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice **continua** in $x_0 \in X$ se, per ogni successione $\{x_n\}$ di X convergente a x_0, la successione $\{f(x_n)\}$ di Y converge a $f(x_0)$. Analogamente,

$$\lim_{d(x_n,x_0)\to 0} \overline{d}(f(x_n), f(x_0)) = 0 \,.$$

Questa definizione — negli spazi metrici — è equivalente all'altra (ben nota) data in termini di ε e δ:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 : d(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \overline{d}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \,.$$

Esempio 1.2.5 Siano $(X, \text{discreta})$ e $(Y, \overline{d})$ due spazi metrici. Allora ogni funzione $f : X \to Y$ è continua. Infatti, se $\{x_n\}$ è una qualsiasi successione convergente in $(X, \text{discreta})$ a x_0, allora si deve avere $x_n = x_0$ definitivamente. Pertanto, $f(x_n) = f(x_0)$ definitivamente, da cui $\overline{d}(f(x_n), f(x_0)) \to 0$.

Esercizio 1.2.6 Sia (X, d) uno spazio metrico e sia x_0 in X. Dimostrare che la funzione $d_{x_0} : X \to \mathbb{R}$ definita da $d_{x_0}(x) = d(x_0, x)$ è continua.

Definizione 1.2.7 Sia (Y, d) uno spazio metrico. Una funzione $f : X \to Y$ si dice **limitata** se esistono $M > 0$ ed y_0 in Y tali che

$$f(x) \in B_d(y_0, M) \,, \qquad \forall x \in X \,. \tag{2.1}$$

Definizione 1.2.8 Siano (X, d) e $(Y, \overline{d})$ due spazi metrici. Definiamo

$$L(X, Y) = \{f : X \to Y \,,\; f \text{ limitata}\} \,,$$

$$C(X, Y) = \{f : X \to Y \,,\; f \text{ continua e limitata}\} \,.$$

L'insieme $L(X, Y)$ (e quindi anche $C(X, Y)$ che ne è un sottoinsieme) può essere reso uno spazio metrico introducendo la distanza

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x\in X} \overline{d}(f(x), g(x)) \,. \tag{2.2}$$

È facile verificare che d_∞ è effettivamente una distanza; si noti che è ben definita perché sia f che g sono funzioni limitate. Nel caso in cui $(X, d) = ([a, b], |\cdot|)$ e $(Y, \overline{d}) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $C(X, Y)$ è proprio $C^0([a, b], \mathbb{R})$, dal momento che la limitatezza delle funzioni continue su $[a, b]$ è data dal teorema di Weierstrass. Inoltre, d_∞ è esattamente la distanza definita nell'Esempio 1.1.12.

Esempio 1.2.9 Siano $(X,d) = (\mathbb{N}, \text{discreta})$ e $(Y, \overline{d}) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Si ha allora, dal momento che ogni funzione f da X a Y non è niente altro che una successione di numeri reali,

$$L(X,Y) = \{\text{successioni limitate di numeri reali}\} = \ell^\infty .$$

Inoltre, essendo ogni "funzione" da X a Y continua (Esempio 1.2.5), si ha $C(X,Y) = L(X,Y)$. La distanza d_∞ definita da (2.2) è esattamente la distanza definita su ℓ^∞ da (1.9).

1.3 Spazi metrici completi

Il seguente teorema mostra come una successione convergente soddisfi una proprietà aggiuntiva.

Teorema 1.3.1 *Sia (X,d) uno spazio metrico e sia $\{x_n\}$ una successione in X convergente a x_0 in X. Allora la successione $\{x_n\}$ soddisfa la* **condizione di Cauchy***, ovvero*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon .$$

Dimostrazione. Se x_n converge a x_0 in X, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che $d(x_n, x_0) < \varepsilon/2$ per ogni $n \geq n_\varepsilon$. Se n e m sono entrambi maggiori di n_ε si ha allora, per la disuguaglianza triangolare,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \varepsilon ,$$

da cui la tesi. ■

Esempio 1.3.2 Il viceversa del teorema precedente non è vero: non tutte le successioni di Cauchy sono convergenti. Sia $X = (0,2)$ e $d(x,y) = |x-y|$. Allora (X,d) è uno spazio metrico, come si verifica facilmente, e la successione $x_n = 1/n$, pur essendo di Cauchy, non è convergente. La successione è di Cauchy perché è convergente in $(\mathbb{R}, d)$, ma non è convergente in X perché il suo (unico!) limite è zero, che non appartiene ad X.

Definizione 1.3.3 Uno spazio metrico si dice **completo** se ogni successione di Cauchy è convergente.

Nell'Esempio 1.1.2 lo spazio è completo perché le successioni di Cauchy sono tutte e sole le successioni definitivamente costanti (quindi convergenti). Tutti gli spazi metrici su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^N$ considerati nei vari esempi sono completi.

Un primo risultato generale sulla completezza è il seguente.

Teorema 1.3.4 *Sia (X, d) uno spazio metrico completo, e sia $C \subseteq X$ un insieme chiuso. Allora (C, d) è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in (C, d). Allora $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in (X, d), che è completo per ipotesi. Pertanto, esiste x_0 in X tale che x_n converge a x_0. Essendo C chiuso, x_0 appartiene a C (se, infatti, x_0 non appartenesse a C, sarebbe nel complementare di C, che è aperto; allora esisterebbe un numero reale $r > 0$ tale che $B_d(x_0, r) \cap C = \emptyset$, il che è assurdo perché la successione $\{x_n\}$ si trova definitivamente in tale intorno per definizione di limite), che quindi è completo. ∎

Un secondo risultato, ben più importante, riguarda $L(X, Y)$ e $C(X, Y)$.

Teorema 1.3.5 *Siano (X, d) e $(Y, \overline{d})$ due spazi metrici. Se $(Y, \overline{d})$ è completo, lo sono sia $L(X, Y)$ e $C(X, Y)$, dotati della metrica definita da (2.2).*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $(L(X, Y), d_\infty))$. Allora

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \sup_{x \in X} \overline{d}(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon \,.$$

Per definizione di sup, questo implica che

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \overline{d}(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon \,, \; \forall x \in X \,.$$

Pertanto, per ogni x in X la successione $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in $(Y, \overline{d})$, completo, e quindi converge ad un elemento di Y che definiremo $f(x)$. Passando al limite per m tendente ad infinito nella disuguaglianza $\overline{d}(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$, si trova (grazie all'Esercizio 1.2.6)

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \overline{d}(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \,, \quad \forall n \geq n_\varepsilon \,, \; \forall x \in X \,. \tag{3.1}$$

Sia ora y in Y. Si ha, per la disuguaglianza triangolare, ed essendo f_{n_ε} limitata per ipotesi,

$$\overline{d}(f(x), y) \leq \overline{d}(f(x), f_{n_\varepsilon}(x)) + \overline{d}(f_{n_\varepsilon}(x), y) \leq \varepsilon + M\,,$$

e quindi f appartiene a $L(X, Y)$. Inoltre, prendendo l'estremo superiore per x in X in (3.1), si ha

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : d_\infty(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon\,,$$

e quindi f_n converge a f in $(L(X, Y), d_\infty)$.

Se $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in $C(X, Y)$, lo stesso ragionamento svolto precedentemente permette di costruire una funzione in $L(X, Y)$ tale che f_n converge a f in d_∞. L'unica cosa da dimostrare è pertanto la continuità di f. Se x_0 e x_1 appartengono a X, si ha

$$\overline{d}(f(x_0), f(x_1)) \leq \overline{d}(f(x_0), f_{n_\varepsilon}(x_0)) + \overline{d}(f_{n_\varepsilon}(x_0), f_{n_\varepsilon}(x_1)) + \overline{d}(f_{n_\varepsilon}(x_1), f(x_1))\,.$$

La prima e la terza quantità sono minori di ε, mentre la seconda può essere scelta piccola prendendo x_0 ed x_1 vicini (dal momento che f_{n_ε} è continua). Pertanto, f è continua. ■

Corollario 1.3.6 *Sia* $(C^0([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ *che* (ℓ^∞, d_∞) *sono completi.*

Teorema 1.3.7 *Sia* $p > 1$. *Lo spazio* (ℓ^p, d_p) *è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{x^{(n)}\}$ una successione di Cauchy in (ℓ^p, d_p). Si ha allora

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon\,. \tag{3.2}$$

Pertanto, per ogni k in $\mathbb{N}$,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p < \varepsilon^p \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon\,,$$

e quindi la successione $\{n \mapsto x_k^{(n)}\}$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, che è completo. Siano allora x_k il limite per n tendente ad infinito di $x_k^{(n)}$, e $\overline{x}$ la successione $\{x_k\}$. Dal momento che da (3.2) segue che, per ogni N in $\mathbb{N}$,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon \,,$$

passando al limite per m tendente ad infinito, si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k^{(n)} - x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \,.$$

Prendendo l'estremo superiore su N in $\mathbb{N}$,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k^{(n)} - x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \,,$$

da cui segue che $\{x^{(n)}\}$ converge a $\overline{x}$ in (ℓ^p, d_p). Il fatto che $\overline{x}$ appartenga ad ℓ^p segue poi dalla disuguaglianza triangolare per d_p:

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = d_p(\overline{x}, 0) \leq d_p(\overline{x}, x^{(n_\varepsilon)}) + d_p(x^{(n_\varepsilon)}, 0) < +\infty \,,$$

essendo $x^{(n_\varepsilon)}$ in ℓ^p. ■

Esempio 1.3.8 Lo spazio $C^0([a, b]), d_1)$ non è completo. Consideriamo infatti $C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ e la successione $f_n(x)$ così definita:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-1, -1/n], \\ nx & \text{se } x \in (-1/n, 1/n) \\ 1 & \text{se } x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

La successione f_n è di Cauchy; infatti f_n e f_m differiscono al più (se $m > n$) sull'insieme $(-1/n, 1/n)$ e su questo insieme si ha $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 2$. Allora

$$d_1(f_n, f_m) = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)| \, dx = \int_{-1/n}^{1/n} |f_n(x) - f_m(x)| \, dx \leq \frac{4}{n} \,,$$

che può essere reso minore di ε se n è sufficientemente grande. D'altra parte non esiste nessuna funzione continua f tale che

$$d_1(f_n, f) = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|\, dx \to 0\,.$$

Sia infatti $a > 0$; allora

$$\int_a^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx \to 0\,,$$

essendo questa quantità positiva e minore di $d_1(f_n, f)$. Se n è tale che $1/n < a$ (fatto che accade definitivamente), dalla definizione di f_n si ha

$$\int_a^1 |1 - f(x)|\, dx \to 0\,,$$

da cui (essendo questa quantità indipendente da n),

$$\int_a^1 |1 - f(x)|\, dx = 0\,,$$

il che implica che $f \equiv 1$ su $[a, 1]$ per ogni $a > 0$. Con ragionamento analogo si prova che $f \equiv -1$ su $[-1, -a]$ con $a > 0$. Ma allora

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x)\,,$$

e quindi f non può essere continua in $x = 0$.

Esempio 1.3.9 Lo spazio $(X, d) = ((0, 1), |\cdot|)$ non è completo. Può, però, essere "reso" completo, aggiungendo i due punti 0 ed 1, senza modificare la distanza; in altre parole, si può prendere la "chiusura" di X in $\mathbb{R}$ (di $(X, |\cdot|)$ nello spazio metrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$), ed ottenere così uno spazio metrico completo. L'aggiunta dei due punti 0 ed 1 è "minimale" nel senso che per rendere X completo (senza cambiare metrica) non è necessario utilizzare altri punti. Si osservi che esistono successioni di Cauchy tutte contenute in X che convergono a 0 o ad 1 (mentre non esistono successioni di Cauchy contenute in X che convergono ad un qualsiasi numero reale non appartenente a $[0, 1]$).

Lo spazio $(X, d) = (\mathbb{Q}, |\cdot|)$ non è completo. Ad esempio, la successione

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ,$$

è contenuta in $\mathbb{Q}$, è di Cauchy (perché converge in $\mathbb{R}$ ad "e"), ma il limite non è un numero razionale. Anche in questo caso, come nel precedente, si può rendere $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ completo "aggiungendo" i limiti delle successioni di Cauchy di razionali. Ricordando che ogni numero reale è limite (in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$) di una successione di razionali (dunque di una successione di Cauchy di razionali), si ottiene tutto $\mathbb{R}$.

Lo spazio $(X, d) = (\{f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) : d_\infty(f, 0) < 1\}, d_\infty)$ non è completo. Ad esempio, la successione $f_n(x) = 1 - \frac{1}{n}$ è in X, è di Cauchy (dal momento che converge uniformemente a $f(x) = 1$), ma il suo limite non è in X. Anche in questo caso, si può rendere (X, d) completo "aggiungendo" le funzioni continue su $[a, b]$ tali che $d_\infty(f, 0) = 1$. Il risultato, che è $(\{f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) : d_\infty(f, 0) \leq 1\}, d_\infty)$, è completo essendo chiuso in $(C^0([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$, come si verifica facilmente. Si noti che, essendo possibile ottenere ogni funzione f tale che $d_\infty(f, 0) = 1$ come limite uniforme della successione $f_n = \frac{n}{n+1} f$ (che è tutta contenuta in X), e dal momento che nessuna funzione tale che $d_\infty(f, 0) > 1$ può essere ottenuta come limite uniforme di funzioni in X, ancora una volta abbiamo reso X completo aggiungendo i limiti delle successioni di Cauchy contenute in X.

A questo punto ci si può chiedere se questa operazione si può sempre effettuare. La risposta è affermativa, ed è data dal seguente teorema.

Teorema 1.3.10 (Completamento) *Dato uno spazio metrico (X, d), esiste uno spazio metrico* **completo** $(Y, \overline{d})$ *ed un'applicazione $i : X \to Y$ tale che*

1. *i è un'***isometria***, ovvero $\overline{d}(i(x_0), i(x_1)) = d(x_0, x_1)$, per ogni x_0, x_1 in X;*

2. *$i(X)$ è* **denso** *in Y, ovvero la chiusura di $i(X)$ in Y è Y.*

Dimostrazione. Sia

$$\mathcal{C} = \{\{x_n\} \text{ di Cauchy in } (X, d)\} .$$

Passo 1: Se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ appartengono a $\mathcal{C}$, allora la successione $z_n = d(x_n, y_n)$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Infatti si ha

$$z_n = d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n) = d(x_n, x_m) + z_m + d(y_m, y_n),$$

da cui

$$z_n - z_m \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)\,.$$

Scambiando il ruolo di n e m si trova la disuguaglianza $z_m - z_n \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$, da cui segue

$$|z_n - z_m| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)\,.$$

A questo punto, fissato $\varepsilon > 0$, è sufficiente scegliere n ed m più grandi di $n_\varepsilon = \max(n_\varepsilon(\{x_n\}), n_\varepsilon(\{y_n\}))$ per avere che $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Passo 2: Essendo $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ completo, per ogni coppia di successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ di $\mathcal{C}$, esiste il limite di $d(x_n, y_n)$. Definiamo in $\mathcal{C}$ la relazione seguente

$$\{x_n\}\rho\{y_n\} \iff \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0\,.$$

Si vede facilmente che ρ è una relazione di equivalenza (la transitività è conseguenza della disuguaglianza triangolare) su $\mathcal{C}$. Definiamo Y come lo spazio quoziente di $\mathcal{C}$ modulo la relazione ρ. Successivamente, rendiamo Y uno spazio metrico nel modo seguente: siano $\overline{x}$ e $\overline{y}$ in Y, e siano $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ due successioni in $[\overline{x}]$ e $[\overline{y}]$ rispettivamente. Allora

$$\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n)\,.$$

Tale definizione è ben posta, dal momento che cambiando rappresentanti in $[\overline{x}]$ e $[\overline{y}]$ il limite non cambia (sempre per la disuguaglianza triangolare). La funzione $\overline{d}$ è non negativa (dal momento che d lo è), e si annulla se e solo se $\overline{x} = \overline{y}$ (per definizione, se il limite di $d(x_n, y_n)$ è zero, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono nella stessa classe di equivalenza). La simmetria è conseguenza della simmetria di d, mentre la disuguaglianza triangolare segue passando al limite per n tendente ad infinito nella disuguaglianza

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)\,.$$

Passo 3: Dato x in X, definiamo $\mathrm{cost}(x)$ la successione che ha tutte le componenti uguali ad x. Tale successione è evidentemente in $\mathcal{C}$. Definiamo $i : X \to Y$ nel modo seguente: $i(x) = [\mathrm{cost}(x)]$. Essendo la definizione di $\overline{d}$ indipendente dalla scelta del rappresentante nella classe di equivalenza, si può scegliere la successione $\mathrm{cost}(x)$ in $[\mathrm{cost}(x)]$ e si ha allora

$$\overline{d}(i(x), i(y)) = \lim_{n\to+\infty} d((\mathrm{cost}(x))_n, (\mathrm{cost}(y))_n) = \lim_{n\to+\infty} d(x,y) = d(x,y)\,,$$

e quindi i è un'isometria.

Passo 4: $i(X)$ è denso in $(Y, \overline{d})$.

Sia $\overline{y}$ in Y, e sia $\{x_m\}$ una successione qualsiasi in $[\overline{y}]$. Definiamo $y_m = i(x_m) = [\mathrm{cost}(x_m)]$ e calcoliamo $\overline{d}(y_m, y)$. Si ha

$$\overline{d}(y_m, y) = \lim_{n\to+\infty} d((\mathrm{cost}(x_m))_n, x_n) = \lim_{n\to+\infty} d(x_m, x_n)\,.$$

Essendo la successione $\{x_m\}$ in $\mathcal{C}$, la successione $\{x_m\}$ è di Cauchy in (X, d). Pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon\,, \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon\,.$$

Questo fatto implica che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_m, x_n) \leq \varepsilon\,, \quad \forall m \geq n_\varepsilon$$

(ricordiamo che tale limite esiste perché la successione $\{n \mapsto d(x_m, x_n)\}$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$). Pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che $\overline{d}(y_m, y) \leq \varepsilon$ per ogni $m > n_\varepsilon$, ovvero si ha che $\{y_m\}$ converge a y in $(Y, \overline{d})$.

Passo 5: $(Y, \overline{d})$ è completo.

Sia $\{x^{(n)}\}$ una successione di Cauchy in $(Y, \overline{d})$. Dal momento che $i(X)$ è denso in $(Y, \overline{d})$, per ogni n in $\mathbb{N}$ esiste x_n in X tale che

$$\overline{d}(x^{(n)}, i(x_n)) \leq \frac{1}{n}\,. \tag{3.3}$$

Mostriamo che la successione $\{x_n\}$ è in $\mathcal{C}$. Si ha infatti (ricordando che i è un'isometria),

$$d(x_n, x_m) = \overline{d}(i(x_n), i(x_m)) \leq \overline{d}(i(x_n), x^{(n)}) + \overline{d}(x^{(n)}, x^{(m)}) + \overline{d}(x^{(m)}, i(x_m))\,.$$

Usando (3.3), e scegliendo n e m sufficientemente grandi (in modo che $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{m}$ siano minori di ε, e in modo che $\overline{d}(x^{(n)}, x^{(m)})$ sia anch'essa minore di ε), si prova che $d(x_n, x_m) < 3\varepsilon$ e quindi $\{x_n\}$ è in $\mathcal{C}$. Sia ora $\overline{x} = [\{x_n\}]$; mostriamo che $\{x^{(n)}\}$ converge a $\overline{x}$ in $(Y, \overline{d})$. Si ha infatti, sempre per (3.3), e per definizione di $\overline{d}$,

$$\overline{d}(\overline{x}, x^{(n)}) \leq \overline{d}(\overline{x}, i(x_n)) + \overline{d}(i(x_n), x^{(n)}) \leq \lim_{m \to +\infty} d(x_n, x_m) + \frac{1}{n}\,.$$

Ricordando che $\{x_n\}$ è di Cauchy, se n è sufficientemente grande si ha $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ e $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Pertanto, per tali n, $\overline{d}(\overline{x}, x^{(n)}) \leq 2\varepsilon$, da cui la tesi. ∎

Osservazione 1.3.11 Si può anche dimostrare che lo spazio metrico $(Y, \overline{d})$ è unico a meno di isometrie, ovvero se esiste un altro spazio metrico $(Z, \tilde{d})$ che verifica 1. e 2. del teorema precedente, allora esiste un'isometria biiettiva $\overline{i}$ tra $(Y, \overline{d})$ e $(Z, \tilde{d})$.

☹ **Esercizio 1.3.12** Nel caso di $(C^0([a, b], \mathbb{R}), d_1)$, chi sono Y e i? Ovvero, se $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in d_1, che proprietà ha il suo limite in Y? È chiaro che non è possibile ragionare come nell'Esempio 1.3.9, perché in tutti e tre i casi era sufficiente prenderne la chiusura (e scegliere per i l'identità) per completarlo (dato che lo spazio non completo era contenuto in un altro completo). In questo caso $C^0([a, b], \mathbb{R})$ è già "tutto lo spazio", il che vuol dire che sarà necessario ampliarlo con funzioni non continue per renderlo completo. Ma non tutte le funzioni discontinue sono integrabili (secondo Riemann)...

Capitolo 2

Teoria della misura

2.1 La misura secondo Peano-Jordan

Ricordiamo brevemente i passi necessari per definire la misura (e la misurabilità) secondo Peano-Jordan di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

- La *lunghezza* di un intervallo aperto $I = (a, b)$ di $\mathbb{R}$ è definita come $l(I) = b - a$ (e lo stesso per intervalli della forma $[a, b)$, $(a, b]$ e $[a, b]$).
- Un *pluriintervallo* è un insieme
$$P = \bigcup_{j=1}^{n} I_j\,,$$
con gli I_j intervalli a due a due disgiunti, e la sua misura $m(P)$ è definita come la somma delle lunghezze degli I_j.
- La *misura esterna* di un sottoinsieme limitato E di $\mathbb{R}$ è definita da
$$m(PJ)^*(E) = \inf\{m(P)\,,\ P \text{ pluriintervallo, } E \subseteq P\}\,.$$
La *misura interna* di un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ è definita da
$$m(PJ)_*(E) = \sup\{m(P)\,,\ P \text{ pluriintervallo, } P \subseteq E\}\,.$$
- Un sottoinsieme limitato E di $\mathbb{R}$ si dice *misurabile* secondo Peano-Jordan ($E \in \mathcal{PJ}$) se e solo se $m(PJ)^*(E) = m(PJ)_*(E)$. In questo caso, si definisce $m_{\mathrm{PJ}}(E) = m(PJ)^*(E)$ la sua misura.

Come conseguenza di questa costruzione, si ottiene una funzione di insieme $m_{\mathrm{PJ}} : \mathcal{PJ} \to \mathbb{R}$ che estende il concetto di lunghezza ad insiemi più "complicati" (si dimostra infatti che $m_{\mathrm{PJ}}(I) = l(I)$ per ogni intervallo I di $\mathbb{R}$), ed è tale che se $E_1, \ldots, E_n$ sono n insiemi in $\mathcal{PJ}$, allora è in $\mathcal{PJ}$ anche la loro unione. In più

$$m_{\mathrm{PJ}}\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} m_{\mathrm{PJ}}(E_j)\,,$$

l'uguale valendo nel caso in cui gli E_j siano a due a due disgiunti.

Il maggior "difetto" della misura secondo Peano-Jordan è il fatto che (a differenza di quanto accade per le unioni finite) l'unione numerabile di insiemi misurabili non è necessariamente un insieme misurabile, come si vede dal seguente esempio.

Esempio 2.1.1 L'insieme $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ non è misurabile secondo Peano-Jordan. Infatti, è facile vedere che $m(PJ)_*(E) = 0$ (dal momento che E non contiene intervalli, e pertanto l'unico pluriintervallo interno è l'insieme vuoto). Sia ora $\{I_j,\ j = 1, \ldots, N\}$ una famiglia finita di intervalli tali che

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} I_j\,,$$

con gli I_j a due a due disgiunti, e mostriamo che la somma delle lunghezze degli I_j è maggiore o uguale a 1. Se, infatti, la somma delle lunghezze fosse strettamente minore di 1, l'insieme $[0,1] \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{N} I_j\right)$ avrebbe misura interna strettamente positiva, e quindi dovrebbe contenere almeno un intervallo. Siccome in questo intervallo cadono infiniti razionali, l'unione degli I_j non può ricoprire E. Pertanto, $m(PJ)^*(E) \geq 1$ (in realtà, è esattamente uguale ad 1, dato che $[0,1]$ ricopre E), e quindi E non è misurabile. Dal momento che E è numerabile, si può vederlo come unione (infinita) dei suoi punti, che sono, invece, sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}$.

Dunque, unire infiniti insiemi misurabili può dare come risultato un insieme non misurabile. Ciò vuol dire — in un certo senso — che la misura di Peano-Jordan non si comporta bene rispetto alle successioni di insiemi, ovvero che si presta poco a trattare problemi nei quali sia necessario approssimare oggetti “complicati” con successioni di oggetti semplici. Per risolvere tale problema, è necessario quindi modificare il concetto di misura, a partire dalla definizione di misura esterna.

2.2 La misura secondo Lebesgue

Definizione 2.2.1 Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Se I è limitato, la sua lunghezza $l(I)$ è definita come la differenza dei due estremi; se I è illimitato, la sua lunghezza $l(I)$ è definita $+\infty$.

Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. La *misura esterna* $m^*(E)$ è così definita:

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} l(I_j)\,,\ \{I_j\}_{j\in J} \ \begin{array}{c}\text{famiglia al più numerabile}\\ \text{di intervalli aperti}\end{array} : \ E \subseteq \bigcup\nolimits_{j\in J} I_j \right\}.$$

Osservazione 2.2.2 Si noti che E non deve necessariamente essere limitato; la principale differenza con la misura esterna definita precedentemente, è che adesso si possono considerare unioni infinite di intervalli, e non solo unioni finite. Si ha poi, per ogni sottoinsieme limitato E di $\mathbb{R}$, $m^*(E) \leq m(PJ)^*(E)$ (dal momento che i ricoprimenti ammissibili per il calcolo di $m(PJ)^*(E)$ lo sono anche per il calcolo di $m^*(E)$). Dalla definizione segue immediatamente che

$$m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]\,,$$

e che $m^*(\emptyset) = 0$.

Esempio 2.2.3 Sia $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Allora $m^*(E) = 0$. Infatti, sia $E = \{q_n\}$, con n in $\mathbb{N}$, sia $\varepsilon > 0$ e sia

$$I_n = \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right).$$

Allora $\{I_n\}$ è una famiglia numerabile di intervalli aperti che ricopre E (dato che q_n appartiene ad I_n), e si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon\,.$$

Pertanto, per definizione, $m^*(E) \leq \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, da cui la tesi. Si noti che la stessa dimostrazione può essere ripetuta per un qualsiasi altro insieme numerabile.

Dimostriamo ora alcune proprietà della misura esterna.

Teorema 2.2.4 (Monotonia) *Siano A e B sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ con $A \subseteq B$. Allora*

$$m^*(A) \leq m^*(B)\,. \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Se $\{I_j\}_{j\in J}$ è un ricoprimento di intervalli aperti di B, allora $\{I_j\}_{j\in J}$ è un ricoprimento di intervalli aperti di A; si ha dunque, per definizione,

$$m^*(A) \leq \sum_{j\in J} l(I_j)\,.$$

Prendendo l'estremo inferiore al variare di tutti i ricoprimenti di intervalli aperti di B si ha la tesi. ■

Teorema 2.2.5 (Regolarità) *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con $m^*(A) < +\infty$. Allora*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\{I_j^\varepsilon\}_{j\in J_\varepsilon} : A \subseteq \bigcup_{j\in J_\varepsilon} I_j^\varepsilon\,, \quad \sum_{j\in J_\varepsilon} l(I_j^\varepsilon) \leq m^*(A) + \varepsilon\,. \tag{2.2}$$

Dimostrazione. La tesi segue dalla definizione di m^* e dalle proprietà dell'estremo inferiore. ■

Teorema 2.2.6 (Estensione) *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Allora $m^*(I) = l(I)$.*

Dimostrazione. Sia $I = [a, b]$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, $I \subset I_\varepsilon = (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ e pertanto

$$m^*(I) \leq l(I_\varepsilon) = b - a + 2\varepsilon = l(I) + 2\varepsilon\,,$$

da cui $m^*(I) \leq l(I)$. Sia ora $\{I_j\}_{j\in J}$ un ricoprimento di intervalli aperti di I. Se J è infinito, essendo I compatto, da $\{I_j\}$ si può estrarre un sottoricoprimento finito; pertanto, in ogni caso, esistono $I_1 \ldots, I_n$ intervalli aperti della famiglia $\{I_j\}_{j\in J}$ tali che

$$I \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} I_j\,.$$

Si ha allora che la somma delle lunghezze degli I_j è maggiore o uguale a $l(I)$. Infatti, dal momento che a è in I, esiste un j tra 1 ed n tale che a appartenga a I_j; supponiamo che sia $j = 1$ e quindi che $a \in I_1 = (a_1, b_1)$, con $a_1 < a$. Se b appartiene a I_1 ci fermiamo, altrimenti osserviamo che si ha $b_1 \leq b$ e quindi b_1 è in I. Pertanto, b_1 appartiene ad un altro degli intervalli I_j, diciamo $I_2 = (a_2, b_2)$. Si ha allora $a_2 < b_1 < b_2$. Se b appartiene a I_2 ci fermiamo, altrimenti continuiamo come prima. Dopo un numero finito di passi (al più n), il procedimento finisce, ovvero b appartiene ad un certo $I_k = (a_k, b_k)$. Abbiamo allora

$$a_1 < a \leq b_1\,, \quad a_2 < b_1 \leq b_2\,, \quad \ldots\,, \quad a_k < b_{k-1} \leq b < b_k\,.$$

Pertanto $l(I_h) = b_h - a_h > a_{h+1} - a_h$, per ogni h da 2 a $k-1$, mentre $l(I_k) = b_k - a_k > b - a_k$ e $l(I_1) = b_1 - a_1 > a_2 - a$. Sommando, si ottiene

$$\sum_{h=1}^{k} l(I_h) > b - a = l(I)\,.$$

D'altra parte (avendo ridotto il numero degli I_j), si ha

$$\sum_{j \in J} l(I_j) \geq \sum_{h=1}^{k} l(I_h)\,,$$

e quindi $m*(I) \geq l(I)$, da cui segue la tesi.

Sia ora $I = (a, b)$; ovviamente, dato che I è un ricoprimento aperto di se stesso, si ha $m^*(I) \leq l(I)$; se consideriamo $I_\varepsilon = [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, si ha $I_\varepsilon \subset I$, da cui segue (per (2.1)) $m^*(I_\varepsilon) \leq m^*(I)$. Per quanto appena dimostrato, $m^*(I_\varepsilon) = l(I_\varepsilon) = b - a - 2\varepsilon = l(I) - 2\varepsilon$. Pertanto

$$l(I) - 2\varepsilon \leq m^*(I) \leq l(I)\,,$$

da cui la tesi per l'arbitrarietà di ε.

Infine, sia I illimitato superiormente e sia x_0 in I. Siccome I è illimitato, per ogni $M > 0$ esiste x_M in I tale che $x_M > M$ e $x_M > x_0$. Essendo I un intervallo, $I_M = [x_0, x_M]$ è tutto contenuto in I, e pertanto (per (2.1)),

$$m^*(I) \geq m^*(I_M) = l(I_M) = x_M - x_0 > M - x_0\,.$$

Dunque, $m^*(I) \geq M - x_0$ per ogni $M > 0$. Pertanto, $m^*(I) = +\infty = l(I)$. Analoga dimostrazione vale nel caso in cui I sia illimitato inferiormente.

■

Teorema 2.2.7 (σ-subadditività) *Sia $\{E_n\}_{n\in J}$ una famiglia al più numerabile di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Allora*

$$m^*\left(\bigcup_{n\in J} E_n\right) \leq \sum_{n\in J} m^*(E_n)\,. \tag{2.3}$$

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare il teorema nel caso in cui J sia numerabile (se J è finito, si può aggiungere un'infinità di volte l'insieme vuoto, che ha misura esterna nulla e non "contribuisce" all'unione). Se la somma della serie a destra in (2.3) è $+\infty$ (ovvero se la serie diverge positivamente), non c'è nulla da dimostrare, così come non c'è nulla da dimostrare se uno degli E_n ha misura esterna infinita. Pertanto, supponiamo che tutti gli E_n abbiano misura esterna finita e che la serie converga. Sia $\varepsilon > 0$; per la (2.2), per ogni n in $\mathbb{N}$, esiste una famiglia $\{I_j^{(n)}\}_{j\in J_n}$ di intervalli aperti che ricopre E_n ed è tale che

$$\sum_{j\in J_n} l(I_j^{(n)}) \leq m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\,.$$

La famiglia $\{I^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N},\, j\in J_n}$ è ora una famiglia (al più numerabile, in quanto unione numerabile di famiglie al più numerabili) di intervalli aperti che ricopre l'unione degli E_n. Si ha allora

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{n\in J} E_n\right) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N},j\in J_n} l(I_j^{(n)}) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j\in J_n} l(I_j^{(n)})\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(E_n) + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. ■

Osservazione 2.2.8 Dal teorema precedente, e dal fatto — di verifica immediata — che $m^*(\{x\}) = 0$, segue che ogni insieme numerabile ha misura esterna nulla. Pertanto, essendo $m^*([0,1]) = l([0,1]) = 1$, si ha che $[0,1]$ non è numerabile.

Ricordiamo che se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e x è in $\mathbb{R}$, il traslato di E tramite x è definito da

$$E + x = \{x + y\,,\ y \in E\}\,.$$

Teorema 2.2.9 (Invarianza per traslazioni) *Si ha $m^*(E + x) = m^*(E)$ per ogni E sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e per ogni x in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Se I è un intervallo, si ha ovviamente $l(I + x) = l(I)$ per ogni x in $\mathbb{R}$. Dal momento che

$$E \subseteq \bigcup_{j\in J} I_j \iff (E + x) \subseteq \bigcup_{j\in J} (I_j + x)\,,$$

i due sottoinsiemi di $[0, +\infty]$ il cui estremo inferiore è rispettivamente $m^*(E)$ e $m^*(E + x)$ sono identici, da cui la tesi. ■

2.3 Misurabilità e misura

Possiamo ora dare la definizione di insieme misurabile. Ricordiamo che se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, il suo complementare E^c è l'insieme $E^c = \mathbb{R}\backslash E$.

Definizione 2.3.1 Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}$ si dice **misurabile secondo Lebesgue** se per ogni A sottoinsieme di $\mathbb{R}$ si ha

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)\,. \tag{3.1}$$

Dal momento che la misura esterna è subadditiva (Teorema 2.2.7), e siccome $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$, si ha, per ogni A sottoinsieme di $\mathbb{R}$,

$$m^*(A) \le m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)\,,$$

cosicché la misurabilità di un insieme è equivalente a dimostrare che, per ogni A sottoinsieme di $\mathbb{R}$,

$$m^*(A) \ge m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)\,. \tag{3.2}$$

Osserviamo che $E = \emptyset$ è misurabile, e che, essendo la definizione simmetrica in E e E^{c}, un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è misurabile se e solo se lo è il suo complementare. Pertanto, $\mathbb{R} = \emptyset^{\mathrm{c}}$ è misurabile.

Un primo risultato sugli insiemi misurabili è il seguente.

Teorema 2.3.2 *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che $m^*(E) = 0$. Allora E è misurabile.*

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Usando la monotonia della misura esterna (Teorema 2.2.4) si ha

$$A \cap E \subseteq E \Longrightarrow 0 \leq m^*(A \cap E) \leq m^*(E) = 0 \Longrightarrow m^*(A \cap E) = 0\,,$$

e

$$A \cap E^{\mathrm{c}} \subseteq A \Longrightarrow 0 \leq m^*(A \cap E^{\mathrm{c}}) \leq m^*(A)\,.$$

Pertanto, $m^*(A) \geq m^*(A \cap E^{\mathrm{c}}) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^{\mathrm{c}})$, che è la (3.2).

■

Come conseguenza del teorema precedente, l'insieme $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, così come qualsiasi altro insieme numerabile, è misurabile. Ricordiamo che E non era misurabile secondo Peano-Jordan.

La famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è chiusa rispetto all'unione finita.

Teorema 2.3.3 *Siano E_1 e E_2 due insiemi misurabili. Allora $E_1 \cup E_2$ è misurabile.*

Dimostrazione. Sia B un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Dal momento che E_2 è misurabile si ha, scegliendo $A = B \cap {E_1}^{\mathrm{c}}$ in (3.1),

$$\begin{aligned} m^*(B \cap {E_1}^{\mathrm{c}}) &= m^*((B \cap {E_1}^{\mathrm{c}}) \cap E_2) + m^*((B \cap {E_1}^{\mathrm{c}}) \cap {E_2}^{\mathrm{c}}) \\ &= m^*((B \cap {E_1}^{\mathrm{c}}) \cap E_2) + m^*(B \cap (E_1 \cup E_2)^{\mathrm{c}}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

D'altra parte, essendo

$$B \cap (E_1 \cup E_2) = (B \cap E_1) \cup (B \cap E_1 \cap {E_2}^{\mathrm{c}})\,,$$

la subadditività della misura esterna implica

$$m^*(B \cap (E_1 \cup E_2)) \leq m^*(B \cap E_1) + m^*(B \cap E_1 \cap {E_2}^{\mathrm{c}})\,. \tag{3.4}$$

Pertanto, usando (3.3) e (3.4),

$$\begin{aligned}
&m^*(B \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(B \cap (E_1 \cup E_2)^{\mathrm{c}}) \\
&\qquad \leq m^*(B \cap E_1) + m^*(B \cap E_1 \cap {E_2}^{\mathrm{c}}) + m^*(B \cap (E_1 \cup E_2)^{\mathrm{c}}) \\
&\qquad = m^*(B \cap E_1) + m^*(B \cap {E_1}^{\mathrm{c}}) \\
&\qquad = m^*(B)\,,
\end{aligned}$$

essendo E_1 misurabile. Abbiamo così ottenuto (3.2) e quindi la misurabilità di $E_1 \cup E_2$. ∎

Come conseguenza di questo teorema, si ha che l'unione di n insiemi misurabili è ancora misurabile. Siccome l'intersezione di due insiemi è il complementare dell'unione dei loro complementari, se ne deduce che l'intersezione di due (e quindi di n) insiemi misurabili è ancora misurabile.

La misura esterna ha un buon comportamento sulle unioni disgiunte di insiemi misurabili.

Teorema 2.3.4 *Siano $E_1, \ldots, E_n$ insiemi misurabili a due a due disgiunti. Allora, per ogni A sottoinsieme di $\mathbb{R}$ si ha*

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap E_j)\,. \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Si ragiona per induzione su n. Se $n = 1$ la (3.5) è l'identità $m^*(A \cap E_1) = m^*(A \cap E_1)$, ed è dunque vera. Supponiamo ora la (3.5) vera per n insiemi e dimostriamola per $n + 1$. Siano pertanto $E_1, \ldots, E_{n+1}$ insiemi misurabili a due a due disgiunti. Si ha allora

$$\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right) \cap E_{n+1} = E_{n+1}\,, \qquad \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right) \cap (E_{n+1})^{\mathrm{c}} = \left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right)\,.$$

Pertanto, dal momento che E_{n+1} è misurabile per ipotesi, per ogni sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ si ha, usando l'ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned}
&m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right)\right) \\
&\quad = m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right) \cap E_{n+1}\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right) \cap (E_{n+1})^{\mathrm{c}}\right) \\
&\quad = m^*(A \cap E_{n+1}) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right)\right) \\
&\quad = m^*(A \cap E_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap E_j) = \sum_{j=1}^{n+1} m^*(A \cap E_j)\,,
\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. ■

Osservazione 2.3.5 Nel caso particolare in cui $A = \mathbb{R}$, il risultato del teorema precedente diventa: se $E_1, \ldots, E_n$ sono insiemi misurabili a due a due disgiunti, si ha

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} m^*(E_j)\,, \tag{3.6}$$

che prende il nome di **finita additività della misura esterna**.

Grazie ai risultati provati precedentemente, è possibile mostrare che non solo l'unione finita, ma anche l'unione numerabile di insiemi misurabili è misurabile.

Teorema 2.3.6 (σ-additività) *Sia $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di insiemi misurabili. Allora*

$$E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\,,$$

è misurabile. Se poi gli E_j sono a due a due disgiunti, si ha

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} m^*(E_j)\,. \tag{3.7}$$

Dimostrazione. Iniziamo con l'osservare che E può essere scritto come unione numerabile di insiemi misurabili a due a due disgiunti:

$$E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} F_j \,.$$

Infatti, definiamo $F_1 = E_1$ e, per $n > 1$,

$$F_n = E_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j \right) = E_n \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j \right)^{\mathrm{c}} .$$

Essendo E_j misurabile per ogni j, è misurabile l'unione G_{n-1} dei primi $n-1$ degli E_j, quindi lo è il complementare di G_{n-1}, ed infine lo è F_n essendo l'intersezione tra i due insiemi (misurabili) E_n e G_{n-1}. Se $n > m$ si ha, essendo $F_n \subseteq E_n$ per ogni n,

$$F_n \cap F_m \subseteq F_n \cap E_m = E_n \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j \right)^{\mathrm{c}} \cap E_m \subseteq E_n \cap {E_m}^{\mathrm{c}} \cap E_m = \emptyset \,,$$

e pertanto gli F_n sono a due a due disgiunti. Ovviamente, si ha che l'unione degli F_n è contenuta nell'unione degli E_n (che è E) e pertanto non resta che dimostare che se x appartiene ad E, allora appartiene a qualche F_n. Se x è in E, x appartiene a qualcuno degli E_n e pertanto è ben definito

$$N(x) = \min\{n \in \mathbb{N} : x \in E_n\} \,,$$

dal momento che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ammette minimo. Se $N(x) = 1$, allora x appartiene ad E_1, e quindi, per definizione, ad F_1. Se $N(x) > 1$, allora x è in $E_{N(x)}$ ma non appartiene a nessuno degli E_n con $n < N(x)$. In altre parole,

$$x \in E_{N(x)} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{N(x)-1} E_j \right) = F_{N(x)} \,,$$

che è quanto si voleva mostrare.

Mostriamo ora che l'unione degli F_n (cioè E) è misurabile. Sia, per n in $\mathbb{N}$,

$$H_n = \bigcup_{j=1}^{n} F_j \,.$$

Si ha, evidentemente, $H_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$ e quindi $E^{\mathrm{c}} \subseteq {H_n}^{\mathrm{c}}$. Siccome H_n è misurabile (come unione finita di insiemi misurabili), per ogni sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ si ha,

$$m^*(A) = m^*(A \cap H_n) + m^*(A \cap {H_n}^{\mathrm{c}}) \geq m^*(A \cap H_n) + m^*(A \cap E^{\mathrm{c}})\,,$$

per la monotonia della misura esterna. D'altra parte, essendo gli F_n a due a due disgiunti, si può applicare il Teorema 3.5:

$$m^*(A \cap H_n) = \sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap F_j)\,,$$

da cui

$$m^*(A) \geq \sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap F_j) + m^*(A \cap E^{\mathrm{c}})\,.$$

Siccome la disuguaglianza precedente è valida per ogni n in $\mathbb{N}$, si può passare all'estremo superiore su n, ottenendo

$$m^*(A) \geq \sum_{j=1}^{+\infty} m^*(A \cap F_j) + m^*(A \cap E^{\mathrm{c}})\,.$$

D'altra parte, per la σ-subadditività della misura esterna,

$$m^*(A \cap E) = m^*\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} (A \cap F_j)\right) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} m^*(A \cap F_j)\,,$$

e pertanto $m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^{\mathrm{c}})$, ovvero E è misurabile.

Proviamo ora la (3.7). Già sappiamo, per il Teorema 2.2.7, che

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} m^*(E_j)\,.$$

D'altra parte, per ogni n in $\mathbb{N}$,

$$\bigcup_{j=1}^{n} E_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\,,$$

e pertanto, per (2.1) e (3.6),

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\right) \geq m^*\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} m^*(E_j)\,.$$

Facendo tendere n ad infinito, si trova

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\right) \geq \sum_{j=1}^{+\infty} m^*(E_j)\,,$$

da cui la tesi. ■

Come conseguenza di questo teorema, l'intersezione numerabile di insiemi misurabili è ancora misurabile.

Un caso particolare è quello delle successioni di insiemi "monotone".

Teorema 2.3.7 *Sia $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili.*

i) Se la successione è crescente, ovvero $E_j \subseteq E_{j+1}$ per ogni j in $\mathbb{N}$, allora

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\right) = \lim_{j\to+\infty} m^*(E_j)\,. \tag{3.8}$$

ii) Se la successione è decrescente, ovvero $E_{j+1} \subseteq E_j$ per ogni j in $\mathbb{N}$, e $m^*(E_1) < +\infty$, allora

$$m^*\left(\bigcap_{j=1}^{+\infty} E_j\right) = \lim_{j\to+\infty} m^*(E_j)\,. \tag{3.9}$$

Dimostrazione. Iniziamo con l'osservare che, in entrambi i casi, il limite di $m^*(E_j)$ esiste dal momento che la successione $\{m^*(E_j)\}$ è monotona.

i) Sia $E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j$; se esiste k tale che $m^*(E_k) = +\infty$, allora il limite delle misure esterne degli E_j è $+\infty$, e anche la misura esterna di E è $+\infty$ (dato che E contiene E_k). Supponiamo allora che $m^*(E_j) < +\infty$ per ogni j in $\mathbb{N}$, e definiamo $F_j = E_{j+1} \backslash E_j$. Allora F_j è misurabile per ogni j,

$$E = E_1 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} F_j\right)\,,$$

e l'unione è disgiunta. Per (3.7) si ha allora

$$m^*(E) = m^*(E_1) + \sum_{j=1}^{+\infty} m^*(F_j)\,. \tag{3.10}$$

Essendo $m^*(E_{j+1}) = m^*(F_j) + m^*(E_j)$ (come si verifica facilmente), si ha $m^*(F_j) = m^*(E_{j+1}) - m^*(E_j)$ e pertanto la serie in (3.10) è una serie telescopica, la cui somma è esattamente il limite di $m^*(E_j)$.

ii) Sia $E = \bigcap_{j=1}^{+\infty} E_j$ e definiamo $F_j = E_j \backslash E_{j+1}$. Allora

$$E_1 \backslash E = \bigcup_{j=1}^{+\infty} F_j\,.$$

Essendo gli F_j a due a due disgiunti e misurabili, si ha, per la (3.7),

$$m^*(E_1 \backslash E) = \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(F_j)\,. \tag{3.11}$$

Ora, $m^*(E_1) = m^*(E) + m^*(E_1 \backslash E)$ (perché $E \subseteq E_1$), e quindi $m^*(E_1 \backslash E) = m^*(E_1) - m^*(E)$ (si noti che qui si usa il fatto che $m^*(E_1)$ è finita); inoltre $m^*(F_j) = m^*(E_j \backslash E_{j+1}) = m^*(E_j) - m^*(E_{j+1})$. Pertanto, la serie che compare in (3.11) è una serie telescopica, e la sua somma è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} m^*(F_j) = m^*(E_1) - \lim_{j\to+\infty} m^*(E_j)\,.$$

Dunque

$$m^*(E_1) - m^*(E) = m^*(E_1) - \lim_{j\to+\infty} m^*(E_j)\,,$$

da cui la tesi. ∎

Osservazione 2.3.8 La condizione $m^*(E_1) < +\infty$ (che può essere sostituita con la condizione $m^*(E_k) < +\infty$ per qualche k) non è una condizione tecnica. Infatti, se $E_n = (n, +\infty)$, allora $\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n = \emptyset$, ma $m^*(E_n) = +\infty$ per ogni n (e quindi il limite vale $+\infty$).

Teorema 2.3.9 *Sia E un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}$. Allora $E + x$ è misurabile per ogni x in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. La tesi segue dal fatto che $(F+x)^{\mathrm{c}} = F^{\mathrm{c}} + x$, e dal fatto che $A \cap (F+x) = ((A-x) \cap F) + x$. Si ha allora, ricordando il Teorema 2.2.9, e siccome E è misurabile,

$$\begin{aligned} & m^*(A \cap (E+x)) + m^*(A \cap (E+x)^{\mathrm{c}}) \\ & \quad = m^*(((A-x) \cap E) + x) + m^*(((A-x) \cap E^{\mathrm{c}}) + x) \\ & \quad = m^*((A-x) \cap E) + m^*((A-x) \cap E^{\mathrm{c}}) \\ & \quad = m^*(A-x) = m^*(A)\,, \end{aligned}$$

e quindi $E+x$ è misurabile. ■

I teoremi precedenti danno alcune proprietà della misura esterna e degli insiemi misurabili, ma, a parte il Teorema 2.3.2, non danno alcuna indicazione su come siano fatti gli insiemi misurabili. Il prossimo teorema mostra che una semiretta aperta è misurabile.

Teorema 2.3.10 *Sia a in $\mathbb{R}$; la semiretta $E = (a, +\infty)$ è misurabile.*

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, e siano $A_1 = A \cap E$ e $A_2 = A \cap E^{\mathrm{c}}$. Vogliamo dimostrare che $m^*(A) \geq m^*(A_1) + m^*(A_2)$. Se la misura esterna di A è infinita, non c'è nulla da dimostrare; supponiamo pertanto che $m^*(A)$ sia finita. Sia $\varepsilon > 0$; per il Teorema 2.2, esiste una famiglia $\{I_j^\varepsilon\}_{j \in J_\varepsilon}$ di intervalli aperti che ricoprono A e tali che

$$\sum_{j \in J_\varepsilon} l(I_j^\varepsilon) \leq m^*(A) + \varepsilon\,.$$

Definiamo, per j in J_ε, $I_j^{\varepsilon,1} = I_j^\varepsilon \cap E$ e $I_j^{\varepsilon,2} = I_j^\varepsilon \cap E^{\mathrm{c}}$. Siccome sia E che il suo complementare sono intervalli, anche $I_j^{\varepsilon,1}$ e $I_j^{\varepsilon,2}$ lo sono. Inoltre, per definizione di A_1 e A_2,

$$A_1 \subseteq \bigcup_{j \in J_\varepsilon} I_j^{\varepsilon,1}\,, \qquad A_2 \subseteq \bigcup_{j \in J_\varepsilon} I_j^{\varepsilon,2}\,.$$

Per la σ-subadditività della misura esterna, e siccome gli $I_j^{\varepsilon,1}$ e gli $I_j^{\varepsilon,2}$ sono intervalli,

$$m^*(A_1) \leq \sum_{j \in J_\varepsilon} m^*(I_j^{\varepsilon,1}) = \sum_{j \in J_\varepsilon} l(I_j^{\varepsilon,1})\,,$$

$$m^*(A_2) \leq \sum_{j \in J_\varepsilon} m^*(I_j^{\varepsilon,2}) = \sum_{j \in J_\varepsilon} l(I_j^{\varepsilon,2})\,.$$

Pertanto, dato che $l(I_j^{\varepsilon,1}) + l(I_j^{\varepsilon,2}) = l(I_j^{\varepsilon})$,

$$m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq \sum_{j \in J_\varepsilon} \left(l(I_j^{\varepsilon,1}) + l(I_j^{\varepsilon,2}) \right) = \sum_{j \in J_\varepsilon} l(I_j^{\varepsilon}) \leq m^*(A) + \varepsilon \,,$$

da cui la tesi per l'arbitrarietà di ε. ∎

Teorema 2.3.11 *Sono insiemi misurabili le semirette, gli intervalli, gli aperti e i chiusi di* $\mathbb{R}$ *(di* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$*).*

Dimostrazione. La semiretta $(a, +\infty)$ è misurabile per il teorema precedente, e pertanto lo è la semiretta $(-\infty, a]$ (che ne è il complementare). Siccome

$$(-\infty, a) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(-\infty, a + \frac{1}{n} \right] \,,$$

le semirette $(-\infty, a)$ sono misurabili. Essendo $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$, gli intervalli aperti sono misurabili, e pertanto lo sono $(a, b]$, $[a, b)$ e $[a, b]$ (ottenuti da (a, b) "aggiungendo" uno o due punti, che sono misurabili perché hanno misura esterna nulla). Dal momento che ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione numerabile di intervalli aperti, gli aperti sono misurabili, e quindi (passando al complementare) lo sono i chiusi. ∎

Infine, un risultato che mostra come un insieme misurabile sia "quasi" un aperto (o un chiuso).

Teorema 2.3.12 *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}$ *un insieme misurabile. Allora, per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un aperto* A_ε *contenente* E*, ed un chiuso* C_ε *contenuto in* E*, tali che* $m^*(A_\varepsilon \backslash E) < \varepsilon$ *e* $m^*(E \backslash C_\varepsilon) < \varepsilon$*.*

Dimostrazione. Iniziamo con il caso in cui $m^*(E)$ sia finita. Se $\varepsilon > 0$, per il Teorema 2.2 esiste una famiglia $\{I_j^\varepsilon\}_{j \in J_\varepsilon}$ di intervalli aperti che ricopre E e tale che

$$\sum_{j \in J_\varepsilon} l(I_j^\varepsilon) \leq m^*(E) + \varepsilon \,.$$

Definiamo

$$A_\varepsilon = \bigcup_{j \in J_\varepsilon} I_j^\varepsilon \,,$$

cosicché A_ε è un aperto che contiene E. Inoltre, essendo A_ε l'unione disgiunta di $A_\varepsilon \backslash E$ e di E,

$$m^*(A_\varepsilon) = m^*(A_\varepsilon \backslash E) + m^*(E)\,,$$

da cui, per la σ-subadditività della misura esterna,

$$m^*(A_\varepsilon \backslash E) = m^*(A_\varepsilon) - m^*(E) \le \sum_{j\in J_\varepsilon} m^*(I_j^\varepsilon) - m^*(E) = \sum_{j\in J_\varepsilon} l(I_j^\varepsilon) - m^*(E) \le \varepsilon\,,$$

come volevasi dimostrare. Se $m^*(E)$ non è finita, scriviamo

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (E \cap (n, n+1]) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n\,.$$

Gli E_n sono insiemi misurabili, a due a due disgiunti, di misura esterna finita (minore o al più uguale ad 1); pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$, e per ogni n in $\mathbb{Z}$, esiste un aperto A_n^ε contenente E_n e tale che

$$m^*(A_n^\varepsilon \backslash E_n) \le \frac{\varepsilon}{2^{|n|}}\,.$$

Sia A_ε l'unione degli A_n^ε. A_ε è ovviamente un aperto che contiene E. Si ha poi, essendo $E_n \subseteq E$, e quindi $E^{\mathrm{c}} \subseteq E_n{}^{\mathrm{c}}$,

$$A_\varepsilon \backslash E = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_n^\varepsilon \right) \cap E^{\mathrm{c}} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (A_n^\varepsilon \cap E^{\mathrm{c}}) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (A_n^\varepsilon \cap E_n{}^{\mathrm{c}}) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (A_n^\varepsilon \backslash E_n)\,.$$

Usando la σ-subadditività della misura, si ha allora che

$$m^*(A_\varepsilon \backslash E) \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} m^*(A_n^\varepsilon \backslash E_n) \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\varepsilon}{2^{|n|}} = 3\varepsilon\,.$$

Sia ora E misurabile. Siccome E^{c} è misurabile, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto A_ε contenente E^{c} e tale che

$$m^*(A_\varepsilon \backslash E^{\mathrm{c}}) \le \varepsilon\,.$$

Detto $C_\varepsilon = A_\varepsilon{}^{\mathrm{c}}$, C_ε è un chiuso contenuto in E. Inoltre, $A_\varepsilon \backslash E^{\mathrm{c}} = A_\varepsilon \cap E$, e $E \backslash C_\varepsilon = E \cap A_\varepsilon$. Pertanto, $m^*(E \backslash C_\varepsilon) = m^*(A_\varepsilon \backslash E^{\mathrm{c}}) \le \varepsilon$. ∎

Osservazione 2.3.13 Il teorema precedente si può invertire: se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto A_ε (un chiuso C_ε) contenente E (contenuto in E) e tale che $m^*(A_\varepsilon \setminus E) \leq \varepsilon$ ($m^*(E \setminus C_\varepsilon) \leq \varepsilon$), allora E è misurabile.

Definizione 2.3.14 Sia

$$\mathcal{M} = \{E \subseteq \mathbb{R} : \ E \text{ è misurabile}\} .$$

La famiglia $\mathcal{M}$, detta famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, gode delle seguenti proprietà:

- $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ appartengono a $\mathcal{M}$;
- E appartiene a $\mathcal{M}$ se e solo se $E^{\rm c}$ vi appartiene;
- se $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di insiemi di $\mathcal{M}$, la loro unione vi appartiene.

Una famiglia di insiemi che goda di queste proprietà si dice σ-algebra, e $\mathcal{M}$ viene pertanto detta la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue.

Se E appartiene a $\mathcal{M}$, definiamo $m(E)$, la **misura di Lebesgue** di E, come $m^*(E)$. Come funzione di insieme, m eredita le proprietà di m^*, e quindi è non negativa, σ-subadditiva (in generale), σ-additiva (sulle successioni di insiemi misurabili e disgiunti), invariante per traslazione.

Come si è visto nei teoremi precedenti, la famiglia $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è abbastanza ricca: contiene infatti gli aperti ed i chiusi di $\mathbb{R}$, ed ogni sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}$. È quindi lecito chiedersi se sia vero o no che $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, ovvero se ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ sia misurabile. La risposta è “no” ed è data dal seguente esempio (la cui artificiosità dovrebbe far intuire che è ragionevole che ogni insieme che si incontra (non nel corso, ovviamente!) sia misurabile...).

Esempio 2.3.15 Sia $X = [0, 1)$. Definiamo la *somma modulo 1* di x e y in X nella maniera seguente:

$$x \oplus y = \begin{cases} x + y & \text{se } x + y < 1, \\ x + y - 1 & \text{se } x + y \geq 1. \end{cases}$$

Analogamente, dato $E \subseteq X$, e x in X, definiamo

$$E \oplus x = \{x \oplus y\,,\ y \in E\}\,,$$

il traslato modulo 1 di E tramite x.

Si ha il seguente risultato: *se $E \in \mathcal{M}$, allora $E \oplus x \in \mathcal{M}$ e $m(E \oplus x) = m(E)$ per ogni x in X*. Per provare questo fatto, siano $E_1 = E \cap [0, 1 - x)$ e $E_2 = E \cap [1 - x, 1)$. Allora E_1 e E_2 sono misurabili e disgiunti, e la loro unione è E. Pertanto, $m(E) = m(E_1) + m(E_2)$. Dalla definizione di E_1, si ha $E_1 \oplus x = E + x$, e pertanto (ricordando che m è invariante per traslazioni), $E_1 \oplus x$ è misurabile e la sua misura è uguale alla misura di E_1. Inoltre, $E_2 \oplus x = E_2 + (x - 1)$ e pertanto $E_2 \oplus x$ è misurabile e la sua misura è uguale a $m(E_2)$. In definitiva, essendo $E \oplus x = (E_1 \oplus x) \cup (E_2 \oplus x)$, $E \oplus x$ è misurabile e la sua misura è uguale alla misura di E (dato che $E_1 \oplus x$ e $E_2 \oplus x$ sono disgiunti).

Definiamo ora la seguente relazione in $X \times X$: si ha $x\,\rho\,y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Q}$. La relazione ρ è di equivalenza (come si verifica facilmente) e pertanto si può definire l'insieme quoziente $Y = X/\rho$. Ad esempio, $[0] = \mathbb{Q} \cap X$, mentre $[1/\pi] = \{x \in X : x - 1/\pi \text{ è razionale}\}$. Si noti che ognuna delle classi di equivalenza in Y contiene un'infinità numerabile di elementi (tanti quanti sono i razionali) e che pertanto, essendo Y una partizione di X, Y ha un'infinità non numerabile di elementi.

Ricordiamo ora l'assioma della scelta: *sia $Y = \{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di insiemi; è possibile formare un insieme P "scegliendo" un elemento x_i (ed uno solo) da ciascuno degli X_i*. Se I è finito, ed ognuno degli X_i anche, questo assioma è equivalente all'affermazione di poter prendere un elemento dal primo insieme, uno dal secondo e così via; nel caso in cui I (o gli X_i) sia non numerabile, la "verità" di tale affermazione è evidente, ma non dimostrabile, da cui l'assioma.

Usando l'assioma della scelta, costruiamo P scegliendo un elemento da ciascuna delle classi di equivalenza in cui rimane diviso X dalla relazione ρ. Sia ora $\mathbb{Q} \cap X = \{r_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, con $r_0 = 0$, e definiamo

$$P_j = P \oplus r_j\,.$$

Sia $x \in P_i \cap P_j$; allora $x = p_i + r_i = p_j + r_j$, con p_i, p_j in P e r_i, r_j razionali. Pertanto, $p_i - p_j = r_j - r_i$, e quindi $p_i - p_j$ è razionale, cioè $p_i\,\rho\,p_j$: p_i e p_j

sono nella stessa classe di equivalenza. Siccome P è costruito scegliendo uno ed un solo elemento da ognuna delle classi di equivalenza, si ha $p_i = p_j$, da cui $r_i = r_j$ e quindi $P_i = P_j$. In altre parole, se $i \neq j$, si ha $P_i \cap P_j = \emptyset$.

Sia ora x in X, e sia $[x]$ la classe di equivalenza cui appartiene x. Sempre per come è stato costruito P, esiste un elemento p di P (ed uno solo), tale che $p \,\rho\, x$. Se $x = p$, allora x appartiene a $P_0 = P$; se $x > p$, allora $x = p + r_i = p \oplus r_i$ per qualche r_i, e quindi x è in P_i; infine, se $p > x$, allora $x = p + r_j - 1 = p \oplus r_j$, per qualche r_j, da cui segue che x è in P_j. Quindi,

$$X = \bigcup_{j=1}^{+\infty} P_j \,.$$

Se P fosse misurabile, lo sarebbero anche i P_j (perché sono traslati modulo 1 di P) e si avrebbe $m(P_j) = m(P)$ per ogni j. Per la numerabile additività della misura si avrebbe allora

$$1 = m(X) = \sum_{j=1}^{+\infty} m(P_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} m(P) \,,$$

il che è assurdo. Pertanto, P non è misurabile.

Si osservi che, essendo P non misurabile, esiste un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ tale che

$$m^*(A) \neq m^*(A \cap P) + m^*(A \cap P^{\rm c}) \,.$$

Siccome non si può avere $m^*(A) > m^*(A \cap P) + m^*(A \cap P^{\rm c})$ (perché vale sempre la disuguaglianza “larga” opposta), deve per forza essere

$$m^*(A) < m^*(A \cap P) + m^*(A \cap P^{\rm c}) \,,$$

e pertanto $E_1 = A \cap P$ e $E_2 = A \cap P^{\rm c}$ sono due insiemi disgiunti per i quali l'additività della misura esterna non vale. Si noti inoltre che $m^*(P) > 0$ (non può essere $m^*(P) = 0$ perché altrimenti P sarebbe misurabile).

Infine, se E è un sottoinsieme misurabile di P, allora deve essere necessariamente $m(E) = 0$. Infatti, detto $E_i = E \oplus r_i$, allora anche E_i è misurabile e si ha $m(E_i) = m(E)$ per ogni i. Inoltre, essendo $\{P_i\}$ un ricoprimento di $[0, 1)$, $\{E_i\}$ ricopre un insieme F, misurabile, contenuto in $[0, 1)$. Allora

$$1 = m([0, 1)) \geq m(F) = \sum_{i=1}^{+\infty} m(E_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} m(E) \,,$$

da cui $m(E) = 0$.

L'insieme non misurabile P non è unico: infatti ogni insieme A per il quale $m^*(A) > 0$ contiene un insieme non misurabile secondo Lebesgue. Se, ad esempio, $A \subset (0, 1)$, sia $E_i = A \cap P_i$. Se E_i fosse misurabile, allora dovrebbe essere $m(E_i) = 0$ (dato che $E_i \subset P_i$), e quindi $\sum_{i=1}^{+\infty} m(E_i) = 0$. Siccome A è l'unione degli E_i, ne seguirebbe che $m^*(A) = 0$, che non è.

2.4 Funzioni misurabili

Dopo aver introdotto la misura secondo Lebesgue, iniziamo a studiare i legami che intercorrono tra funzioni definite su $\mathbb{R}$ e insiemi misurabili. A tale proposito vale il seguente teorema.

Teorema 2.4.1 *Sia D un insieme misurabile di $\mathbb{R}$ e sia $f : D \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ una funzione. Allora le seguenti sono equivalenti:*

i) per ogni α in $\mathbb{R}$ l'insieme $E_\alpha(f) = \{x \in D : f(x) > \alpha\}$ è misurabile;

ii) per ogni α in $\mathbb{R}$ l'insieme $E'_\alpha(f) = \{x \in D : f(x) \geq \alpha\}$ è misurabile;

iii) per ogni α in $\mathbb{R}$ l'insieme $E''_\alpha(f) = \{x \in D : f(x) < \alpha\}$ è misurabile;

iv) per ogni α in $\mathbb{R}$ l'insieme $E'''_\alpha(f) = \{x \in D : f(x) \leq \alpha\}$ è misurabile;

Una qualsiasi delle quattro precedenti affermazioni implica che

v) per ogni α in $\overline{\mathbb{R}}$ l'insieme $G_\alpha(f) = \{x \in D : f(x) = \alpha\}$ è misurabile;

Dimostrazione. Dal momento che $(E_\alpha(f))^{\mathrm{c}} = E'''_\alpha(f)$, e che $(E'_\alpha(f))^{\mathrm{c}} = E''_\alpha(f)$, si ha evidentemente $i) \iff iv)$ e $ii) \iff iii)$. Siccome

$$E'_\alpha(f) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_{\alpha - \frac{1}{n}}(f)\,,$$

si ha che $i) \Rightarrow ii)$; viceversa, essendo

$$E_\alpha(f) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E'_{\alpha + \frac{1}{n}}(f)\,,$$

si ha che *ii*) $\Rightarrow$ *i*) e quindi le prime quattro affermazioni sono equivalenti fra loro.

Se α è in $\mathbb{R}$, *ii*) + *iv*) $\Rightarrow$ *v*), dal momento che $G_\alpha(f) = E'_\alpha(f) \cap E'''_\alpha(f)$. Se $\alpha = +\infty$, si ha

$$G_{+\infty}(f) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} E'_n(f)\,,$$

e quindi $G_{+\infty}(f)$ è misurabile; analogamente, essendo $G_{-\infty}(f)$ l'intersezione di $E'''_{-n}(f)$ al variare di n in $\mathbb{N}$, si ha che $G_{-\infty}(f)$ è misurabile. ■

Osservazione 2.4.2 La validità di *v*) per ogni α in $\mathbb{R}$ non implica nessuna delle prime quattro affermazioni. Ad esempio, la funzione $f(x)$ uguale a $|x| + 1$ su un insieme non misurabile P, e $-|x| - 1$ su $\mathbb{R} \setminus P$, assume ogni valore al più due volte (e pertanto $G_\alpha(f)$ è misurabile per ogni α in $\overline{\mathbb{R}}$), ma l'insieme $E_0(f)$ coincide con P, che non è misurabile.

Il teorema precedente giustifica la seguente definizione.

Definizione 2.4.3 Sia D un insieme misurabile, e sia $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$. La funzione f si dice *misurabile secondo Lebesgue* se soddisfa una qualsiasi tra *i*), *ii*), *iii*) e *iv*).

Osservazione 2.4.4 Ogni funzione continua è misurabile; infatti $E_\alpha(f)$ è un aperto di $\mathbb{R}$ (quindi un insieme misurabile) per ogni α in $\mathbb{R}$. Se $f : D \to \overline{R}$ è misurabile, e E è un sottoinsieme misurabile di D, allora la restrizione di f a E è ancora misurabile (dal momento che si tratta di interesecare gli $E_\alpha(f)$ con E).

Lo spazio delle funzioni misurabili è (almeno) uno spazio vettoriale.

Teorema 2.4.5 *Siano f e g due funzioni misurabili definite da D in $\overline{\mathbb{R}}$, e sia c in $\mathbb{R}$. Allora $f + c$, $c\,f$, $f + g$ e $f\,g$ sono misurabili.*

Dimostrazione. Essendo $E_\alpha(f + c) = E_{\alpha-c}(f)$, la misurabilità di $f + c$ discende direttamente dalla misurabilità di f. Se $c = 0$, $c\,f$ è misurabile perché è continua; se $c > 0$, si ha $E_\alpha(c\,f) = E_{\alpha/c}(f)$, mentre se $c < 0$ si ha $E_\alpha(c\,f) = E''_{\alpha/c}(f)$. In entrambi i casi, $c\,f$ è misurabile.

Se x appartiene a $E_\alpha(f+g)$, ovvero se $f(x)+g(x)>\alpha$, allora $f(x)>\alpha-g(x)$ e ciò è vero se e solo se esiste un razionale r tale che $f(x)>r>\alpha-g(x)$, ovvero se e solo se esiste un razionale r tale che x appartiene a $E_r(f)\cap E_{\alpha-r}(g)$. Pertanto,

$$E_\alpha(f+g)=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\left[E_r(f)\cap E_{\alpha-r}(g)\right],$$

da cui segue che $f+g$ è misurabile.

Se f è misurabile, f^2 è misurabile; infatti $E_\alpha(f^2)$ è tutto D se $\alpha\le 0$, ed è dato dall'unione di $E_{\sqrt{\alpha}}(f)$ e $E''_{-\sqrt{\alpha}}(f)$ se $\alpha>0$. In entrambi i casi si tratta di insiemi misurabili. Infine, $f\,g$ è misurabile essendo

$$f\,g=\frac{1}{2}\left[(f+g)^2-f^2-g^2\right].$$

■

Il concetto di misurabilità si adatta bene anche a successioni di funzioni misurabili. Prima di enunciare e dimostrare il teorema, diamo una definizione.

Definizione 2.4.6 Sia $\{x_n\}$ una successione di numeri reali; definiamo il **massimo limite** della successione $\{x_n\}$ la quantità

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n=\inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\ge n} x_k=\lim_{n\to+\infty}\sup_{k\ge n} x_k\,.$$

Analogamente, definiamo il **minimo limite** della successione $\{x_n\}$ la quantità

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{k\ge n} x_k=\lim_{n\to+\infty}\inf_{k\ge n} x_k\,.$$

Si noti che in entrambi i casi l'estremo inferiore e il superiore sono dei limiti perché le successioni $n\mapsto\sup_{k\ge n} x_k$ e $n\mapsto\inf_{k\ge n} x_k$ sono monotone (una decrescente, l'altra crescente).

Si ha, sempre, $\liminf x_n\le\limsup x_n$, e si ha uguaglianza se e solo se la successione ammette limite.

Se $f_n: D\to\overline{\mathbb{R}}$ è una successione di funzioni, il massimo e il minimo limite di $\{f_n\}$ sono definiti puntualmente: ad esempio $\limsup f_n$ è la funzione che assume in x il valore $\limsup f_n(x)$.

Teorema 2.4.7 *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su D; allora, per ogni N in $\mathbb{N}$ sono misurabili le funzioni*

$$h_N(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_N(x)\}\,, \qquad k_N(x) = \min\{f_1(x), \ldots, f_N(x)\}\,.$$

Sono inoltre misurabili le funzioni

$$h_\infty(x) = \sup\{f_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}\,, \qquad k_\infty(x) = \inf\{f_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}\,,$$

e le funzioni

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n(x)\,, \qquad \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\,.$$

Se la successione $\{f_n\}$ ammette limite puntuale f, allora f è misurabile.

Dimostrazione. Si ha

$$E_\alpha(h_N) = \bigcup_{n=1}^{N} E_\alpha(f_n)\,,$$

e quindi h_N è misurabile, così come k_N, dato che

$$E_\alpha(k_N) = \bigcap_{n=1}^{N} E_\alpha(f_n)\,.$$

Essendo

$$E_\alpha(h_\infty) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_\alpha(f_n)\,,$$

la funzione h_∞ è misurabile (e analogamente per k_∞). Essendo

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} [\sup_{k\geq n} f_k(x)]\,,$$

il massimo limite è misurabile per i risultati su h_∞ e k_∞ (analogamente per il minimo limite). Infine, se $\{f_n\}$ ammette limite f, allora f è misurabile perché coincide con il massimo limite delle f_n. ■

Osservazione 2.4.8 Per il teorema precedente, le funzioni

$$f^+(x) = \max(f(x), 0)\,, \qquad f^-(x) = \max(-f(x), 0)\,,$$

sono misurabili se f lo è. Essendo $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$, $|f|$ è misurabile se f lo è.

Particolare importanza nella misura di Lebesgue hanno gli insiemi di misura nulla.

Definizione 2.4.9 Una proprietà $P(x)$ si dice essere valida **quasi ovunque (q.o.)**[1] se l'insieme degli x tali che $P(x)$ non vale ha misura nulla.

Due funzioni f e g definite sullo stesso insieme D si dicono uguali quasi ovunque, e si scrive $f = g$ q.o., se

$$m(\{x \in D : f(x) \neq g(x)\}) = 0 .$$

Analogamente, si dice che una successione $\{f_n\}$ di funzioni converge quasi ovunque ad una funzione f se l'insieme degli x tali che $f_n(x)$ non converge ad $f(x)$ ha misura nulla.

Teorema 2.4.10 *Sia $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. Se $g = f$ q.o., allora g è misurabile.*

Dimostrazione. Sia $E = \{x \in D : f(x) \neq g(x)\}$; allora $m(E) = 0$; sia α in $\mathbb{R}$; allora gli insiemi

$$E_1 = \{x \in E : g(x) > \alpha\} , \qquad E_2 = \{x \in E : g(x) \leq \alpha\} ,$$

sono entrambi misurabili come sottoinsiemi di E, che ha misura nulla. Essendo

$$E_\alpha(g) = \{x \in D : g(x) > \alpha\} = \{x \in D : f(x) > \alpha\} \cup E_1 \cap {E_2}^{\mathrm{c}} ,$$

$E_\alpha(g)$ è misurabile, e quindi lo è la funzione g. ∎

Definizione 2.4.11 Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. La **funzione caratteristica** di A è la funzione

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Ovviamente, χ_A è misurabile se e solo se A è misurabile. Pertanto χ_P fornisce un esempio di funzione non misurabile.

[1] In inglese, *almost everywhere (a.e.)*; in francese, *presque partout (p.p.)*.

Una funzione $\varphi : D \to \mathbb{R}$ si dice **semplice** se è misurabile e se assume solo un numero finito di valori. Se φ è semplice ed assume i valori $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, allora

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \chi_{A_i}(x) \,, \qquad A_i = G_{\alpha_i}(\varphi) = \{x \in D : \varphi(x) = \alpha_i\} \,.$$

Sappiamo già che le funzioni continue sono misurabili; così come il Teorema 2.3.12 afferma che ogni insieme misurabile è un aperto a meno di insiemi di misura piccola, il prossimo teorema mostra come ogni funzione misurabile sia continua a meno di un insieme di misura arbitrariamente piccola.

Teorema 2.4.12 *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e finita quasi ovunque (ovvero, l'insieme $\{x \in D : f(x) = \pm\infty\}$ ha misura nulla). Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme chiuso C_ε contenuto in D tale che*

- *$m(D \backslash C_\varepsilon) \leq \varepsilon$;*
- *f è continua su C_ε.*

Dimostrazione. La dimostrazione è divisa in sei passi.
Passo 1: Sia $f = \chi_F$ con F misurabile, e sia $m(D) < +\infty$.

Per il Teorema 2.3.12, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $C'_\varepsilon \subseteq F$ tale che $m(F \backslash C'_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Essendo $D \backslash F$ misurabile, esiste un chiuso $C''_\varepsilon \subseteq D \backslash F$ tale che $m((D \backslash F) \backslash C''_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Definiamo $C_\varepsilon = C'_\varepsilon \cup C''_\varepsilon$. Si ha

$$m(D \backslash C_\varepsilon) = m((D \backslash F) \backslash C_\varepsilon) + m(F \backslash C_\varepsilon) = m((D \backslash F) \backslash C'_\varepsilon) + m(F \backslash C''_\varepsilon) \leq \varepsilon \,,$$

ed inoltre, essendo $f \equiv 1$ su C'_ε e $f \equiv 0$ su C''_ε, f è continua su C_ε.

Passo 2: Sia f semplice, e sia $m(D) < +\infty$.

Il risultato segue dalla definizione di funzione semplice, e dal Passo 1: basta scegliere C_ε l'unione dei $C_{\varepsilon,i}$ ottenuti applicando il Passo 1 a $\alpha_i \, \chi_{A_i}$ con ε / n.

Passo 3: f è una funzione positiva e limitata: $0 \leq f < L$, e $m(D) < +\infty$.

Sia n in $\mathbb{N}$ fissato, e dividiamo l'intervallo $[0, L)$ in n parti uguali[2] mediante i punti $y_k = \frac{kL}{n}$, con k da 0 a n. Definiamo

$$F_k = \{x \in D : y_k \leq f(x) < y_{k+1}\} = E'_{y_k}(f) \cap E''_{y_{k+1}}(f) \,, \quad k = 0, \ldots, n-1 \,.$$

[2]Attenzione! Stiamo dividendo il codominio della funzione f, non il suo dominio!

Essendo f misurabile, gli F_k sono misurabili; sono inoltre a due a due disgiunti, e la loro unione è tutto D. Definiamo

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \, \chi_{F_k}(x) \,,$$

cosicché φ_n è semplice. Sia ora x in D; allora x appartiene ad uno degli F_k, e quindi

$$|f(x) - \varphi_n(x)| = |f(x) - y_k| \leq y_{k+1} - y_k = \frac{L}{n} \,.$$

Pertanto,

$$\sup_{x \in D} |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{L}{n} \,,$$

da cui segue che $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a f. Applicando il Passo 2 a φ_n, per ogni $\varepsilon > 0$ fissato e per ogni n in $\mathbb{N}$ esiste un insieme chiuso $C_{\varepsilon,n}$ contenuto in D e tale che

$$m(D \backslash C_{\varepsilon,n}) \leq \frac{\varepsilon}{2^n} \,, \qquad \varphi_n \text{ è continua su } C_{\varepsilon,n}.$$

Definiamo C_ε l'intersezione dei $C_{\varepsilon,n}$ al variare di n in $\mathbb{N}$. Allora C_ε è un chiuso (come intersezione di chiusi) contenuto in D. Si ha

$$\begin{aligned} m(D \backslash C_\varepsilon) &= m\left(D \cap \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_{\varepsilon,n}\right)^{\mathrm{c}}\right) = m\left(D \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (C_{\varepsilon,n})^{\mathrm{c}}\right)\right) \\ &= m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (D \backslash C_{\varepsilon,n}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \,. \end{aligned}$$

Siccome φ_n converge uniformemente a f su D, φ_n converge uniformemente ad f su C_ε. D'altra parte, φ_n è continua su $C_{\varepsilon,n}$, e quindi lo è su C_ε; da questo segue che f è continua su C_ε.

Passo 4: Sia $f \geq 0$ e $m(D) < +\infty$.

Siccome la funzione f è finita quasi ovunque, si ha $m(G_{+\infty}(f)) = 0$. Definiamo

$$E_n = E'_n(f) = \{x \in D : f(x) \geq n\} \,.$$

Allora $\{E_n\}$ è una successione decrescente di insiemi misurabili e tali che $m(E_1) \leq m(D) < +\infty$. Pertanto, detto

$$E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n \,,$$

dal Teorema 2.3.7 segue che $m(E) = \lim_{n\to+\infty} m(E_n)$; essendo $E = G_{+\infty}(f)$ si ha che la misura degli E_n tende a zero. Pertanto, fissato $\varepsilon > 0$, esiste L (dipendente da ε), tale che $m(E_L) \leq \varepsilon/2$. Consideriamo ora $D' = D\setminus E_L$. L'insieme D' è misurabile, ed inoltre $0 \leq f < L$ su D'. Pertanto, per il Passo 3, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste C_ε contenuto in D' (dunque in D) tale che $m(D'\setminus C_\varepsilon) \leq \varepsilon/2$ e f è continua su C_ε. Dal momento che

$$m(D\setminus C_\varepsilon) = m(E_L) + m(D'\setminus C_\varepsilon) \leq \varepsilon \,,$$

si ha il risultato nelle ipotesi del Passo 4.

Passo 5: Sia $f \geq 0$.

Sia n in $\mathbb{Z}$, e definiamo $D_n = D \cap [n, n+1)$. Allora D_n è misurabile e ha misura finita. Usando il Passo 4, per ogni $\varepsilon > 0$, e per ogni n in $\mathbb{Z}$, esiste $C_{\varepsilon,n}$ chiuso, contenuto in D_n, con $m(D_n\setminus C_{\varepsilon,n}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{|n|}}$, e tale che f è continua su $C_{n,\varepsilon}$. Definiamo

$$C_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} C_{\varepsilon,n} \,.$$

È facile verificare che $m(D\setminus C_\varepsilon) \leq 3\varepsilon$ e che f è continua su C_ε (dal momento che i $C_{\varepsilon,n}$ sono a due a due disgiunti). L'unica cosa da verificare è che C_ε è chiuso. Sia pertanto $\{x_n\}$ una successione contenuta in C_ε e convergente (in $\mathbb{R}$) a x_0. Allora la successione è limitata, ovvero $|x_n| \leq M$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Pertanto,

$$\{x_n\} \subseteq \bigcup_{n=-M}^{M} C_{\varepsilon,n} = C'_{\varepsilon,M} \,,$$

e quest'ultimo insieme è chiuso (come unione finita di chiusi). Pertanto x_0 appartiene a $C'_{\varepsilon,M}$ e dunque a C_ε, che lo contiene.

Passo 6: Sia f come nelle ipotesi del teorema.

Scriviamo $f = f^+ - f^-$. Sia f^+ che f^- soddisfano le ipotesi del Passo 5; esiste pertanto C_ε^+ chiuso, contenuto in D, tale che $m(D\setminus C_\varepsilon^+) \leq \varepsilon/2$, con f^+

continua su C_ε^+ e, analogamente, esiste C_ε^- chiuso, contenuto in D, tale che $m(D \backslash C_\varepsilon^-) \leq \varepsilon/2$, con f^- continua su C_ε^-. Se definiamo $C_\varepsilon = C_\varepsilon^+ \cap C_\varepsilon^-$, si ha che C_ε è un chiuso, che $m(D \backslash C_\varepsilon) \leq \varepsilon$, e che f è continua su C_ε dal momento che f^+ e f^- lo sono. ■

Dunque, misurabilità e continuità, così come misurabilità e "essere aperti" sono concetti "vicini". Per una successione di funzioni misurabili sono vicini anche i concetti di convergenza quasi ovunque e convergenza uniforme.

Teorema 2.4.13 *Sia D un insieme misurabile di misura finita. Sia $f_n : D \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni misurabili che converge quasi ovunque ad una funzione f. Allora, fissati $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, esiste un insieme misurabile $A_{\varepsilon,\delta}$ contenuto in D, con $m(A_{\varepsilon,\delta}) \leq \delta$, e un intero $N_{\varepsilon,\delta}$ tale che, per ogni $n \geq N_{\varepsilon,\delta}$ si ha*

$$\sup_{D \backslash A_{\varepsilon,\delta}} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \, .$$

Dimostrazione. Sia B l'insieme di misura nulla sul quale f_n non converge ad f, e definiamo $E = D \backslash B$. Si ha ovviamente $m(E) = m(D)$. Sia poi n in $\mathbb{N}$ e definiamo

$$G_n = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \, .$$

Essendo sia f_n che f (per il Teorema 2.4.7) misurabili su E, G_n è misurabile. Pertanto è misurabile, per ogni N in $\mathbb{N}$, l'insieme

$$E_N = \bigcup_{n=N}^{+\infty} G_n = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \, , \text{ per qualche } n \geq N\} \, .$$

Evidentemente, si ha che $\{E_N\}$ è una successione decrescente di insiemi, e $m(E_1) \leq m(E) < +\infty$. Per il Teorema 2.3.7 si ha allora

$$m\left(\bigcap_{N=1}^{+\infty} E_N\right) = \lim_{N \to +\infty} m(E_N) \, .$$

Siccome $f_n(x)$ converge a $f(x)$ per ogni x in E, si ha che, definitivamente, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, e pertanto x non appartiene definitivamente ad E_N. Pertanto, l'intersezione di tutti gli E_N è vuota, e quindi la misura di E_N tende a zero. Dunque, per δ fissato, esiste $N_{\varepsilon,\delta}$ tale che $m(E_{N_{\varepsilon,\delta}}) \leq \delta$.

Definiamo $A_{\varepsilon,\delta} = E_{N_{\varepsilon,\delta}} \cup B$, in modo che la misura di $A_{\varepsilon,\delta}$ sia minore di δ. Se x non appartiene a $A_{\varepsilon,\delta}$, x non appartiene ad E_n per ogni $n \geq N_{\varepsilon,\delta}$, e pertanto $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, come si voleva dimostrare. ■

Osservazione 2.4.14 Si osservi che l'insieme $A_{\varepsilon,\delta}$ dipende da ε, e pertanto la tesi del teorema precedente non dà la convergenza uniforme di f_n a f. È però possibile arrivare alla convergenza uniforme applicando più volte il risultato precedente, ed è quello che viene fatto per dimostrare il prossimo teorema.

Teorema 2.4.15 (Egorov) *Sia D un insieme di misura finita, e sia $f_n : D \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni misurabili che converge quasi ovunque ad una funzione f. Allora, per ogni $\delta > 0$ esiste un insieme $A_\delta \subseteq D$ con $m(A_\delta) < \delta$ e tale che f_n converge uniformemente ad f su $D \backslash A_\delta$.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ e sia $\delta_n = \frac{\delta}{2^n}$. Per il teorema precedente, esiste un insieme $A_n = A_{\varepsilon_n,\delta_n}$ di misura minore di δ_n, tale che

$$\sup_{D \backslash A_n} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}\,.$$

Definiamo A_δ come l'unione di tutti gli A_n. Per la σ-subadditività della misura, $m(A_\delta) \leq \delta$; inoltre, siccome $D \backslash A_\delta \subseteq D \backslash A_n$ per ogni n in $\mathbb{N}$, si ha

$$\sup_{D \backslash A_\delta} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{D \backslash A_n} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}\,,$$

da cui la tesi. ■

Osservazione 2.4.16 La condizione $m(D) < +\infty$ è essenziale per dimostrare il Teorema di Egorov. Sia infatti $D = \mathbb{R}$ e $f_n(x) = \chi_{(-n,n)}(x)$. La successione f_n converge ovunque in $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) \equiv 1$, e la convergenza non è uniforme al di fuori di nessun insieme di misura piccola di $\mathbb{R}$, dal momento che l'insieme su cui f_n è diversa da f ha misura infinita per ogni n in $\mathbb{N}$.

Capitolo 3

Teoria dell'integrazione

Come già per la misura secondo Peano-Jordan, ricordiamo brevemente la definizione di integrale secondo Riemann.

3.1 L'integrale secondo Riemann

Sia $I = [a, b]$ un intervallo di $\mathbb{R}$; una partizione P di I viene data assegnando $n + 1$ punti

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata e P è una partizione di I, definiamo

$$S(P, f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in (x_{i-1}, x_i]} f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, M_i\,,$$

$$s(P, f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in (x_{i-1}, x_i]} f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, m_i\,.$$

Successivamente, detto $\mathcal{P}$ l'insieme delle partizioni di I, definiamo

$$\mathrm{R}\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf\{S(P, f)\,,\ P \in \mathcal{P}\}\,,$$

$$\mathrm{R}\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\{s(P, f)\,,\ P \in \mathcal{P}\}\,,$$

che chiamiamo, rispettivamente, integrale superiore di Riemann e integrale inferiore di Riemann di f.

Si vede abbastanza facilmente che per ogni funzione f limitata su I si ha

$$\mathrm{R}\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \mathrm{R}\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,,$$

il che suggerisce di definire integrabile secondo Riemann una funzione limitata su I tale che si abbia

$$\mathrm{R}\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \mathrm{R}\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

In questo caso, definiamo

$$\mathrm{R}\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{R}\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

Sia ora P una partizione di I con $n+1$ punti, e siano $c_1, \ldots, c_n$ n numeri reali. Una **funzione a gradino** è una combinazione lineare della forma

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\chi_{(x_{i-1},x_i]}(x)\,.$$

Se definiamo (in maniera naturale)

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(x_i - x_{i-1})\,,$$

si vede subito che, data una partizione P di I, si ha

$$S(P,f) = \int_a^b \overline{\varphi}(x)\,dx\,,$$

dove $\overline{\varphi}(x)$ è la funzione a gradino corrispondente agli intervalli della partizione P e ai valori $M_1, \ldots, M_n$. Sempre per definizione di $\overline{\varphi}(x)$, si ha $f(x) \leq \overline{\varphi}(x)$ per ogni x in I. Analogamente,

$$s(P,f) = \int_a^b \underline{\varphi}(x)\,dx\,,$$

dove $\underline{\varphi}(x)$ è la funzione a gradino corrispondente agli intervalli della partizione P e ai valori $m_1, \ldots, m_n$. Nuovamente, dalla definizione di $\underline{\varphi}(x)$, segue che $\underline{\varphi}(x) \leq f(x)$ per ogni x in I.

Alla luce di queste considerazioni, si ha allora

$$\mathrm{R}\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\left\{\int_a^b \overline{\varphi}(x)\,dx\,,\ \overline{\varphi}(x) \text{ a gradino, } f(x) \leq \overline{\varphi}(x) \text{ in } I\right\}\,,$$

e

$$\mathrm{R}\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\left\{\int_a^b \underline{\varphi}(x)\,dx\,,\ \underline{\varphi}(x) \text{ a gradino, } \underline{\varphi}(x) \leq f(x) \text{ in } I\right\}\,,$$

Esempio 3.1.1 Come è noto, la funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1], \end{cases}$$

non è integrabile secondo Riemann; infatti, qualsiasi sia la partizione P di $[0,1]$, si ha $S(P,D) = 1$ e $s(P,D) = 0$, cosicché

$$\mathrm{R}\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = 1\,, \qquad \mathrm{R}\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0\,.$$

Inoltre, se consideriamo la successione f_n di funzioni definita da

$$f_n(x) = \chi_{\{r_1,\ldots,r_n\}}(x)\,,$$

dove $\{r_n\}$ è un'enumerazione dei razionali di $[0,1]$, si ha che f_n è integrabile secondo Riemann, che il suo integrale è nullo per ogni n in $\mathbb{N}$, e che f_n converge puntualmente (ed anche in maniera monotona) a $D(x)$, che non è integrabile. Pertanto, il chiedersi se valga l'identità

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{R}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \mathrm{R}\int_0^1 D(x)\,dx\,,$$

non ha senso perché l'integrale (secondo Riemann) di D non è definito.

Si ha però che $D(x) = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$, cioè la funzione caratteristica di un insieme misurabile (secondo Lebesgue, non secondo Peano-Jordan). Vogliamo allora "cambiare" l'integrale in modo che — quanto meno — le funzioni caratteristiche di insiemi misurabili siano integrabili (e il loro integrale valga, secondo la ben nota regola "base per altezza", la misura dell'insieme); inoltre vogliamo anche ottenere un integrale che si comporti "bene" rispetto al passaggio al limite: se f_n è una successione di funzioni integrabili convergente ad una funzione integrabile f, vogliamo dare dell'ipotesi ragionevoli sulla convergenza e sulle f_n affinché il limite degli integrali delle f_n sia proprio l'integrale di f.

3.2 L'integrale secondo Lebesgue

3.2.1 Funzioni limitate su insiemi di misura finita

In tutta questa sottosezione supporremo valide le seguenti ipotesi:

- E è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}$ con $m(E) < +\infty$;
- $f : E \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata.

Ricordiamo che una **funzione semplice** $\varphi : E \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile che assume un numero finito di valori. Detti $a_1, \ldots, a_n$ tali valori, e definito $A_i = \{x \in E : \varphi(x) = a_i\}$ si ha

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \chi_{A_i}(x) \, .$$

Si noti che gli A_i sono a due a due disgiunti, che sono misurabili, e che l'unione degli A_i è E. Se supponiamo che $a_1, \ldots a_n$ siano i valori diversi da zero assunti dalla funzione semplice φ, la rappresentazione

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \chi_{A_i}(x) \, ,$$

si dice **canonica**. Nel caso della rappresentazione canonica, l'unione degli A_i è ovviamente $E \backslash \{x \in E : \varphi(x) = 0\} = E \backslash G_0(\varphi)$.

Definizione 3.2.1 *Sia $\varphi : E \to \mathbb{R}$ una funzione semplice, e sia*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \chi_{A_i}(x) \, ,$$

la sua rappresentazione canonica. Definiamo

$$\int_E \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} a_i\, m(A_i)\,. \tag{2.1}$$

La rappresentazione canonica è unica, ma il valore dell'integrale non cambia se φ viene scritta come combinazione di funzioni caratteristiche in maniera differente.

Teorema 3.2.2 *Sia*

$$\varphi_(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j\, \chi_{B_j}(x)\,,$$

con gli insiemi B_j misurabili e a due a due disgiunti. Allora

$$\int_E \varphi(x)\,dx = \sum_{j=1}^{m} b_j\, m(B_j)\,.$$

Dimostrazione. Se a è un valore assunto da $\varphi(x)$, definiamo $A_a = \{x \in E : \varphi(x) = a\}$. Si ha ovviamente

$$A_a = \bigcup_{h:b_h=a} B_h\,,$$

e pertanto, essendo i B_h a due a due disgiunti,

$$m(A_a) = \sum_{h:b_h=a} m(B_h)\,.$$

Ma allora, detti $a_1 \ldots, a_n$ i valori distinti da zero assunti da φ, cosicché

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \chi_{A_i}(x)\,,$$

è la rappresentazione canonica, si ha (ricordando che $a_i \neq 0$ per ogni i)

$$\begin{aligned} \int_E \varphi(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{n} a_i\, m(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{h:b_h=a_i} m(B_h) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{h:b_h=a_i} b_h\, m(B_h) = \sum_{b_j\neq 0} b_j\, m(B_j) = \sum_{j=1}^{m} b_j\, m(B_j)\,, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. ■

L'integrale così definito gode delle consuete proprietà dell'integrale: additività e monotonia.

Teorema 3.2.3 *Siano φ e ψ due funzioni semplici su E, e siano a e b in $\mathbb{R}$. Allora*

$$\int_E [a\,\varphi(x) + b\,\psi(x)]\,dx = a\int_E \varphi(x)\,dx + b\int_E \psi(x)\,dx\,. \tag{2.2}$$

Se $\varphi \geq \psi$ q.o., allora

$$\int_E \varphi(x)\,dx \geq \int_E \psi(x)\,dx\,. \tag{2.3}$$

Dimostrazione. Siano

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\chi_{A_i}(x)\,, \qquad \psi(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j\,\chi_{B_j}(x)\,,$$

le rappresentazioni canoniche di φ e ψ, e siano $A_0 = \{x \in E : \varphi(x) = 0\}$ e $B_0 = \{x \in E : \psi(x) = 0\}$. Definiamo $N = (n+1)\,(m+1)$ e

$$\mathcal{F} = \{A_i \cap B_j\,,\ i = 0, \ldots, n\,,\ j = 0, \ldots, m\} = \{E_k\,,\ k = 1, \ldots, N\}\,.$$

Per definizione, gli E_k sono a due a due disgiunti e la loro unione è tutto E. Possiamo allora scrivere

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k\,\chi_{E_k}(x)\,, \qquad \psi(x) = \sum_{k=1}^{N} b_k\,\chi_{E_k}(x)\,,$$

con $a_k = a_i$ per ogni k tale che $E_k \subseteq A_i$, e $b_k = b_j$ per ogni k tale che $E_k \subseteq B_j$. Si ha allora

$$a\,\varphi(x) + b\,\psi(x) = \sum_{k=1}^{N} [a\,a_k + b\,b_k]\,\chi_{E_k}(x)\,,$$

da cui, per il Teorema 3.2.2,

$$\begin{aligned}\int_E [a\,\varphi(x) + b\,\psi(x)]\,dx &= \sum_{k=1}^{N} [a\,a_k + b\,b_k]\,m(E_k)\\ &= a\sum_{k=1}^{N} a_k\,m(E_k) + b\sum_{k=1}^{N} b_k\,m(E_k)\\ &= a\int_E \varphi(x)\,dx + b\int_E \psi(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Dal momento che per definizione l'integrale di una funzione semplice non negativa quasi ovunque è non negativo (l'insieme $E_0''(\varphi)$ su cui φ assume valori negativi ha misura nulla, e quindi il suo contributo all'integrale è nullo), si ha, per quanto appena dimostrato,

$$0 \le \int_E [\varphi(x) - \psi(x)]\,dx = \int_E \varphi(x)\,dx - \int_E \psi(x)\,dx\,,$$

da cui (2.3). ■

Osservazione 3.2.4 Siccome l'integrale di χ_E è $m(E)$ per definizione, per il Teorema 3.2.3 l'integrale di $a\,\chi_E$ è $a\,m(E)$ e quindi l'integrale della funzione semplice

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\chi_{E_i}(x)\,,$$

è

$$\int_E \varphi(x)\,dx = \int_E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\,\chi_{E_i}(x)\right)dx = \sum_{i=1}^{n} a_i\int_E \chi_{E_i}(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} a_i\,m(E_i)\,,$$

che è lo stesso risultato del Teorema 3.2.2, senza però l'ipotesi che gli E_i siano a due a due disgiunti. In definitiva, se

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\chi_{E_i}(x)\,,$$

è una **qualsiasi** rappresentazione della funzione semplice φ, allora

$$\int_E \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} a_i\,m(E_i)\,.$$

Definizione 3.2.5 Sia ora $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e limitata. Allora sono non vuoti

$$\overline{S}(f) = \{\overline{\varphi} : E \to \mathbb{R}\,,\ \overline{\varphi} \text{ semplice, } f(x) \leq \overline{\varphi}(x) \text{ per ogni } x\}\,,$$

e

$$\underline{S}(f) = \{\underline{\varphi} : E \to \mathbb{R}\,,\ \underline{\varphi} \text{ semplice, } \underline{\varphi}(x) \leq f(x) \text{ per ogni } x\}\,.$$

Si ha infatti che $(\sup_E f)\,\chi_E$ è in $\overline{S}(f)$, mentre $(\inf_E f)\,\chi_E$ appartiene a $\underline{S}(f)$. Definiamo i due numeri reali

$$\overline{\int_E} f(x)\,dx = \inf\left\{\int_E \overline{\varphi}(x)\,dx\,,\ \overline{\varphi} \in \overline{S}(f)\right\}\,,$$

e

$$\underline{\int_E} f(x)\,dx = \sup\left\{\int_E \underline{\varphi}(x)\,dx\,,\ \underline{\varphi} \in \underline{S}(f)\right\}\,.$$

Si noti che, per il Teorema 3.2.3 e per definizione di estremo superiore ed inferiore, si ha

$$(\inf_E f)\,m(E) \leq \underline{\int_E} f(x)\,dx \leq \overline{\int_E} f(x)\,dx \leq (\sup_E f)\,m(E)\,.$$

Come già per l'integrale secondo Riemann, ci chiediamo se e quando questi due valori siano uguali.

Teorema 3.2.6 *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, con E misurabile di misura finita. Allora*

$$\underline{\int_E} f(x)\,dx = \overline{\int_E} f(x)\,dx \tag{2.4}$$

se e solo se f è misurabile.

Dimostrazione. La prima parte della dimostrazione ricorda il terzo passo della dimostrazione del Teorema 2.4.12, usando il fatto che è possibile approssimare uniformemente funzioni misurabili con funzioni semplici.

Supponiamo che f sia misurabile e che $-M \leq f(x) \leq M$ per ogni x in E. Sia n in $\mathbb{N}$ e definiamo, per $k = -n, \ldots, n$,

$$E_k = \left\{x \in E : \frac{(k-1)\,M}{n} < f(x) \leq \frac{kM}{n}\right\} = E_{\frac{(k-1)\,M}{n}}(f) \cap E'''_{\frac{kM}{n}}(f)\,,$$

Essendo f misurabile, lo sono gli E_k. Inoltre, $E_k \cap E_h = \emptyset$, e l'unione degli E_k è tutto E. Definiamo

$$\overline{\varphi}_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{kM}{n} \chi_{E_k}(x) \,, \qquad \underline{\varphi}_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(k-1)M}{n} \chi_{E_k}(x) \,,$$

cosicché $\overline{\varphi}_n$ è in $\overline{S}(f)$, mentre $\underline{\varphi}_n$ è in $\underline{S}(f)$. Pertanto

$$\overline{\int_E} f(x)\,dx \le \int_E \overline{\varphi}_n(x)\,dx = \sum_{k=-n}^{n} \frac{kM}{n}\, m(E_k) \,,$$

e

$$\underline{\int_E} f(x)\,dx \ge \int_E \underline{\varphi}_n(x)\,dx = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(k-1)M}{n}\, m(E_k) \,.$$

Si ha così

$$0 \le \overline{\int_E} f(x)\,dx - \underline{\int_E} f(x)\,dx \le \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} m(E_k) = \frac{M}{n}\, m(E) \,.$$

Facendo tendere n ad infinito, si trova che

$$\overline{\int_E} f(x)\,dx = \underline{\int_E} f(x)\,dx \,,$$

come si voleva dimostrare.

Viceversa, supponiamo che si abbia

$$\overline{\int_E} f(x)\,dx = \underline{\int_E} f(x)\,dx \,.$$

Per definizione di estremo superiore ed inferiore, per ogni n in $\mathbb{N}$ esistono $\overline{\varphi}_n$ in $\overline{S}(f)$ e $\underline{\varphi}_n$ in $\underline{S}(f)$ tali che

$$0 \le \int_E \overline{\varphi}_n(x)\,dx - \int_E \underline{\varphi}_n(x)\,dx \le \frac{1}{n} \,. \tag{2.5}$$

Essendo sia $\overline{\varphi}_n$ che $\underline{\varphi}_n$ misurabili, per il Teorema 2.4.7 sono misurabili le funzioni

$$\overline{\varphi}(x) = \inf\{\overline{\varphi}_n(x)\,,\ n \in \mathbb{N}\} \,, \qquad \underline{\varphi}(x) = \sup\{\underline{\varphi}_n(x)\,,\ n \in \mathbb{N}\} \,.$$

Si ha ovviamente

$$\underline{\varphi}(x) \leq \underline{\varphi}_n(x) \leq f(x) \leq \overline{\varphi}_n(x) \leq \overline{\varphi}(x)\,,$$

cosicché se dimostriamo che $\overline{\varphi} = \underline{\varphi}$ q.o., la funzione f è uguale q.o. ad una funzione misurabile (una qualsiasi tra $\overline{\varphi}$ e $\underline{\varphi}$) ed è dunque misurabile per il Teorema 2.4.10.

Sia allora

$$\Delta = \{x \in E : \overline{\varphi}(x) - \underline{\varphi}(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{x \in E : \overline{\varphi}(x) - \underline{\varphi}(x) > \frac{1}{k}\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Delta_k\,.$$

Se x appartiene a Δ_k, allora si ha, per definizione di $\overline{\varphi}$ e $\underline{\varphi}$, e per ogni n in $\mathbb{N}$,

$$\overline{\varphi}_n(x) - \underline{\varphi}_n(x) \geq \overline{\varphi}(x) - \underline{\varphi}(x) > \frac{1}{k}\,,$$

e quindi, per ogni n in $\mathbb{N}$,

$$\Delta_k \subseteq \Delta_k^{(n)} = \{x \in E : \overline{\varphi}_n(x) - \underline{\varphi}_n(x) > \frac{1}{k}\}\,.$$

Ma allora, essendo $\overline{\varphi}_n(x) - \underline{\varphi}_n(x) \geq [\overline{\varphi}_n(x) - \underline{\varphi}_n(x)]\,\chi_{\Delta_k^{(n)}}(x)$, dal Teorema 3.2.3 segue che

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \geq \int_E [\overline{\varphi}_n(x) - \underline{\varphi}_n(x)]\,dx &\geq \int_E [\overline{\varphi}_n(x) - \underline{\varphi}_n(x)]\,\chi_{\Delta_k^{(n)}}(x)\,dx \\
&\geq \int_E \frac{1}{k}\,\chi_{\Delta_k^{(n)}}(x)\,dx = \frac{m(\Delta_k^{(n)})}{k}\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, per ogni n in $\mathbb{N}$,

$$0 \leq m(\Delta_k) \leq m(\Delta_k^{(n)}) \leq \frac{k}{n}\,,$$

e quindi (facendo tendere n ad infinito), $m(\Delta_k) = 0$, da cui segue $m(\Delta) = 0$, ovvero $\overline{\varphi} = \underline{\varphi}$ q.o.. ∎

Come conseguenza del Teorema precedente, condizione necessaria e sufficiente affinché valga (2.4) è che la funzione f sia misurabile e limitata; in altre parole, se prendiamo (2.4) come condizione di integrabilità, ogni funzione misurabile e limitata è integrabile. Abbiamo così la seguente definizione.

Definizione 3.2.7 Sia E un insieme misurabile con $m(E) < +\infty$ e sia $f : E \to \mathbb{R}$ misurabile e limitata. Definiamo l'integrale secondo Lebesgue di f su E come

$$\int_E f(x)\,dx = \inf\left\{\int_E \overline{\varphi}(x)\,dx\,,\ \overline{\varphi} \in \overline{S}(f)\right\} = \sup\left\{\int_E \underline{\varphi}(x)\,dx\,,\ \underline{\varphi} \in \underline{S}(f)\right\}.$$

Osservazione 3.2.8 Se φ è una funzione semplice, allora φ appartiene sia a $\overline{S}(\varphi)$ che a $\underline{S}(\varphi)$. Pertanto,

$$\overline{\int_E} \varphi(x)\,dx = \underline{\int_E} \varphi(x)\,dx = \int_E \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} a_i\, m(A_i)\,.$$

Alla luce della definizione precedente, l'integrale secondo Lebesgue di φ è proprio il valore definito in (3.2.1); in altre parole, l'integrale secondo Lebesgue estende alle funzioni misurabili il concetto (intuitivo) di integrale dato per funzioni semplici.

Osservazione 3.2.9 Ricordando che se $F \subseteq E$ è misurabile e se $f : E \to \mathbb{R}$ è misurabile, allora la restrizione di f a F è misurabile, ne segue che se f è anche limitata, f è integrabile secondo Lebesgue. Siccome $f\,\chi_F$ è una funzione misurabile e limitata su E (come prodotto di funzioni misurabili su E), allora $f\,\chi_F$ è integrabile su E. È facile vedere (osservando che il prodotto di una funzione semplice per una caratteristica è ancora una funzione semplice) che si ha

$$\int_F f(x)\,dx = \int_E f(x)\,\chi_F(x)\,dx\,. \tag{2.6}$$

Sia ora $E = [a, b]$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata e integrabile secondo Riemann; ci si chiede se f sia anche integrabile secondo Lebesgue (ovvero, se sia misurabile) e, in caso affermativo, se il suo integrale secondo Lebesgue coincida con il suo integrale secondo Riemann. La risposta, positiva, è data dal seguente teorema.

Teorema 3.2.10 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e integrabile secondo Riemann. Allora f è integrabile secondo Lebesgue e*

$$\mathrm{R}\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Se $\underline{\varphi}$ è una funzione a gradino tale che $\underline{\varphi}(x) \leq f(x)$ per ogni x in $[a, b]$, allora $\underline{\varphi}(x)$ è una funzione semplice (si noti che è misurabile perché gli intervalli sono misurabili) e quindi è in $\underline{S}(f)$. Analogamente, se $\overline{\varphi}$ è una funzione a gradino tale che $f(x) \leq \overline{\varphi}(x)$ per ogni x in $[a, b]$, allora $\overline{\varphi}$ è in $\overline{S}(f)$. Pertanto, per definizione,

$$\mathrm{R}\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \underline{\int_{[a,b]}} f(x)\,dx \leq \overline{\int_{[a,b]}} f(x)\,dx \leq \mathrm{R}\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

Siccome f è integrabile secondo Riemann, le disuguaglianze sono tutte uguaglianze; pertanto f è misurabile (per il Teorema 3.2.6) e il suo integrale secondo Lebesgue coincide con il suo integrale secondo Riemann. ∎

Nel teorema che segue vengono enunciate alcune proprietà dell'integrale secondo Lebesgue.

Teorema 3.2.11 *Siano f e g due funzioni misurabili e limitate su un insieme misurabile E di misura finita. Allora*

i) per ogni a e b in $\mathbb{R}$ si ha

$$\int_E [a\,f(x) + b\,g(x)]\,dx = a \int_E f(x)\,dx + b \int_E g(x)\,dx\,; \tag{2.7}$$

ii) se $f = g$ q.o., allora

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx\,; \tag{2.8}$$

iii) se $f \leq g$ q.o., allora

$$\int_E f(x)\,dx \leq \int_E g(x)\,dx\,; \tag{2.9}$$

pertanto,

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right| \leq \int_E |f(x)|\,dx\,; \tag{2.10}$$

iv) se $A \leq f(x) \leq B$ q.o., allora

$$A\,m(E) \leq \int_E f(x)\,dx \leq B\,m(E)\,; \tag{2.11}$$

v) se $E = A \cup B$, con A e B misurabili e disgiunti, allora

$$\int_E f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx\,. \tag{2.12}$$

Dimostrazione. Sia a un numero reale e f una funzione misurabile e limitata su E; se $a = 0$, allora $a\,f(x) \equiv 0$, l'integrale di $a\,f$ è nullo, e si ha la (2.7) per $b = 0$ e $g = 0$. Sia ora $a \neq 0$; se ψ è una funzione semplice, allora $a\,\psi$ è una funzione semplice, e viceversa. Se $a > 0$, e $\overline{\varphi}$ è una funzione semplice in $\overline{S}(f)$, allora $a\,\overline{\varphi}$ appartiene a $\overline{S}(a\,f)$, e viceversa. Pertanto

$$\int_E a\,f(x)\,dx = \inf_{\overline{S}(f)} \int_E a\,\overline{\varphi}(x)\,dx = a\,\inf_{\overline{S}(f)} \int_E \overline{\varphi}(x)\,dx = a\int_E f(x)\,dx\,.$$

Se, invece, $a < 0$, e $\underline{\varphi}$ è in $\underline{S}(f)$, allora $a\,\varphi$ appartiene a $\overline{S}(a\,f)$ e viceversa. Pertanto, per definizione di integrale secondo Lebesgue,

$$\begin{aligned}\int_E a\,f(x)\,dx &= \inf_{\overline{S}(a\,f)} \int_E \overline{\varphi}(x)\,dx = \inf_{\underline{S}(f)} \int_E a\,\underline{\varphi}(x)\,dx \\ &= a\,\sup_{\underline{S}(f)} \int_E \underline{\varphi}(x)\,dx = a\int_E f(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Siano ora $\overline{\varphi}_1$ in $\overline{S}f$ e $\overline{\varphi}_2$ in $\overline{S}g$; allora $\overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_2$ è in $\overline{S}(f+g)$ e quindi, per definizione di integrale e per la (2.2)

$$\int_E [f(x)+g(x)]\,dx \le \int_E [\overline{\varphi}_1(x)+\overline{\varphi}_2(x)]\,dx = \int_E \overline{\varphi}_1(x)\,dx + \int_E \overline{\varphi}_2(x)\,dx\,.$$

Passando all'estremo inferiore sulle $\overline{\varphi}_1$ in $\overline{S}(f)$ e sulle $\overline{\varphi}_2$ in $\overline{S}(g)$ al secondo membro, si ha

$$\int_E [f(x)+g(x)]\,dx \le \int_E f(x)\,dx + \int_E g(x)\,dx\,.$$

Siano poi $\underline{\varphi}_1$ in $\underline{S}(f)$ e $\underline{\varphi}_2$ in $\underline{S}(g)$; allora $\underline{\varphi}_1 + \underline{\varphi}_2$ è in $\underline{S}(f+g)$ e si ha

$$\int_E \underline{\varphi}_1(x)\,dx + \int_E \underline{\varphi}_2(x)\,dx = \int_E [\underline{\varphi}_1(x)+\underline{\varphi}_2(x)]\,dx \le \int_E [f(x)+g(x)]\,dx\,.$$

Prendendo l'estremo inferiore sulle $\underline{\varphi}_1$ in $\underline{S}(f)$ e sulle $\underline{\varphi}_2$ in $\underline{S}(g)$ al primo membro, si ottiene

$$\int_E f(x)\,dx + \int_E g(x)\,dx \le \int_E [f(x)+g(x)]\,dx\,,$$

da cui segue che

$$\int_E [f(x)+g(x)]\,dx = \int_E f(x)\,dx + \int_E g(x)\,dx\,,$$

e quindi la (2.7), combinando questo risultato con quello ottenuto per $a\,f$.

Per provare (2.8) è sufficiente allora provare che se $f = g$ q.o.,

$$\int_E [f(x)-g(x)]\,dx = 0\,. \tag{2.13}$$

Siccome $f - g = 0$ q.o., se $\overline{\varphi}$ è in $\overline{S}(f-g)$, allora $\overline{\varphi} \ge f - g$ e quindi $\overline{\varphi} \ge 0$ q.o.; analogamente, se $\underline{\varphi}$ è in $\underline{S}(f-g)$, allora $\underline{\varphi} \le f - g$ e quindi $\underline{\varphi} \le 0$ q.o.. Ricordando (2.3), si ha allora

$$\int_E \underline{\varphi}(x)\,dx \le 0 \le \int_E \overline{\varphi}(x)\,dx\,,$$

e quindi

$$\sup_{\underline{S}(f-g)} \int_E \underline{\varphi}(x)\,dx \le 0 \le \inf_{\overline{S}(f-g)} \int_E \overline{\varphi}(x)\,dx\,.$$

Essendo le due quantità uguali all'integrale di $f - g$, ne segue (2.13).

Un ragionamento analogo (anzi, metà del ragionamento), permette di provare (2.9), mentre (2.10) segue dal fatto che $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ ovunque, e che se f è misurabile e limitata allora lo è $|f|$.

La formula (2.11) segue direttamente da (2.9), osservando che, per definizione di integrale di una funzione caratteristica,

$$\int_E A\,dx = A\int_E 1\,dx = A\int_E \chi_E(x)\,dx = A\,m(E)\,.$$

Essendo poi $\chi_E = \chi_A + \chi_B$, si ha, per definizione, e per (2.7)

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\,dx &= \int_E [f(x)\,\chi_A(x) + f(x)\,\chi_B(x)]\,dx \\ &= \int_E f(x)\,\chi_A(x)\,dx + \int_E f(x)\,\chi_B(x)\,dx \\ &= \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx\,,\end{aligned}$$

che è la (2.12). ■

Sia ora f_n una successione di funzioni misurabili e limitate definite su un insieme E misurabile di misura finita. Si può allora calcolare l'integrale di f_n su E. Supponiamo che la successione f_n converga quasi ovunque in E ad una funzione f: tale funzione risulta misurabile per il Teorema 2.4.7; se supponiamo che la f sia anche limitata, allora ha senso considerare l'integrale di f su E, così come ha senso porsi la domanda se l'integrale delle f_n converga all'integrale della f. La risposta è affermativa, se sulle funzioni f_n (che sono limitate per ipotesi) si richiede che la limitatezza sia "uniforme". Osserviamo che senza l'ipotesi di limitatezza sulla funzione f, la domanda se l'integrale delle f_n converga o meno all'integrale della f non ha alcun senso, dal momento che l'integrale della f non è definito.

Teorema 3.2.12 (Convergenza limitata) *Sia E un insieme misurabile di misura finita, e sia $f_n : E \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni misurabili tali che*

i) esiste $M \geq 0$ tale che $|f_n(x)| \leq M$ per ogni n in $\mathbb{N}$ e per ogni x in E;

ii) esiste una funzione limitata $f : E \to \mathbb{R}$ tale che f_n converge quasi ovunque ad f in E.

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx\,. \tag{2.14}$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Applichiamo il Teorema di Egorov (Teorema 2.4.15) e determiniamo un insieme A_ε contenuto in E, con $m(A_\varepsilon) < \varepsilon$, tale che f_n converge uniformemente a f in $E \setminus A_\varepsilon$; ciò vuol dire che (per lo stesso ε) esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$\sup_{E\setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon\,.$$

Si ha allora, per $n \geq n_\varepsilon$, usando i risultati del Teorema 3.2.11, e detto M' il numero reale positivo tale che $|f(x)| \leq M'$ per ogni x in E,

$$\begin{aligned}
\left|\int_E f_n(x)\,dx - \int_E f(x)\,dx\right| &= \left|\int_E [f_n(x) - f(x)]\,dx\right| \\
&\leq \int_E |f_n(x) - f(x)|\,dx \\
&= \int_{E\setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)|\,dx \\
&\quad + \int_{A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)|\,dx \\
&\leq m(E\setminus A_\varepsilon) \sup_{E\setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \\
&\quad +(M + M')\, m(A_\varepsilon) \\
&\leq m(E)\,\varepsilon + (M + M')\,\varepsilon\,,
\end{aligned}$$

e quindi la tesi. ■

Osservazione 3.2.13 Se la successione f_n converge puntualmente (ovvero, ovunque) ad f, la funzione f è evidentemente limitata come conseguenza dell'ipotesi i). Nel caso in cui la convergenza sia solo q.o., si ha $|f(x)| \leq M$ solo nell'insieme $E \setminus A$, dove A è l'insieme di misura nulla su cui f_n non converge ad f. Su A, la f (pur essendo misurabile), può non essere limitata; di qui la necessità di richiedere la limitatezza di f ovunque.

Esempio 3.2.14 Riprendiamo la successione f_n definita nell'Esempio 3.1.1. La successione f_n soddisfa le ipotesi del teorema precedente, e quindi si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\,dx = \int_{[0,1]} D(x)\,dx\,;$$

si osservi che in questo caso (sia f_n che D sono quasi ovunque uguali alla funzione nulla, per cui il risultato "numerico" è banalmente vero), entrambi i membri hanno senso!

3.2.2 Funzioni non negative

Grazie al Teorema 3.2.6, ogni funzione misurabile e limitata su un insieme di misura finita è integrabile secondo Lebesgue. Che succede se la funzione

f non è limitata, o l'insieme E è di misura infinita? Una prima risposta, o meglio una definizione, viene data per funzioni di segno costante.

Definizione 3.2.15 Sia E un insieme misurabile, e sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile e non negativa quasi ovunque. Allora è non vuoto l'insieme $\underline{M}(f)$ delle funzioni $h : E \to \mathbb{R}$ misurabili, limitate, non negative quasi ovunque, tali che $m(E_0(h)) < +\infty$ e $h(x) \leq f(x)$ q.o.; infatti, la funzione identicamente nulla è in $\underline{M}(f)$. Per una funzione h in $\underline{M}(f)$, definiamo

$$\int_E h(x)\,dx = \int_E h(x)\,\chi_{E_0(h)}\,dx = \int_{E_0(h)} h(x)\,dx\,.$$

Definiamo poi l'integrale di f su E come

$$\int_E f(x)\,dx = \sup\left\{\int_E h(x)\,dx\,,\ h \in \underline{M}(f)\right\}\,. \tag{2.15}$$

Osservazione 3.2.16 Se E è un insieme misurabile di misura finita, e $f : E \to [0,+\infty)$ è una funzione misurabile, non negativa quasi ovunque e limitata, allora f appartiene a $\underline{M}(f)$ e pertanto il suo integrale secondo la definizione precedente non è altro che l'integrale di f definito nella sezione precedente.

Osservazione 3.2.17 È, ovviamente, possibile che l'integrale di f su E valga $+\infty$. Ad esempio, se $f \equiv 1$ su $\mathbb{R}$, allora la funzione $h_n = \chi_{[-n,n]}$ appartiene a $\underline{M}(f)$ per ogni n in $\mathbb{N}$ e quindi

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \geq \int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,dx = \int_{[-n,n]} 1\,dx = m([-n,n]) = 2n\,.$$

Analogamente, se $f(x) = 1/x$ su $(0,1)$, la funzione h_n definita in $(0,1)$ da

$$h_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } x \in (0,\frac{1}{n}),\\ \frac{1}{x} & \text{se } x \in [\frac{1}{n},1),\end{cases}$$

è integrabile secondo Lebesgue (perché è misurabile essendo continua e limitata) e il suo integrale vale (per il Teorema 3.2.10)

$$\int_{(0,1)} h_n(x)\,dx = \mathrm{R}\int_0^1 h_n(x)\,dx = 1 + \ln(n)\,,$$

che diverge quando n tende ad infinito. Siccome $h_n(x)$ è in $\underline{M}(f)$ per ogni n in $\mathbb{N}$, ne segue che l'integrale di f su $(0,1)$ vale $+\infty$. Analogamente, ha valore $+\infty$ l'integrale della funzione $f = +\infty\, \chi_{[0,1]}$.

L'integrale così definito gode delle "solite" proprietà dell'integrale (almeno quelle che "preservano" la non negatività di una funzione).

Teorema 3.2.18 *Sia E un insieme misurabile, e siano f e g due funzioni definite su E, misurabili e non negative quasi ovunque. Allora*

i) per ogni $c > 0$ si ha

$$\int_E c\, f(x)\, dx = c \int_E f(x)\, dx\,; \tag{2.16}$$

ii)

$$\int_E [f(x) + g(x)]\, dx = \int_E f(x)\, dx + \int_E g(x)\, dx\,; \tag{2.17}$$

iii) se $f \leq g$ q.o., allora

$$\int_E f(x)\, dx \leq \int_E g(x)\, dx\,; \tag{2.18}$$

di conseguenza, se $f = g$ q.o.,

$$\int_E f(x)\, dx = \int_E g(x)\, dx\,; \tag{2.19}$$

Dimostrazione. La dimostrazione di (2.16) e (2.18) segue la stessa linea della prova del Teorema 3.2.11 (ad esempio, se h è in $\underline{M}(f)$, allora $c\,h$ è in $\underline{M}(c\,f)$, e viceversa). Proviamo allora (2.17). Siano h in $\underline{M}(f)$ e k in $\underline{M}(g)$. Allora $h+k$ è in $\underline{M}(f+g)$ (si noti che $E_0(h+k) \subseteq E_0(h) \cup E_0(k)$, e quindi $h+k$ è strettamente positiva solo su un insieme di misura finita) e pertanto

$$\int_E h(x)\, dx + \int_E k(x)\, dx = \int_E [h(x) + k(x)]\, dx \leq \int_E [f(x) + g(x)]\, dx\,.$$

Passando all'estremo superiore per h in $\underline{M}(f)$ e k in $\underline{M}(g)$, si ha

$$\int_E f(x)\, dx + \int_E g(x)\, dx \leq \int_E [f(x) + g(x)]\, dx\,. \tag{2.20}$$

Viceversa, sia l in $\underline{M}(f+g)$, e definiamo $h(x) = \min(f^+(x), l(x))$ e $k(x) = l(x) - h(x)$. Evidemente h appartiene a $\underline{M}(f)$ (dove l è nulla anche h è nulla, e pertanto h è diversa da zero solo su un insieme di misura finita); inoltre, k vale o 0 (dove coincide con l), oppure $l - f^+ \leq g$ (essendo $l \leq f + g$, si ha $l \leq f^+ + g$), e quindi si ha sempre $k(x) \leq g(x)$; pertanto, k appartiene a $\underline{M}(g)$ e si ha

$$\int_E l(x)\,dx = \int_E h(x)\,dx + \int_E k(x)\,dx \leq \int_E f(x)\,dx + \int_E g(x)\,dx\,.$$

Prendendo l'estremo superiore al variare di l in $\underline{M}(f+g)$ si ha allora

$$\int_E [f(x) + g(x)]\,dx \leq \int_E f(x)\,dx + \int_E g(x)\,dx\,,$$

che, insieme a (2.20), dà la tesi. ■

Il prossimo teorema, di importanza fondamentale, è il primo passo per estendere il risultato del Teorema di convergenza limitata a successioni di funzioni misurabili qualsiasi.

Teorema 3.2.19 (Lemma di Fatou) *Sia E un insieme misurabile, e sia $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una successione di funzioni misurabili e non negative quasi ovunque tale che f_n converge quasi ovunque in E ad una funzione f. Allora*

$$\int_E f(x)\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx\,. \tag{2.21}$$

Dimostrazione. Sia h in $\underline{M}(f)$, e definiamo

$$h_n(x) = \max\left[\min\left[h(x), f_n(x)\right], 0\right].$$

La funzione h_n è misurabile (perché sia h che f_n lo sono), è limitata (perché $h_n \geq 0$ ovunque, $h_n \leq h$ quasi ovunque, e dove h_n è maggiore di h si ha $h_n = 0$ essendo $h < 0$) e non negativa su E, è tale che $m(E_0(h_n)) < +\infty$ (perché $E_0(h_n) \subseteq E_0(h)$, e $E_0(h)$ ha misura finita essendo h in $\underline{M}(f)$) e si ha $h_n(x) \leq f_n(x)$ quasi ovunque (per definizione). Pertanto, h_n è in $\underline{M}(f_n)$ e quindi

$$\int_E h_n(x)\,dx \leq \int_E f_n(x)\,dx\,, \tag{2.22}$$

per ogni n in $\mathbb{N}$. Siccome $h(x) \le f(x)$ q.o. in E, e f_n converge a f q.o. in E, si ha che $h_n(x)$ converge a $h(x)$ q.o. in E per n tendente ad infinito; inoltre $h_n(x)$ è equilimitata; è allora possibile applicare il Teorema di convergenza limitata alla successione h_n ristretta all'insieme (di misura finita) $E_0(h)$, ed ottenere che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{E_0(h)} h_n(x)\,dx = \int_{E_0(h)} h(x)\,dx\,.$$

Essendo però $E_0(h_n) \subseteq E_0(h) \subseteq E$, ed essendo h_n nulla su $E_0(h)\backslash E_0(h_n)$ si ha

$$\int_{E_0(h)} h_n(x)\,dx = \int_{E_0(h_n)} h_n(x)\,dx = \int_E h_n(x)\,dx\,,$$

per definizione di integrale di h_n su E, e quindi (per definizione di integrale di h su E),

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E h_n(x)\,dx = \int_E h(x)\,dx\,.$$

Ricordando (2.22) si ha allora

$$\int_E h(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_E h_n(x)\,dx \le \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx\,.$$

Passando all'estremo superiore per h in $\underline{M}(f)$ si ha la tesi. ∎

Se aggiungiamo un'ipotesi — la monotonia — alla successione f_n, la tesi del teorema precedente è ancora più forte.

Teorema 3.2.20 (Beppo Levi – Convergenza monotona) *Sia E un insieme misurabile, e sia $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una successione crescente di funzioni misurabili e non negative quasi ovunque. Detto f il limite puntuale delle f_n, si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx \tag{2.23}$$

Dimostrazione. Per il Lemma di Fatou, abbiamo

$$\int_E f(x)\,dx \le \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx\,;$$

inoltre, essendo $f_n \le f$ ovunque in E, per ogni n in $\mathbb{N}$ si ha

$$\int_E f_n(x)\,dx \le \int_E f(x)\,dx\,,$$

da cui

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx \le \int_E f(x)\,dx\,,$$

e quindi la tesi. ∎

Corollario 3.2.21 *Sia E un insieme misurabile e $g_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una successione di funzioni misurabili e non negative quasi ovunque. Detta*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i(x)\,dx\,,$$

si ha

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_E g_i(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. È sufficiente usare le proprietà dell'integrale e applicare il Teorema di convergenza monotona alla successione crescente di funzioni non negative quasi ovunque

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} g_n(x)\,.$$

∎

Teorema 3.2.22 *Sia E un insieme misurabile e sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile e non negativa quasi ovunque. Sia $\{E_n\}$ una successione di insiemi misurabili a due a due disgiunti e tali che la loro unione è E; allora*

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} f(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Detta $g_n = f\,\chi_{E_n}$, si può applicare il Corollario 3.2.21 dal momento che f è proprio la somma della serie delle g_n e che

$$\int_E g_n(x)\,dx = \int_{E_n} f(x)\,dx\,.$$

∎

Abbiamo fino ad ora parlato di integrale per funzioni misurabili e non negative, e abbiamo provato alcune proprietà, tra le quali il fatto che l'integrale della somma di due funzioni è la somma degli integrali. Dal momento che abbiamo a che fare con valori che possono essere infiniti, è chiaro che non possiamo parlare di legami tra l'integrale della differenza di due funzioni e la differenza degli integrali; ad esempio, prendendo $f \equiv 2$ e $g \equiv 1$ su $\mathbb{R}$, l'integrale di entrambe le funzioni è infinito, come l'integrale della differenza, ma se prendiamo $f = 1+\chi_{[0,1]}$ e $g \equiv 1$, la differenza ha integrale 1. Per poter operare in maniera algebricamente corretta, diamo la seguente definizione.

Definizione 3.2.23 Sia E un insieme misurabile e $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile e non negativa quasi ovunque. La funzione f si dice **sommabile** se si ha

$$\int_E f(x)\,dx < +\infty\,.$$

Vale allora il seguente risultato.

Teorema 3.2.24 *Sia E un insieme misurabile e siano f e g due funzioni misurabili e non negative quasi ovunque definite su E. Supponiamo che f sia sommabile e che $g(x) \le f(x)$ q.o. in E. Allora g è sommabile e si ha*

$$\int_E [f(x) - g(x)]\,dx = \int_E f(x)\,dx - \int_E g(x)\,dx\,. \tag{2.24}$$

Dimostrazione. Si ha $f = (f-g)+g$, con g e $f-g$ non negative quasi ovunque. Allora, per (2.17)

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E [f(x) - g(x)]\,dx + \int_E g(x)\,dx\,.$$

Siccome il primo membro è finito per ipotesi, lo sono entrambi gli addendi a destra (essendo non negativi); pertanto, g è sommabile e si ha la (2.24).

■

Una funzione sommabile non può assumere il valore $+\infty$ su insiemi di misura positiva.

Teorema 3.2.25 (Chebyshev) *Sia E un insieme misurabile, e $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile, non negativa quasi ovunque e sommabile. Allora, per ogni $\lambda > 0$ si ha*

$$\lambda\, m(\{x \in E : f(x) \geq \lambda\}) \leq \int_E f(x)\, dx\,. \tag{2.25}$$

In particolare, $m(\{x \in E : f(x) = +\infty\}) = 0$.

Dimostrazione. Si ha, quasi ovunque in E,

$$\lambda\, \chi_{\{x\in E: f(x)\geq\lambda\}} \leq f(x)\, \chi_{\{x\in E: f(x)\geq\lambda\}} \leq f(x)\,,$$

e quindi, integrando;

$$\lambda\, m(\{x \in E : f(x) \geq \lambda\}) \leq \int_{\{x\in E: f(x)\geq\lambda\}} f(x)\, dx \leq \int_E f(x)\, dx\,.$$

Definiamo poi $E_n = \{x \in E : f(x) \geq n\}$. Allora $m(E_1) < +\infty$ (essendo minore dell'integrale di f su E, finito per ipotesi), $E_{n+1} \subseteq E_n$ e $\{x \in E : f(x) = +\infty\}$ è l'intersezione degli E_n. Allora, per (2.25),

$$m(\{x \in E : f(x) = +\infty\}) = \lim_{n\to+\infty} m(E_n) \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_E f(x)\, dx = 0\,,$$

e quindi la tesi. ∎

Per funzioni sommabili vale il seguente risultato, detto "assoluta continuità dell'integrale".

Teorema 3.2.26 *Sia E un insieme misurabile e sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile, non negativa quasi ovunque e sommabile. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $A \subseteq E$ e $m(A) \leq \delta$ implica*

$$\int_A f(x)\, dx \leq \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Se la funzione f è limitata, ovvero se $0 \leq f(x) \leq M$ per ogni x in E, è sufficiente scegliere $\delta = \varepsilon/M$ per avere la tesi; infatti, per ogni A misurabile contenuto in E,

$$\int_A f(x)\, dx \leq \int_A M\, dx = M\, m(A) \leq M\,\delta = \varepsilon\,.$$

Supponiamo allora f non limitata, e definiamo, per n in $\mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leq n, \\ n & \text{se } f(x) > n. \end{cases}$$

Si ha ovviamente $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$, e $f_n(x)$ converge puntualmente ad f. Per il teorema di convergenza monotona,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx\,.$$

Pertanto, fissato $\varepsilon > 0$, esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_\varepsilon$,

$$\int_E f_n(x)\,dx \geq \int_E f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

D'altra parte, scegliendo $\delta = \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, si ha che $m(A) \leq \delta$ implica

$$\int_A f_{n_\varepsilon}(x)\,dx \leq n_\varepsilon\, m(A) \leq n_\varepsilon\, \delta = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Pertanto, se $m(A) \leq \delta$, essendo $[f - f_{n_\varepsilon}]\,\chi_A \leq [f - f_{n_\varepsilon}]$,

$$\begin{aligned} \int_A f(x)\,dx &= \int_A [f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)]\,dx + \int_A f_{n_\varepsilon}(x)\,dx \\ &\leq \int_E [f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)]\,dx + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon\,, \end{aligned}$$

e quindi la tesi. ∎

3.2.3 L'integrale di Lebesgue generale

Sia E un insieme misurabile, e sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile; ricordiamo che le funzioni $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ e $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ sono misurabili, che $f = f^+ - f^-$, mentre $|f| = f^+ + f^-$.

Definizione 3.2.27 Sia E un insieme misurabile e $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. La funzione f si dice sommabile su E se e solo se f^+ e f^- sono sommabili su E, ovvero se e solo se $|f|$ è sommabile su E; in tal caso, definiamo

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx\,.$$

Anche l'integrale generale di Lebesgue gode delle proprietà solite, la cui dimostrazione è omessa.

Teorema 3.2.28 *Sia E un insieme misurabile e siano f e g funzioni misurabili a valori in $\overline{\mathbb{R}}$, entrambe sommabili. Allora*

i) per ogni c in $\mathbb{R}$ la funzione $c\,f$ è sommabile su E, e si ha

$$\int_E c\,f(x)\,dx = c\int_E f(x)\,dx\,;$$

ii) la funzione $f+g$ è sommabile su E, e si ha

$$\int_E [f(x)+g(x)]\,dx = \int_E f(x)\,dx + \int_E g(x)\,dx\,;$$

iii) se $f \leq g$ q.o., allora

$$\int_E f(x)\,dx \leq \int_E g(x)\,dx\,;$$

di conseguenza, se $f = g$ q.o., allora

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx\,;$$

iv) se $E = A \cup B$, con A e B disgiunti e misurabili, allora

$$\int_E f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx\,.$$

Osservazione 3.2.29 Si noti che $f(x)+g(x)$ non è definita su $G_{+\infty}(f) \cap G_{-\infty}(g)$ e su $G_{-\infty}(f) \cap G_{+\infty}(g)$. Questi insiemi, però, hanno misura nulla per il Teorema 3.2.25; pertanto, qualsiasi sia il valore assegnato a $f+g$ su questi punti, il valore dell'integrale non cambia.

Per le funzioni sommabili vale un ulteriore teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, che indebolisce le ipotesi fatte nel Teorema della convergenza limitata (che ne diventa un caso particolare).

Teorema 3.2.30 (Lebesgue – Convergenza dominata) *Sia E un insieme misurabile e sia $g : E \to \overline{R}$ una funzione misurabile e sommabile. Sia $f_n : E \to \overline{R}$ una successione di funzioni misurabili tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ quasi ovunque in E. Supponiamo inoltre che f_n converga quasi ovunque a f in E. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. La successione $g-f_n$ è fatta di funzioni non negative quasi ovunque e converge quasi ovunque in E alla funzione $g-f$, non negativa quasi ovunque anch'essa (dal momento che $f_n(x)$ converge a q.o. a $f(x)$). Per il Lemma di Fatou,

$$\int_E [g(x) - f(x)]\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E [g(x) - f_n(x)]\,dx\,.$$

Essendo $|f| \leq g$, con g sommabile, anche f lo è, e quindi dalla disuguaglianza precedente segue che

$$\int_E g(x)\,dx - \int_E f(x)\,dx \leq \int_E g(x)\,dx - \limsup_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx\,,$$

e quindi

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,dx \leq \int_E f(x)\,dx\,.$$

Considerando $g + f_n$, si ha che

$$\int_E f(x)\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)\,,$$

e quindi la tesi. ■

3.2.4 Convergenza in misura

Strettamente legato ai teoremi di passaggio al limite è il concetto di convergenza in misura.

Definizione 3.2.31 Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili definite su un insieme misurabile E a valori in $\overline{\mathbb{R}}$. La successione f_n si dice convergente a f **in misura** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon\,, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon\,.$$

Alternativamente, f_n converge a f in misura se per ogni $\lambda > 0$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \lambda\}) = 0\,.$$

Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni sommabili tali che l'integrale di $|f_n|$ tende a zero, allora f_n tende a zero in misura. Infatti, per (2.25),

$$0 = \lim_{n \to +\infty} \int_E |f_n(x)|\,dx \geq \lim_{n \to +\infty} \lambda\, m(\{x \in E : |f_n(x)| \geq \lambda\})\,.$$

Il legame tra la convergenza in misura e la convergenza quasi ovunque è dato dal seguente teorema.

Teorema 3.2.32 *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili definite su un insieme misurabile E a valori in $\overline{\mathbb{R}}$. Se f_n converge in misura a f, allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge quasi ovunque a f.*

Dimostrazione. Sia k in $\mathbb{N}$. Siccome f_n converge in misura a f, esiste n_k in $\mathbb{N}$ tale che

$$m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq 2^{-k}\}) \leq 2^{-k}\,, \qquad \forall n \geq n_k\,.$$

Definiamo $E_k = \{x \in E : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq 2^{-k}\}$ e sia, per h in $\mathbb{N}$ fissato,

$$A_h = \bigcup_{k \geq h} E_k\,.$$

Per la subadditività della misura si ha $m(A_h) \leq 2^{-h+1}$. Sia ora x in $E \backslash A_h$. Allora x non appartiene all'insieme su cui $|f_{n_k}(x) - f(x)| \geq 2^{-k}$ per ogni $k \geq h$, e quindi

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq 2^{-k}\,, \qquad \forall k \geq h\,.$$

Pertanto, per ogni h in $\mathbb{N}$ si ha che $f_{n_k}(x)$ converge a $f(x)$ su $E\backslash A_h$. Sia ora

$$A = \bigcap_{h=1}^{+\infty} A_h \,.$$

Dal momento che $m(A_1) \leq 1$, e che gli A_h sono una successione decrescente, si ha

$$m(A) = \lim_{h\to+\infty} m(A_h) = 0 \,.$$

Siccome $f_{n_k}(x)$ converge a $f(x)$ su $E\backslash A_h$ per ogni h, allora $f_{n_k}(x)$ converge a $f(x)$ su $E\backslash A$, e quindi la si ha la tesi. ■

Alla luce del precedente risultato, è possibile modificare l'ipotesi "f_n converge a f q.o." nel lemma di Fatou e nei teoremi di convergenza limitata e dominata, sostituendoli con "f_n converge a f in misura".

Esempio 3.2.33 Il contrario del teorema precedente non è vero in generale: se f_n converge quasi ovunque a f, non è detto che f_n converga in misura a f (né che lo faccia una sua sottosuccessione). Ad esempio, se $f_n = \chi_{(-n,n)}$, f_n converge quasi ovunque a $f \equiv 1$ in $\mathbb{R}$, ma f_n non converge in misura ad f dal momento che, per ogni $\lambda > 0$,

$$m(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 1| \geq \lambda\}) = m(\mathbb{R}\backslash(-n,n)) = +\infty \,.$$

Esempio 3.2.34 Se, però, $m(E) < +\infty$, ogni successione convergente quasi ovunque converge in misura. Infatti, per il Teorema di Egorov, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste A_ε contenuto in E, con $m(A_\varepsilon) < \varepsilon$, e n_ε in $\mathbb{N}$, tali che

$$\sup_{E\backslash A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \,, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon \,.$$

Pertanto, per $n \geq n_\varepsilon$ l'insieme degli x di E su cui $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ è contenuto in A_ε e ha dunque misura minore di ε.

Una volta introdotto il concetto di convergenza in misura, si può enunciare il seguente teorema, che fornisce una condizione necessaria e sufficiente per poter passare al limite sotto il segno di integrale.

Teorema 3.2.35 (Vitali) *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili definite su un insieme misurabile E, e supponiamo che f_n converga a f in misura. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0\,,$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : m(A) < \delta \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A |f_n(x)|\, dx \le \varepsilon\,.$$

La seconda condizione del teorema precedente prende il nome di equiassoluta integrabilità della successione $\{f_n\}$. Il Teorema di Vitali permette di migliorare il Teorema di Lebesgue.

Teorema 3.2.36 *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili definite su un insieme misurabile E, e supponiamo che f_n converga a f in misura. Supponiamo inoltre che, per ogni n, $|f_n(x)| \le g_n(x)$ quasi ovunque, con $\{g_n\}$ successione di funzioni misurabili tali che*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |g_n(x) - g(x)|\, dx = 0\,,$$

per qualche funzione g. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0\,.$$

Dimostrazione. Dal momento che l'integrale di $|g_n(x) - g(x)|$ tende a zero, per il Teorema di Vitali ($\Rightarrow$) la successione $\{g_n\}$ è equiassolutamente integrabile. Ovvero, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $m(A) < \delta$ implica

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A |g_n(x)|\, dx \le \varepsilon\,,$$

Essendo $|f_n(x)| \le g_n(x)$, si ha

$$\int_A |f_n(x)|\, dx \le \int_A |g_n(x)|\, dx \le \varepsilon\,,$$

per ogni n in $\mathbb{N}$, non appena $m(A) < \delta$. La successione $\{f_n\}$ è pertanto equiassolutamente integrabile, e dal Teorema di Vitali ($\Leftarrow$) si ha la tesi.

■

Capitolo 4

Gli spazi L^p

4.1 $L^1(E)$

Nel precedente capitolo abbiamo introdotto l'integrale secondo Lebesgue per funzioni misurabili su un insieme misurabile E. In particolare, e per dimostrare il teorema di Lebesgue, ci siamo ristretti alla classe delle funzioni sommabili — cioè le funzioni con integrale del modulo finito. Tale insieme può essere reso uno spazio metrico nel modo seguente.

Definizione 4.1.1 Sia E un insieme misurabile. Se f e g sono misurabili su E, definiamo $f\,\rho\,g$ se e solo se $f = g$ q.o.. È facile vedere che ρ è una relazione di equivalenza. Definiamo allora

$$L^1(E) = \frac{\left\{f : E \to \overline{\mathbb{R}} \text{ misurabili: } \displaystyle\int_E |f(x)|\, dx < +\infty\right\}}{\rho}\,,$$

ovvero lo spazio delle (classi di equivalenza quasi ovunque di) funzioni sommabili su E. Si indicherà sempre con f l'elemento $[f]$ di $L^1(E)$ (ovvero, lavoreremo con le funzioni ma tenendo sempre a mente che si tratta in realtà di classi di equivalenza).

Su $L^1(E)$ definiamo la seguente distanza:

$$d_1(f, g) = \int_E |f(x) - g(x)|\, dx\,.$$

Osserviamo che d_1 è ben definita: non dipende dalla scelta del rappresentante nella classe di equivalenza, dato che se $h \in [f]$ e $k \in [g]$, allora $|h-k| = |f-g|$ quasi ovunque e dunque gli integrali sono uguali; inoltre, $d_1(f,g)$ è un numero reale per ogni f e g in $L^1(E)$, dato che $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ e l'integrale è monotono.

Si verifica facilmente che $d_1(f,g) \geq 0$ e che $d_1(f,g) = d_1(g,f)$; inoltre

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|,$$

e, integrando su E, si ha la disuguaglianza triangolare. Rimane da dimostrare che se $d_1(f,g) = 0$, allora $[f] = [g]$, ovvero che $f = g$ quasi ovunque. In altre parole, se h è una funzione ovunque non negativa tale che l'integrale di h su E vale zero, allora deve essere $h = 0$ quasi ovunque. Per dimostrare questo fatto, sia $a > 0$ e definiamo $E_a(h) = \{x \in E : h(x) > a\}$. Si ha allora

$$0 = \int_E h(x)\,dx \geq \int_E h(x)\,\chi_{E_a(h)}(x)\,dx \geq a \int_E \chi_{E_a(h)}(x)\,dx = a\,m(E_a(h)),$$

e quindi $m(E_a(h)) = 0$ per ogni $a > 0$, da cui segue (essendo $E_0(h)$ l'unione di $E_{1/n}(h)$ al variare di n in $\mathbb{N}$) che $E_0(h)$ ha misura nulla, e quindi $h = 0$ quasi ovunque.

In definitiva, $(L^1(E), d_1)$ è uno spazio metrico. Se $E = [a,b]$, essendo ogni funzione continua su $[a,b]$ misurabile e limitata (quindi integrabile, e con integrale finito), si ha che $C^0([a,b],\mathbb{R})$ è un sottoinsieme proprio di $L^1([a,b])$. Siamo dunque partiti dallo spazio (non completo) $(C^0([a,b],\mathbb{R}), d_1)$, abbiamo introdotto la misura secondo Lebesgue, le funzioni misurabili, le funzioni integrabili ed infine le funzioni sommabili (che sono un sottoinsieme proprio delle funzioni integrabili); su quest'ultimo insieme (opportunamente quozientato) abbiamo mostrato come d_1 sia una distanza. Ci chiediamo ora se il nostro lavoro sia "finito"; ovvero se $(L^1([a,b]), d_1)$ sia completo, e se le funzioni continue siano dense in $(L^1([a,b]), d_1)$. Se così fosse, avremmo dimostrato che $(L^1([a,b]), d_1)$ è il completamento di $(C^0([a,b],\mathbb{R}), d_1)$. Fortunatamente, così è...

Definizione 4.1.2 Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni in $L^1(E)$. Diciamo che la serie

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),$$

converge a

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$$

in $L^1(E)$ se

$$\lim_{n\to+\infty} d_1(S_n, S) = \lim_{n\to+\infty} \int_E |S_n(x) - S(x)|\,dx = 0\,.$$

Diciamo che la serie S_n **converge totalmente** in $L^1(E)$ se

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_E |f_k(x)|\,dx\right) < +\infty\,.$$

Teorema 4.1.3 *Sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni in $L^1(E)$ tale che la serie*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,,$$

converge totalmente in $L^1(E)$. Allora esiste una funzione S in $L^1(E)$ tale che la serie S_n converge a S in $L^1(E)$.

Dimostrazione. Sia n in $\mathbb{N}$ e definiamo

$$M = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_E |f_k(x)|\,dx\right)\,, \qquad g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|\,.$$

Allora $\{g_n\}$ è una successione di funzioni non negative in $L^1(E)$ (come somma di funzioni in $L^1(E)$) e tale che

$$0 \le \int_E g_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_E |f_k(x)|\,dx\right) \le M\,.$$

Inoltre, per ogni x in E, $\{g_n(x)\}$ è una successione monotona a valori in $[0,+\infty]$. È pertanto ben definita la funzione

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)\,,$$

e si ha $g : E \to [0, +\infty]$; inoltre, g è non negativa e misurabile. Per il lemma di Fatou (o per il teorema di convergenza monotona),

$$0 \leq \int_E g(x)\, dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_E g_n(x)\, dx \leq M\,,$$

e quindi g appartiene a $L^1(E)$. Essendo in $L^1(E)$, g è finita quasi ovunque, ovvero $m(G_{+\infty}(g)) = 0$. Sia ora x in $E\backslash G_{+\infty}(g)$. Per tale x la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\,,$$

converge assolutamente, e quindi semplicemente. Possiamo allora definire, per x in $E\backslash G_{+\infty}(g)$,

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\,.$$

Se x appartiene a $G_{+\infty}(g)$, definiamo $S(x) = 0$. Così facendo, abbiamo $|S(x)| \leq g(x)$ q.o. (anzi, ovunque), e pertanto S appartiene a $L^1(E)$. Dimostriamo ora che la serie S_n converge in $L^1(E)$ a S. Innanzitutto, S_n converge quasi ovunque a S (non vi converge al più in $G_{+\infty}(g)$ che ha misura nulla). Inoltre, essendo anche $|S_n(x)| \leq g(x)$ (come si verifica facilmente),

$$|S_n(x) - S(x)| \leq 2\, g(x)\,,$$

con g in $L^1(E)$. Per il teorema di Lebesgue, l'integrale di $|S_n(x) - S(x)|$ tende a zero, e quindi $d_1(S_n, S)$ tende a zero. ∎

Osservazione 4.1.4 Un modo alternativo per concludere la dimostrazione precedente è il seguente:

$$\begin{aligned}
\int_E |S_n(x) - S(x)|\, dx &= \int_E \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| dx \\
&\leq \int_E \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)|\right) dx \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\int_E |f_k(x)|\, dx\right)
\end{aligned}$$

(applicando il teorema di convergenza monotona nell'ultimo passaggio), e l'ultimo termine è infinitesimo per ipotesi (è la serie resto di una serie convergente).

Lemma 4.1.5 *Sia (X,d) uno spazio metrico, e sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in (X,d). Se esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a x_0 in (X,d), allora tutta la successione x_n converge a x_0 in (X,d).*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$, e sia n_ε tale che $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon/2$ per ogni n e m maggiori di n_ε. Sia poi k_ε tale che $n_k \geq n_\varepsilon$ e $d(x_{n_k}, x_0) \leq \varepsilon/2$ per ogni $k \geq k_\varepsilon$. Allora, per ogni $n \geq n_\varepsilon$,

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_{k_\varepsilon}}) + d(x_{n_{k_\varepsilon}}, x_0) \leq \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ■

Teorema 4.1.6 *Lo spazio metrico $(L^1(E), d_1)$ è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $(L^1(E), d_1)$; ovvero, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$d_1(f_n, f_m) = \int_E |f_n(x) - f_m(x)|\,dx \leq \varepsilon\,, \qquad \forall n, m \geq n_\varepsilon\,.$$

Pertanto, per ogni k in $\mathbb{N}$, esiste n_k in $\mathbb{N}$ tale che

$$d_1(f_n, f_m) = \int_E |f_n(x) - f_m(x)|\,dx \leq \frac{1}{2^k}\,, \qquad \forall n, m \geq n_k\,.$$

Scegliamo gli n_k in modo tale che $n_{k+1} > n_k$, cosicché $\{f_{n_k}\}$ è una sottosuccessione estratta da $\{f_n\}$. Definiamo

$$g_1 = f_{n_1}\,, \qquad g_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\,,$$

in modo tale che si abbia

$$f_{n_k}(x) = \sum_{h=1}^{k} g_h(x)\,.$$

Allora

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{+\infty}\left(\int_E |g_h(x)|\,dx\right) &= \int_E |g_1(x)|\,dx + \sum_{h=2}^{+\infty}\left(\int_E |f_{n_h}(x) - f_{n_{h-1}}(x)|\,dx\right)\\ &\leq \int_E |g_1(x)|\,dx + \sum_{h=2}^{+\infty}\frac{1}{2^{h-1}}\\ &= \int_E |g_1(x)|\,dx + 1 < +\infty\,.\end{aligned}$$

Pertanto, la serie $S_k(x) = \sum_{h=1}^{k} g_h(x)$ converge totalmente in $L^1(E)$. Per il teorema precedente, esiste f in $L^1(E)$ tale che S_k converge a f. Essendo $S_k = f_{n_k}$, abbiamo estratto da f_n una sottosuccessione convergente in $L^1(E)$ ad f. La tesi segue allora dal Lemma 4.1.5. ■

Teorema 4.1.7 *Sia f una funzione in $L^1([a,b])$. Allora esiste una successione di funzioni f_n in $C^0([a,b],\mathbb{R})$ tale che f_n converge a f in $L^1([a,b])$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è in due passi.
Passo 1: Sia f in $L^1([a,b])$, f limitata.

Sia $\varepsilon > 0$ e sia f uno qualsiasi dei rappresentanti nella classe $[f]$; essendo f misurabile, applichiamo il Teorema 2.4.12: esiste C_ε contenuto in $[a,b]$, chiuso, tale che $m([a,b]\backslash C_\varepsilon) < \varepsilon$ e tale che la restrizione di f a C_ε è continua. Non è restrittivo supporre che a e b appartengano a C_ε; infatti, se a o b non sono in C_ε, è sempre possibile aggiungerveli definendo $f(a) = 0$ (o $f(b) = 0$), senza modificare né la misura, né la chiusura di C_ε, né la continuità della restrizione di f a C_ε (se a o b non sono in C_ε, allora nessuna successione a valori in C_ε può convergere ad a (o a b)). Sia $E_\varepsilon = [a,b]\backslash C_\varepsilon$; allora E_ε è aperto (nella topologia indotta su $[a,b]$ dalla topologia di $\mathbb{R}$). Pertanto, esiste una famiglia numerabile di intervalli aperti, a due a due disgiunti, tali che

$$E_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(a_n, b_n)\,.$$

Siccome gli intervalli sono a due a due disgiunti, i punti a_n e b_n non appartengono a E_ε, e sono quindi in C_ε, il che vuol dire che sono definiti sia $f(a_n)$ che $f(b_n)$. Definiamo allora la funzione g_ε nel seguente modo:

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \text{ in } C_\varepsilon,\\ \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}(x-a_n) + f(a_n) & \text{se } x \text{ in } (a_n,b_n) \subseteq E_\varepsilon.\end{cases}$$

In altre parole, stiamo definendo g_ε su (a_n, b_n) in maniera lineare. La funzione g_ε così ottenuta è continua su $[a, b]$. Infatti, g_ε è continua su C_ε, ed è continua (essendo lineare) in (a_n, b_n). Rimane da verificare che è continua nei punti a_n e b_n (per ogni n in $\mathbb{N}$). Se $\{x_k\}$ è una successione contenuta in C_ε e convergente ad a_n, allora $g_\varepsilon(x_k) = f(x_k)$ converge a $f(a_n)$ (perché f è continua su C_ε); se, invece, $\{x_k\}$ è una successione contenuta in E_ε e convergente a a_n, allora definitivamente x_k è in (a_n, b_n) e quindi (per definizione di g_ε su (a_n, b_n)), $g(x_k)$ converge a $f(a_n)$. Analogo ragionamento dimostra che g_ε è continua in b_n.

Dato $\varepsilon > 0$ abbiamo così definito una funzione g_ε continua su $[a, b]$ e tale che $m(\{x \in [a, b] : g_\varepsilon(x) \neq f(x)\}) < \varepsilon$. Inoltre, per costruzione, se M è tale che $|f(x)| \leq M$ in $[a, b]$, si ha $|g_\varepsilon(x)| \leq M$ in $[a, b]$ (su (a_n, b_n) la funzione $g_\varepsilon(x)$ è compresa tra $f(a_n)$ e $f(b_n)$).

Sia allora $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e sia $f_n = g_{1/n}$. La successione $\{f_n\}$ è formata da funzioni continue, e si ha, se M è tale che $|f(x)| \leq M$ in $[a, b]$,

$$\int_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\, dx = \int_{E_{\frac{1}{n}}} |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq 2M\, m(E_{\frac{1}{n}}) < \frac{2M}{n}\,,$$

da cui la tesi, al limite per n tendente ad infinito.

Passo 2: Sia f in $L^1([a, b])$.

Sia n in $\mathbb{N}$, e definiamo

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } f(x) > n, \\ f(x) & \text{se } -n \leq f(x) \leq n, \\ -n & \text{se } f(x) < -n. \end{cases}$$

Come si verifica facilmente, la successione $\{|f_n - f|\}$ converge quasi ovunque in $[a, b]$ a 0 (gli unici punti su cui non converge sono quelli per i quali $f(x) = \pm\infty$, che hanno misura nulla per il Teorema 3.2.25). Inoltre, essendo $|f_n(x)| \leq |f(x)|$, si ha $|f_n(x) - f(x)| \leq 2|f(x)|$, e $|f(x)|$ è sommabile. Per il teorema di Lebesgue,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0\,.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste pertanto n_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$\int_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon\,.$$

Per definizione, f_{n_ε} è limitata (da n_ε); per il Passo 1, esiste g_{n_ε} continua su $[a,b]$ e tale che

$$\int_{[a,b]} |g_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Si ha allora

$$\int_{[a,b]} |g_{n_\varepsilon}(x) - f(x)|\, dx \le \int_{[a,b]} |g_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x)|\, dx + \int_{[a,b]} |f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)|\, dx < \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ∎

Se definiamo $i : C^0([a,b],\mathbb{R}) \to L^1([a,b])$ come l'identità, e consideriamo nei due spazi la distanza d_1, come conseguenza dei due teoremi precedenti si ha che i è un'isometria, ed inoltre che la chiusura di $i(C^0([a,b],\mathbb{R}))$ è $L^1([a,b])$; per l'unicità del completamento, si ha che $(L^1([a,b]), d_1)$ è il completamento di $C^0([a,b],\mathbb{R}), d_1)$; in altre parole (andando a leggere la dimostrazione del teorema di completamento), se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni continue che è di Cauchy in d_1, allora f_n converge ad una funzione f in $L^1([a,b])$; viceversa, ogni funzione in $L^1([a,b])$ è il limite in d_1 di una successione (di Cauchy in d_1) di funzioni continue. Osserviamo che, sempre nella dimostrazione del teorema di completamento, lo spazio Y è definito come lo spazio delle successioni di Cauchy in d_1, modulo la relazione di equivalenza che identifica due successioni di Cauchy $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ nel caso in cui $d_1(f_n, g_n)$ tenda a zero. Sappiamo ora che se $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ sono due successioni di Cauchy in d_1 funzioni continue, allora f_n converge a f in d_1 e g_n converge a g in d_1 (con f e g in $L^1([a,b])$). È facile vedere che dall'ipotesi $d_1(f_n, g_n)$ tendente a zero segue

$$\int_{[a,b]} |f(x) - g(x)|\, dx = 0\,,$$

da cui $f = g$ quasi ovunque; pertanto, f e g sono nella stessa classe di equivalenza in $L^1([a,b])$. In altre parole, l'identificazione di due funzioni uguali quasi ovunque è fatta nello stesso spirito della dimostrazione del teorema di completamento, ed è quindi necessaria per ottenere uno spazio metrico completo.

4.2 $L^p(E)$ e $L^\infty(E)$

Sia $1 < p < +\infty$ un numero reale. Detta ρ la relazione di equivalenza introdotta nella sezione precedente, definiamo

$$L^p(E) = \frac{\left\{ f : E \to \overline{\mathbb{R}} \text{ misurabili: } \int_E |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\}}{\rho} .$$

Anche $L^p(E)$ può essere reso uno spazio metrico con la distanza

$$d_p(f,g) = \left(\int_E |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Come già per d_1, si vede che $d_p(f,g)$ non dipende dai rappresentanti scelti in $[f]$ e $[g]$, che $d_p(f,g) \geq 0$, che $d_p(f,g) = 0$ se e solo se $f = g$ q.o. (e quindi se e solo se $[f] = [g]$), e che $d_p(f,g) = d_p(g,f)$. La disuguaglianza triangolare segue dalla disuguaglianza di Hölder che, valida per funzioni continue, si dimostra allo stesso modo per funzioni in $L^p(E)$ (è sufficiente ricordare che una disuguaglianza verificata quasi ovunque si conserva integrando).

Come già $L^1(E)$, anche $L^p(E)$ è uno spazio completo: la dimostrazione è identica a quella del Teorema 4.1.6, usando il concetto di convergenza totale in $L^p(E)$ per una serie di funzioni, che in questo caso diventa

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_E |f_k(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty .$$

Se $E = [a,b]$, $L^p(E)$ è il completamento di $(C^0([a,b],\mathbb{R}), d_p)$ (anche in questo caso la dimostrazione è identica a quella del Teorema 4.1.7).

Leggermente differente è la definizione nel caso in cui $p = +\infty$.

Definizione 4.2.1 Sia f una funzione misurabile definita su un insieme misurabile E. Definiamo l'estremo superiore essenziale di $|f|$ come

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| &= \inf \{ M \geq 0 : m(\{x \in E : |f(x)| > M\}) = 0 \} \\ &= \inf \{ M \geq 0 : \ |f(x)| \leq M \text{ q.o. in } E \} . \end{aligned}$$

Ricordiamo che, per definizione, $\inf \emptyset = +\infty$. Dalla definizione discende direttamente il seguente fatto:

$$|f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| , \qquad \text{q.o. in } E.$$

Se, ad esempio, f è la funzione di Dirichlet, allora $\operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| = 0$ (dal momento che $f = 1$ sui razionali, che hanno misura nulla); se $f(x) = \frac{1}{x}$ su $(0,1)$, allora $\operatorname{ess\,sup}_{(0,1)} |f(x)| = +\infty$, dal momento che non esiste alcuna costante positiva M tale che $|f(x)| \leq M$ quasi ovunque. Se f è una funzione continua su $[a,b]$, si verifica facilmente che $\operatorname{ess\,sup}_{[a,b]} |f(x)| = \max_{[a,b]} |f(x)|$.

Definiamo allora

$$L^\infty(E) = \frac{\left\{f : E \to \overline{\mathbb{R}} \text{ misurabili: } \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| < +\infty\right\}}{\rho}.$$

Anche $L^\infty(E)$ si può rendere uno spazio metrico, introducendo

$$d_\infty(f,g) = \operatorname{ess\,sup}_E |f(x) - g(x)|.$$

Che d_∞ sia una distanza lo si vede facilmente: è ben definita, non negativa, nulla se e solo se $[f] = [g]$, ed è simmetrica. Per quanto riguarda la disuguaglianza triangolare, si ha, per quasi ogni x in E,

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \leq d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g),$$

da cui $d_\infty(f,g) \leq d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$.

Chiaramente, se $E = [a,b]$, $C^0([a,b],\mathbb{R}) \subset L^\infty([a,b])$, e l'immersione i è un'isometria (rispetto alle due distanze d_∞ su $C^0([a,b],\mathbb{R})$ e d_∞ su $L^\infty([a,b])$). Però, la chiusura di $i(C^0([a,b],\mathbb{R}))$ non è densa in $L^\infty([a,b])$, per il semplice fatto che $(C^0([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$ è **già** un sottospazio completo di $(L^\infty([a,b]), d_\infty)$ e quindi è chiuso. In altre parole, $(L^\infty([a,b]), d_\infty)$ non è il completamento di $(C^0([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$. Comunque, è uno spazio completo.

Teorema 4.2.2 *Lo spazio $(L^\infty(E), d_\infty)$ è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in $(L^\infty(E), d_\infty)$; ovvero, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$d(f_n, f_m) = \operatorname{ess\,sup}_E |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon, \qquad \forall n, m \geq n_\varepsilon.$$

Sia, per n e m in $\mathbb{N}$,

$$E_{n,m} = \{x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| > \operatorname{ess\,sup}_E |f_n(x) - f_m(x)|\}.$$

Per definizione di estremo superiore essenziale, $E_{n,m}$ ha misura nulla. Definiamo
$$E_0 = \bigcup_{n,m=1}^{+\infty} E_{n,m}\,,$$
cosicché $m(E_0) = 0$. Sia x in $E \backslash E_0$. Allora x non appartiene a nessuno degli $E_{n,m}$ e quindi, se n e m sono maggiori di n_ε,
$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \operatorname{ess\,sup}_E |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\,. \tag{2.1}$$
Pertanto, $\{f_n(x)\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$, e quindi converge ad un numero reale, che definiamo $f(x)$. In definitiva, se $\{f_n\}$ è di Cauchy in $(L^\infty(E), d_\infty)$, allora f_n converge quasi ovunque in E ad una funzione f. Se x è in $E \backslash E_0$, passando al limite per m tendente ad infinito nella disuguaglianza (2.1), si trova
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon\,,$$
e quindi, siccome E_0 ha misura nulla,
$$d_\infty(f_n, f) = \operatorname{ess\,sup}_E |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon\,.$$
Pertanto, f è in $L^\infty(E)$, perché
$$\operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup}_E |f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)| + \operatorname{ess\,sup}_E |f_{n_\varepsilon}(x)|\,,$$
e f_n converge ad f in $(L^\infty(E), d_\infty)$. ■

Se E ha misura finita, gli spazi $L^p(E)$ sono "inscatolati".

Teorema 4.2.3 *Sia E un insieme misurabile con $m(E) < +\infty$. Siano $1 \leq p < q \leq +\infty$. Allora*
$$L^q(E) \subset L^p(E)\,.$$

Dimostrazione. Sia f in $L^q(E)$. Se $q < +\infty$, ricordando la disuguaglianza di Hölder, si ha
$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|^p\,dx &= \int_E |f(x)|^p\,1\,dx \\
&\leq \left(\int_E |f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_E 1^{\frac{q}{q-p}}\,dx\right)^{\frac{q-p}{q}} \\
&= \left(\int_E |f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{p}{q}} [m(E)]^{\frac{q-p}{q}}\,.
\end{aligned}$$

Se $q = +\infty$, essendo $|f(x)|^p \leq \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)|^p$ quasi ovunque, si ha

$$\int_E |f(x)|^p \, dx \leq \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)|^p \, m(E) = [\operatorname{ess\,sup}_E |f(x)|]^p \, m(E) \, .$$

■

Osservazione 4.2.4 In genere, l'inclusione è stretta, nel senso che esistono funzioni in $L^p(E)$ che non appartengono a $L^q(E)$. Ad esempio, se $E = (0, 1/2)$, la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{p}} \, (-\ln(x))^2} \, ,$$

è in $L^p((0, 1/2))$, ma non appartiene a $L^q((0, 1/2))$ per ogni $q > p$, mentre la funzione $\ln(x)$ è in tutti gli $L^p((0, 1))$ ma non in $L^\infty((0, 1))$.

Osservazione 4.2.5 Sia E un insieme misurabile di misura finita, e sia f una funzione in $L^\infty(E)$; allora

$$\operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| = \lim_{p \to +\infty} \left(\int_E |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \, .$$

Infatti, per ogni $p > 1$ si ha

$$\left(\int_E |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| \, ,$$

e quindi

$$\limsup_{p \to +\infty} \left(\int_E |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)| \, .$$

D'altra parte, sia $\varepsilon > 0$ e sia $M = \operatorname{ess\,sup}_E |f(x)|$. Allora (per definizione di estremo superiore essenziale),

$$m(\{x \in E : |f(x)| \geq M - \varepsilon\}) > 0 \, .$$

Pertanto, per (2.25),

$$\int_E |f(x)|^p \, dx \geq (M - \varepsilon)^p \, m(\{x \in E : |f(x)| \geq M - \varepsilon\}) \, ,$$

da cui (ricordando che $\sqrt[p]{a}$ tende a 1 per ogni $a > 0$)

$$M - \varepsilon \le \liminf_{p\to+\infty} \left(\int_E |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

ovvero, essendo ε arbitrario,

$$\mathrm{ess\,sup}_E\,|f(x)| \le \liminf_{p\to+\infty} \left(\int_E |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

da cui il risultato.

4.3 Convergenza in $L^p(E)$

Sia $1 \le p < +\infty$, e sia $\{f_n\}$ una successione in $L^p(E)$ convergente a f in $L^p(E)$. Cosa possiamo dire della convergenza puntuale di f_n a f? Il seguente esempio mostra che f_n può convergere a zero in $L^p(E)$, senza che f_n converga puntualmente.

Esempio 4.3.1 Sia $E = [0,1)$; sia $n \in \mathbb{N}$, e scriviamo $n = 2^k + m$, con k in $\mathbb{N}$ e m tra 0 e $2^k - 1$ (si noti che tale scrittura è unica); ad esempio, $1 = 2^0 + 0$, $2 = 2^1 + 0$, $3 = 2^1 + 1$, $26 = 2^4 + 10$, eccetera. Definiamo

$$E_n = \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right).$$

Ad esempio, $E_1 = [0,1)$, $E_2 = [0, \frac{1}{2})$, $E_3 = [\frac{1}{2}, 1)$ e $E_{26} = [\frac{10}{16}, \frac{11}{16})$. Definiamo poi $f_n = \chi_{E_n}$. Essendo $m(E_n) = \frac{1}{2^k}$, con $k = [\log_2(n)]$ ($[\cdot]$ è la parte intera), si ha

$$\int_E |f_n(x)|^p\,dx = \int_{E_n} 1^p\,dx = m(E_n) = \frac{1}{2^{[\log_2(n)]}},$$

e quindi f_n tende a zero in $L^p(E)$, qualsiasi sia $p \ge 1$. D'altra parte, f_n non converge puntualmente a zero perché, per ogni x in $[0,1)$, non converge. Ad esempio, se $x = 0$, $f_n(x)$ vale 1 quando $n = 2^k$ per qualche $k \ge 0$ intero, mentre vale 0 per tutti gli altri n. Esiste allora una sottosuccessione ($n = 2^k$) lungo la quale $f_n(0)$ tende a 1, ed una sottosuccessione ($n \ne 2^k$) lungo la quale $f_n(0)$ tende a zero; pertanto $f_n(0)$ non ammette limite.

Si noti però che f_n converge a zero in misura (dato che $m(\{x \in [0,1] : |f_n(x)| \geq \lambda\}) = m(E_n)$ se $0 < \lambda \leq 1$), e la sottosuccessione f_{2^k} converge a zero quasi ovunque (tende a zero ovunque tranne per $x = 0$, dove tende a 1).

Il precedente esempio giustifica il seguente teorema.

Teorema 4.3.2 *Sia $1 \leq p < +\infty$, e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni tendente a f in $L^p(E)$. Allora f_n converge ad f in misura, ed esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ tale che f_n converge a f quasi ovunque.*

Dimostrazione. Se f_n converge a f in $L^p(E)$ si ha, per definizione,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|^p \, dx = 0 \, .$$

Ricordando (2.25), se $\lambda > 0$ si ha

$$0 \leq m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda^p} \int_E |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \, ,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} m(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \lambda\}) = 0 \, ,$$

ovvero, f_n converge a f in misura. La tesi segue allora dal Teorema 3.2.32.

■

Dal momento che la successione dell'Esempio 4.3.1 non tende a zero in $L^\infty(E)$ (ed infatti, l'estremo superiore essenziale di f_n è 1 per ogni n in $\mathbb{N}$), nel caso $p = +\infty$, il risultato è più forte.

Teorema 4.3.3 *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni di $L^\infty(E)$. Allora f_n converge a f in $L^\infty(E)$ se e solo se esiste un insieme E_0 di misura nulla tale che f_n converge uniformemente a f in $E \backslash E_0$.*

Dimostrazione. Se f_n converge uniformemente ad f su $E \backslash E_0$, con $m(E_0) = 0$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$\sup_{E \backslash E_0} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \, , \qquad \forall n \geq n_\varepsilon \, .$$

Pertanto, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ su $E \setminus E_0$, ovvero $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ q.o. in E. Pertanto (per definizione di estremo superiore essenziale),

$$\operatorname{ess\,sup}_E |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon\,,$$

e quindi f_n converge ad f in $L^\infty(E)$.

Viceversa, supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista n_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$\operatorname{ess\,sup}_E |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon\,.$$

Pertanto, per ogni $n \geq n_\varepsilon$ esiste un insieme E_n contenuto in E, con $m(E_n) = 0$, tale che

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,, \qquad \forall x \in E \setminus E_n\,.$$

Sia allora E_0 l'unione degli E_n per $n \geq n_\varepsilon$. Ovviamente $m(E_0) = 0$, e si ha

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,, \qquad \forall x \in E \setminus E_0\,,\ \forall n \geq n_\varepsilon\,,$$

ovvero,

$$\sup_{E \setminus E_0} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,, \qquad \forall n \geq n_\varepsilon\,,$$

e quindi la tesi. ■

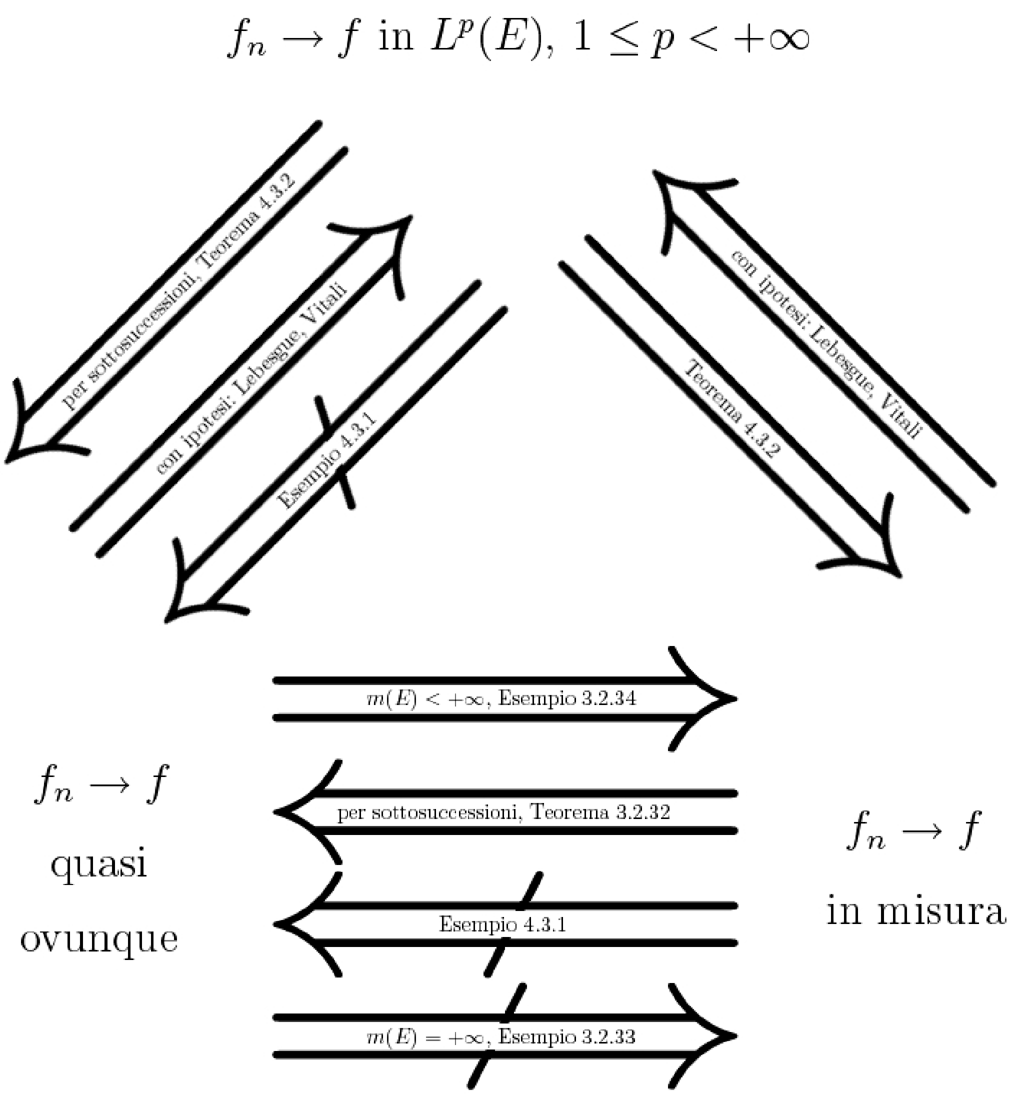
Come conseguenza del teorema precedente, se f_n converge ad f in $L^\infty(E)$, allora f_n converge ad f quasi ovunque.

Infine, se E ha misura finita (e quindi gli spazi $L^p(E)$ sono "inscatolati"), se f_n converge ad f in $L^p(E)$, allora f_n converge ad f in $L^q(E)$ per ogni $q < p$. Infatti, per la disuguaglianza di Hölder, e se $p < +\infty$,

$$\int_E |f_n(x) - f(x)|^q\,dx \leq m(E)^{1-\frac{q}{p}} \left(\int_E |f_n(x) - f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{q}{p}}\,.$$

Se $p = +\infty$,

$$\int_E |f_n(x) - f(x)|^q\,dx \leq m(E)\ \left(\operatorname{ess\,sup}_E |f_n(x) - f(x)|\right)^q\,.$$



Schema riassuntivo dei legami tra convergenza in L^p, in misura e q.o..

4.4 Separabilità

Uno spazio metrico (X, d) si dice **separabile** se esiste un insieme $\mathcal{E}$ contenuto in X numerabile e denso. Un esempio di spazio metrico separabile è $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, dato che $\mathcal{E} = \mathbb{Q}$ è denso e numerabile. Un altro esempio di spazio separabile è $(C^0([a,b],\mathbb{R}),d_\infty)$, dal momento che l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è denso (questo è il Teorema — non proprio di dimostrazione immediata! — di Stone-Weierstrass) e numerabile (dimostrarlo per esercizio).

Se $1 \le p < +\infty$, lo spazio $L^p(E)$ è separabile.

Teorema 4.4.1 *Sia* $1 \le p < +\infty$*. Lo spazio* $L^p(\mathbb{R})$ *è separabile.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{E}$ l'insieme delle funzioni a gradino della forma

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} q_i\,\chi_{[a_i,b_i)}(x)\,, \tag{4.1}$$

con q_i, a_i e b_i razionali, e l'unione degli intervalli (disgiunti) $[a_i,b_i)$ contenuta in $[-n,n]$ per qualche n in $\mathbb{N}$. Vogliamo dimostrare che $\mathcal{E}$ è denso in $L^p(\mathbb{R})$. Si noti che $\mathcal{E}$ è numerabile; infatti $\mathcal{E}$ si può scrivere come l'unione disgiunta delle funzioni a gradino della forma (4.1) che hanno supporto contenuto in $[-n,n]$ ma non in $[-n+1,n-1]$, e ognuno di tali insiemi è numerabile (una funzione a gradino della forma (4.1) viene assegnata dando un numero naturale N e $3N$ numeri razionali).

Sia f in $L^p(\mathbb{R})$ e sia $\varepsilon > 0$. Allora (per definizione)

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p < +\infty\,.$$

Sia n in $\mathbb{N}$ e definiamo $f_n(x) = f(x)\,\chi_{[-n,n]}(x)$. Allora $f_n(x)$ è in $L^p(\mathbb{R})$ (dal momento che $|f_n| \le |f|$) e f_n converge quasi ovunque in $\mathbb{R}$ a $f(x)$. Essendo $|f_n(x) - f(x)|^p \le 2^p\,|f(x)|^p$, per il Teorema di Lebesgue si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|^p\,dx = 0\,.$$

Pertanto, esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}} |f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)|^p\,dx \le \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{4.2}$$

La funzione f_{n_ε} è in $L^p(\mathbb{R})$ ed è nulla fuori da $[-n_\varepsilon,n_\varepsilon]$. Siccome, per il Teorema 4.1.7, $C^0([-n_\varepsilon,n_\varepsilon],\mathbb{R})$ è denso in $L^p([-n_\varepsilon,n_\varepsilon])$, esiste g_ε, continua su $[-n_\varepsilon,n_\varepsilon]$ tale che

$$\int_{[-n_\varepsilon,n_\varepsilon]} |g_\varepsilon(x) - f_{n_\varepsilon}(x)|^p\,dx \le \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{4.3}$$

La funzione g_ε, essendo continua sul compatto $[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]$, è uniformemente continua. Pertanto, fissato $\rho > 0$, esiste $\delta_\rho > 0$ tale che $|x - y| \leq \delta_\rho$ implica $|g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(y)| \leq \rho$. Sia $\rho > 0$ tale che $2\, n_\varepsilon\, \rho^p < \frac{\varepsilon}{3}$, sia k intero tale che $\frac{2n_\varepsilon}{k} < \delta_\rho$ e decomponiamo $[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]$ in k intervalli di ampiezza $\frac{2n_\varepsilon}{k}$. In questo modo, gli estremi x_h degli intervalli sono tutti numeri razionali. Definiamo poi

$$M_h = \max_{[x_h, x_{h+1}]} g_\varepsilon(x) \,, \qquad m_h = \min_{[x_h, x_{h+1}]} g_\varepsilon(x) \,.$$

Dal momento che $x_{h+1} - x_h = \frac{2n_\varepsilon}{k} < \delta_\rho$, si ha che $M_h - m_h \leq \rho$. Sia poi q_h un numero razionale tale che $0 \leq M_h - q_h \leq \rho$, e sia

$$\varphi_\varepsilon(x) = \sum_{h=0}^{k-1} q_h\, \chi_{[x_h, x_{h+1})}(x) \,.$$

Evidentemente, φ_ε appartiene ad $\mathcal{E}$. Si ha poi, essendo $|\varphi_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \rho$ su $[x_h, x_{h+1})$,

$$\int_{[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]} |\varphi_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)|^p \, dx = \sum_{h=0}^{k-1} \int_{[x_h, x_{h+1})} |q_h - g_\varepsilon(x)|^p \, dx \leq 2\, n_\varepsilon\, \rho^p \,,$$

e pertanto

$$\int_{[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]} |\varphi_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)|^p \, dx \leq \frac{\varepsilon}{3} \,. \tag{4.4}$$

Mettendo insieme (4.2), (4.3) e (4.4), e ricordando che φ_ε è nulla fuori da $[-n_\varepsilon, n_\varepsilon]$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_\varepsilon(x) - f(x)|^p \, dx \leq \varepsilon \,,$$

e quindi $\mathcal{E}$ è denso in $L^p(\mathbb{R})$. ∎

Teorema 4.4.2 *Sia* $1 \leq p < +\infty$ *e sia* E *un insieme misurabile. Allora* $L^p(E)$ *è separabile.*

Dimostrazione. Se f è in $L^p(E)$, la funzione $\overline{f}$ definita su $\mathbb{R}$ come f in E e zero su $E^{\rm c}$ appartiene a $L^p(\mathbb{R})$. Per il teorema precedente, esiste una funzione a gradino in $\mathcal{E}$ tale che $d_p(\overline{f}, \varphi) \leq \varepsilon$. Ma allora $\varphi\, \chi_E$ (che appartiene all'insieme numerabile ottenuto prendendo le restrizioni a E delle funzioni a gradino di $\mathcal{E}$) è tale che $d_p(f, \varphi\, \chi_E) \leq \varepsilon$, e quindi si ha la tesi. ■

Lo spazio $L^\infty(E)$, invece, non è separabile. Supponiamo per assurdo che lo sia, ovvero supponiamo che esista un insieme numerabile $\mathcal{E} = \{f_n\}$, denso in $L^\infty(E)$. Sia $\{E_n\}$ una partizione numerabile di E in insiemi misurabili, e definiamo φ nel modo seguente. Sia x in E; allora x appartiene ad uno, ed uno solo, degli E_n; sia $E_{n(x)}$ tale insieme. Se $f_{n(x)}(x) > 0$, definiamo $\varphi(x) = -1$; se $f_{n(x)}(x) \leq 0$, definiamo $\varphi(x) = 1$. In altre parole,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\chi_{\{y \in E_n : f_n(y) \leq 0\}}(x) - \chi_{\{y \in E_n : f_n(y) > 0\}}(x)\right] .$$

La funzione φ è misurabile (perché lo sono gli insiemi $\{y \in E_n : f_n(y) \leq 0\}$ e $\{y \in E_n : f_n(y) > 0\}$) ed è limitata (in modulo vale sempre 1 essendo gli E_n disgiunti). Pertanto, φ appartiene a $L^\infty(E)$. Si ha però

$$d_\infty(f_n, \varphi) = \operatorname{ess\,sup}_E |f_n(x) - \varphi(x)| \geq \operatorname{ess\,sup}_{E_n} |f_n(x) - \varphi(x)| \geq 1\,,$$

e quindi $\mathcal{E}$ non può essere denso in $L^\infty(E)$.

4.5 $L^2(E)$

Lo spazio $L^2(E)$ è differente da tutti gli altri spazi L^p perché è possibile definire su di esso un prodotto scalare. Se f e g sono in $L^2(E)$, definiamo

$$(f\,|\,g) = \int_E f(x)\, g(x)\, dx\,.$$

Si verifica facilmente che $(f\,|\,g)$ è lineare in entrambi gli argomenti, che è simmetrico, che $(f\,|\,f)$ è non negativo e nullo se e solo se $f = 0$ (inteso come classe in $L^2(E)$, ovvero $f = 0$ q.o.) e che, per ogni f e g in $L^2(E)$ si ha

$$|\,(f\,|\,g)\,| \leq \sqrt{(f\,|\,f)}\,\sqrt{(g\,|\,g)}\,;$$

questa disuguaglianza segue infatti dalla disuguaglianza di Hölder con $p = q = 2$. Pertanto, $L^2(E)$ è uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare.

Dal momento che ogni prodotto scalare su uno spazio vettoriale induce una distanza secondo la formula $d(x,y) = \sqrt{(x-y\,|\,x-y)}$, la distanza indotta su $L^2(E)$ dal prodotto scalare appena definito è proprio d_2:

$$d_2(f,g) = \left(\int_E |f(x)-g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(f-g\,|\,f-g)}\,.$$

Essendo $(L^2(E), d_2)$ uno spazio metrico completo (come tutti gli $L^p(E)$), lo spazio vettoriale $L^2(E)$, dotato del prodotto scalare $(\cdot\,|\,\cdot)$ (che induce una distanza rispetto alla quale lo spazio metrico è completo) si dice **spazio di Hilbert**.

4.5.1 Gli spazi di Hilbert

Come detto sopra, uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare che risulti completo come spazio metrico (con la distanza indotta dal prodotto scalare). Come ogni spazio vettoriale, anche uno spazio di Hilbert ha una base. Nel caso particolare in cui lo spazio di Hilbert sia separabile (come spazio metrico), la base è numerabile, e si può scegliere in maniera "semplice".

Teorema 4.5.1 *Sia $(H, (\cdot\,|\,\cdot))$ uno spazio di Hilbert separabile. Allora esiste una successione $\{e_n\}$ di vettori di H tale che:*

i) $(e_n\,|\,e_m) = \delta_{n,m}$ (dove $\delta_{n,m}$ è il simbolo di Kronecker);

ii) per ogni vettore x di H, detto

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (x\,|\,e_k)\; e_k\,,$$

si ha che $S_n(x)$ converge a x in (H,d).

In altre parole, il teorema precedente afferma che in uno spazio di Hilbert separabile esiste una base numerabile fatta di vettori ortonormali. Tale base si dice **sistema ortonormale completo** in H. Ci soffermiamo ora su due conseguenze del teorema precedente.

Teorema 4.5.2 (Bessel, Parseval) *Sia $\{e_n\}$ una successione di vettori di uno spazio di Hilbert $(H, (\cdot\,|\,\cdot))$ tale che $(e_n\,|\,e_m) = \delta_{n,m}$. Allora, per ogni x in H, si ha la* **disuguaglianza di Bessel***:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} [(x\,|\,e_k)]^2 \leq (x\,|\,x)\ . \tag{5.1}$$

*Se, in più, la successione $\{e_n\}$ soddisfa la ii) del teorema precedente, allora, si ha l'***identità di Parseval***:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} [(x\,|\,e_k)]^2 = (x\,|\,x)\ . \tag{5.2}$$

Dimostrazione. Sia

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (x\,|\,e_k)\ e_k\ ,$$

e calcoliamo $(S_n(x) - x\,|\,S_n(x) - x)$. Essendo il prodotto scalare bilineare e simmetrico, si ha

$$(S_n(x) - x\,|\,S_n(x) - x) = (S_n(x)\,|\,S_n(x)) - 2\,(S_n(x)\,|\,x) + (x\,|\,x)\ .$$

Si ha poi

$$(S_n(x)\,|\,x) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x\,|\,e_k)\ e_k \,\middle|\, x\right) = \sum_{k=1}^{n} (x\,|\,e_k)\ (x\,|\,e_k) = \sum_{k=1}^{n} [(x\,|\,e_k)]^2\,.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}(S_n(x)\,|\,S_n(x)) &= \left(\sum_{k=1}^{n} (x\,|\,e_k)\ e_k \,\middle|\, \sum_{h=1}^{n} (x\,|\,e_h)\ e_h\right)\\ &= \sum_{h,k=1}^{n} (x\,|\,e_k)\ (x\,|\,e_h)\ (e_k\,|\,e_h) = \sum_{k=1}^{n} [(x\,|\,e_k)]^2\,.\end{aligned}$$

Pertanto,

$$(S_n(x) - x\,|\,S_n(x) - x) = (x\,|\,x) - \sum_{k=1}^{n} [(x\,|\,e_k)]^2\,. \tag{5.3}$$

Essendo $(S_n(x) - x \,|\, S_n(x) - x) \geq 0$, se ne deduce

$$\sum_{k=1}^{n} [(x \,|\, e_k)]^2 \leq (x \,|\, x) \ , \qquad \forall n \in \mathbb{N} \, ,$$

e quindi la (5.1) per n tendente ad infinito. Se, poi, $\{e_n\}$ è un sistema ortonormale completo in H, allora $(S_n(x) - x \,|\, S_n(x) - x)$ tende a zero per n tendente ad infinito, e dalla (5.3) segue la (5.2). ■

Esempio 4.5.3 Sia $H = L^2((0,1))$ e sia, per k in $\mathbb{N}$,

$$e_k = 2^{\frac{k}{2}} \, \chi_{\left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]} \, .$$

Essendo $e_k(x)\, e_h(x) = 0$ per ogni $k \neq h$, si ha $(e_k \,|\, e_h) = 0$; inoltre,

$$\int_{(0,1)} e_k^2(x)\, dx = 2^k \int_{\left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]} dx = 1 \, ,$$

e quindi $\{e_k\}$ è un sistema ortonormale in H. Il sistema non è, però, completo. Sia infatti $f(x) = x$. Allora

$$c_k(f) = \int_{(0,1)} f(x)\, e_k(x)\, dx = 2^{\frac{k}{2}} \int_{\left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]} x\, dx = \frac{3}{2}\, \frac{1}{2^{\frac{3k}{2}}} \, ,$$

e si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2(f) = \frac{9}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{8^k} = \frac{9}{28} < \frac{1}{2} = (f \,|\, f) \ .$$

Dal momento che non vale l'identità di Parseval, il sistema ortonormale non può essere completo. Alternativamente, detta

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(f)\, e_k(x) = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \, \chi_{\left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]}(x) \, ,$$

si vede facilmente che $g \neq f$ (ad esempio, su $[1/2, 1]$, g vale identicamente $3/4$).

Definizione 4.5.4 Sia $(H, (\cdot \,|\, \cdot))$ uno spazio di Hilbert separabile, e sia $\{e_n\}$ un sistema ortonormale completo in H. Sia x in H e sia $c_k(x) = (x \,|\, e_k)$ per ogni k in $\mathbb{N}$. La successione $\{c_k(x)\}$ si dice **successione dei coefficienti di Fourier** di x.

Dal momento che si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2(x) = (x\,|\,x) < +\infty\,,$$

ne segue che se x è in H, allora la successione dei suoi coefficienti di Fourier è in ℓ^2. In questa maniera, possiamo definire un'applicazione $\mathcal{F} : H \to \ell^2$, che ad ogni x di H associa la successione $\{c_k(x)\}$ dei suoi coefficienti di Fourier.

Teorema 4.5.5 *Sia $(H, (\cdot\,|\,\cdot))$ uno spazio di Hilbert separabile, e sia $\{e_n\}$ un sistema ortonormale completo in H. Sia $\mathcal{F} : H \to \ell^2$ l'applicazione che ad ogni x di H associa la successione $\{c_k(x)\}$ dei coefficienti di Fourier di x. Allora $\mathcal{F}$ è un'isometria biunivoca tra (H, d) e (ℓ^2, d_2).*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $\mathcal{F}$ è iniettiva, suriettiva, e che, per ogni x e y in H

$$d_2(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) = d(x, y) = \sqrt{(x - y\,|\,x - y)}\,. \tag{5.4}$$

Iniziamo con l'osservare che $\mathcal{F}$ è lineare (dal momento che lo è il prodotto scalare); pertanto l'iniettività è equivalente a dimostrare che $\mathcal{F}(x) = \{0\}$ se e solo se $x = 0$. Ovviamente, $\mathcal{F}(0) = \{0\}$. Viceversa, supponiamo che $\mathcal{F}(x) = \{0\}$, e quindi che $(x\,|\,e_k) = 0$ per ogni k in $\mathbb{N}$. Dall'identità di Parseval segue allora

$$(x\,|\,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2(x) = 0\,,$$

e quindi $x = 0$. Sia ora $\{c_k\}$ in ℓ^2. Definiamo

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e_k\,,$$

ed osserviamo che x_n è una successione di Cauchy in (H, d). Infatti,

$$d(x_n, x_m) = \sqrt{(x_n - x_m\,|\,x_n - x_m)} = \left(\sum_{k=n+1}^{m} c_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\,,$$

e l'ultima quantità può essere resa arbitrariamente piccola scegliendo n e m grandi, dal momento che $\{c_k\}$ è in ℓ^2. Essendo (H,d) completo, x_n converge a x in H e si ha (per definizione di convergenza di una serie),

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k\, e_k\,.$$

Inoltre, essendo $(\cdot\,|\,e_k)$ una funzione continua (come si verifica facilmente), ed essendo $(x\,|\,e_k) = (x_n\,|\,e_k)$ per ogni $n \geq k$,

$$c_k(x) = (x\,|\,e_k) = \lim_{n\to+\infty} (x_n\,|\,e_k) = \lim_{n\to+\infty} c_k = c_k\,.$$

Pertanto, $\mathcal{F}(x) = \{c_k\}$ e quindi $\mathcal{F}$ è suriettiva. Rimane da dimostrare la (5.4). Osservando che $c_k(x) - c_k(y) = c_k(x-y)$, la (5.4) segue direttamente dall'identità di Parseval e dalla definizione di d_2 in ℓ^2. ∎

In definitiva, abbiamo dimostrato che ogni spazio di Hilbert separabile è isometrico (tramite $\mathcal{F}$) a ℓ^2, ovvero che per studiare uno spazio di Hilbert separabile è sufficiente studiare ℓ^2 (e conoscere un sistema ortonormale completo in H).

4.5.2 $L^2([-\pi,\pi])$ e serie di Fourier

Consideriamo l'insieme (numerabile) di funzioni in $L^2([-\pi,\pi])$

$$\mathcal{T} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx)\,,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx)\,,\ k\in\mathbb{N} \right\}.$$

Si vede facilmente che se e_h e e_k sono due funzioni di $\mathcal{T}$, allora si ha $(e_h\,|\,e_k) = \delta_{h,k}$. Pertanto, $\mathcal{T}$ è un insieme ortonormale di funzioni. Essendo $L^2([-\pi,\pi])$ separabile, per il Teorema 4.5.1, esiste un sistema ortonormale completo in $L^2([-\pi,\pi])$. Vogliamo dimostrare che $\mathcal{T}$ è un sistema ortonormale completo, ovvero che, se f è in $L^2([-\pi,\pi])$, detti per $k\geq 1$,

$$a_k(f) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_E f(x)\,\cos(kx)\,dx\,, \qquad b_k(f) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_E f(x)\,\mathrm{sen}(kx)\,dx\,,$$

e

$$a_0(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_E f(x)\,dx\,,$$

si ha che

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k(f)\, \cos(kx) + b_k(f) \operatorname{sen}(kx)]\,,$$

nel senso che la serie converge in $L^2([-\pi,\pi])$. Si noti che i coefficienti di Fourier di una f di $L^2([-\pi,\pi])$ non dipendono dalla scelta di f nella sua classe di equivalenza quasi ovunque.

Sia allora f in $L^2([-\pi,\pi])$, e sia $\{a_0(f), a_k(f), b_k(f)\}$ la successione dei suoi coefficienti di Fourier. Dal momento che $\mathcal{T}$ è un sistema ortonormale di vettori, per il punto i) del Teorema 4.5.1 (ovvero per la disuguaglianza di Bessel), si ha

$$a_0^2(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k^2(f) + b_k^2(f)] \le \int_{[-\pi,\pi]} f^2(x)\, dx\,.$$

Pertanto, le due successioni $\{a_k(f)\}$ e $\{b_k(f)\}$ sono in ℓ^2, e quindi sia $a_k(f)$ che $b_k(f)$ tendono a zero quando k tende ad infinito. Questo risultato è noto come Lemma di Riemann-Lebesgue.

Teorema 4.5.6 (Riemann-Lebesgue) *Sia f una funzione in $L^2([-\pi,\pi])$. Allora*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{[-\pi,\pi]} f(x)\, \cos(kx)\, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{[-\pi,\pi]} f(x) \operatorname{sen}(kx)\, dx = 0\,.$$

Sia f in $L^2([-\pi,\pi])$, sia n in $\mathbb{N}$, e definiamo

$$S_n(f) = \frac{a_0(f)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} [a_k(f)\, \cos(kx) + b_k(f) \operatorname{sen}(kx)]\,.$$

La completezza di $\mathcal{T}$ è equivalente a dimostrare che $S_n(f)$ converge ad f in $L^2([-\pi,\pi])$.

Teorema 4.5.7 *Siano $-\pi < a < b < \pi$, e sia $f(x) = \chi_{(a,b)}(x)$. Allora $S_n(f)$ converge quasi ovunque a f.*

Dimostrazione. Sia n in $\mathbb{N}$ e definiamo

$$T_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\,.$$

È facile verificare per induzione che, per ogni $x \neq 0$,

$$T_n(x) = \frac{\mathrm{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}\,.$$

Se $x = 0$, è sufficiente definire $T_n(0) = n + \frac{1}{2}$ per ottenere che $T_n(x)$ è una funzione continua su $[-\pi, \pi]$. Si ha poi, ricordando la definizione di $a_0(f)$, $a_k(f)$ e $b_k(f)$,

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) &= \frac{a_0(f)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} [a_k(f)\,\cos(kx) + b_k(f)\,\mathrm{sen}(kx)] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(y)\,\frac{1}{2}\,dy \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{[-\pi,\pi]} f(y)\,[\cos(ky)\,\cos(kx) + \mathrm{sen}(ky)\,\mathrm{sen}(kx)]\,dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k(y-x))\right] dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(y)\,T_n(y-x)\,dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi-x,\pi-x]} f(x+y)\,T_n(y)\,dy\,.
\end{aligned}$$

A questo punto, consideriamo $\tilde{f}$ la prolungata per periodicità di f (definita solo su $[-\pi, \pi]$). Pertanto, $\tilde{f}$ è periodica di periodo 2π, così come lo è (per definizione) T_n, cosicché (essendo ovviamente $S_n(f)(x) = S_n(\tilde{f})(x)$ per ogni x in $[-\pi, \pi]$),

$$S_n(\tilde{f})(x) = \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi-x,\pi-x]} \tilde{f}(x+y)\,T_n(y)\,dy = \frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \tilde{f}(x+y)\,T_n(y)\,dy\,.$$

D'altra parte, essendo (come si verifica facilmente)

$$\frac{1}{\pi} \int_{[-\pi,\pi]} T_n(y)\,dy = 1\,,$$

possiamo scrivere, per x in $[-\pi,\pi]$,

$$\begin{aligned} S_n(f)(x)-f(x) &= S_n(\tilde f)(x)-\tilde f(x) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} [\tilde f(x+y)-\tilde f(x)]\, T_n(y)\,dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} \frac{\tilde f(x+y)-\tilde f(x)}{2\text{sen}\left(\frac{y}{2}\right)}\,\text{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)\,dy \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} \frac{[\tilde f(x+y)-\tilde f(x)]\,\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{y}{2}\right)}\,\text{sen}(ny)\,dy \\ &\quad +\frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} [\tilde f(x+y)-\tilde f(x)]\,\cos(ny)\,dy\,. \end{aligned}$$

Sia ora x in (a,b). Allora $\tilde f(x+y)-\tilde f(x)=\tilde f(x+y)-1=0$ per ogni y in $(a-x,b-x)$. Pertanto,

$$g(y)=\frac{[\tilde f(x+y)-\tilde f(x)]\,\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{y}{2}\right)}=\begin{cases} 0 & \text{se } y\in(a-x,b-x), \\ -\frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{y}{2}\right)} & \text{altrove in } [-\pi,\pi]. \end{cases}$$

Dal momento che $\text{sen}\left(\frac{y}{2}\right)$ si annulla (in $[-\pi,\pi]$) solo nell'origine, e che 0 appartiene a $(a-x,b-x)$ (essendo x in (a,b)), si ha che g è una funzione limitata su $[-\pi,\pi]$. Essendo anche misurabile, è in $L^\infty([-\pi,\pi])$ e quindi (dato che $m([-\pi,\pi])=2\pi<+\infty$) anche in $L^2([-\pi,\pi])$. Si ha allora, per il lemma di Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[-\pi,\pi]} g(y)\,\text{sen}(ny)\,dy=0\,.$$

Con ragionamento analogo (osservando che, per ogni x, $y\mapsto\tilde f(x+y)-\tilde f(x)$ è in $L^\infty([-\pi,\pi])$), si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[-\pi,\pi]} [\tilde f(x+y)-\tilde f(x)]\,\cos(ny)\,dy=0\,.$$

Pertanto, se x è in (a,b), si ha

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x)=f(x)\,.$$

In maniera identica si prova che se x non appartiene a $[a,b]$, allora $S_n(f)(x)$ tende a $f(x)$ (ovvero a zero). Pertanto, $S_n(f)(x)$ tende a $f(x)$ per ogni x diverso da a, b, e quindi quasi ovunque. ∎

Osservazione 4.5.8 Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(a) = \lim_{n\to+\infty} S_n(f)(b) = \frac{1}{2}\,.$$

Teorema 4.5.9 *Siano $-\pi < a < b < \pi$, e sia $f(x) = \chi_{(a,b)}(x)$. Allora $S_n(f)$ converge in $L^2([-\pi,\pi])$ ad f.*

Dimostrazione. Dal momento che $S_n(f)$ tende a f quasi ovunque, $S_n^2(f)$ tende a f^2 quasi ovunque. Per il lemma di Fatou, si ha allora

$$\int_{[-\pi,\pi]} f^2(x)\,dx \le \liminf_{n\to+\infty} \int_{[-\pi,\pi]} S_n^2(f)(x)\,dx\,.$$

Essendo

$$\int_{[-\pi,\pi]} S_n^2(f)(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(a_0^2(f) + \sum_{k=1}^{n} [a_k^2(f) + b_k^2(f)]\right),$$

dalla disuguaglianza di Bessel segue

$$\int_{[-\pi,\pi]} S_n^2(f)(x)\,dx \le \frac{1}{\pi}\left(a_0^2(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k^2(f) + b_k^2(f)]\right) \le \int_{[-\pi,\pi]} f^2(x)\,dx\,,$$

per ogni n in $\mathbb{N}$, e quindi

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{[-\pi,\pi]} S_n^2(f)(x)\,dx \le \int_{[-\pi,\pi]} f^2(x)\,dx\,.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[-\pi,\pi]} S_n^2(f)(x)\,dx = \int_{[-\pi,\pi]} f^2(x)\,dx\,,$$

e quindi, dal momento che, per la (5.3),

$$\int_{[-\pi,\pi]} |S_n(f)(x) - f(x)|^2\,dx = \int_{[-\pi,\pi]} f^2(x)\,dx - \int_{[-\pi,\pi]} S_n^2(f)(x)\,dx\,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[-\pi,\pi]} |S_n(f)(x) - f(x)|^2\,dx = 0\,,$$

ovvero la tesi. ■

Teorema 4.5.10 *Siano f e g in $L^2([-\pi,\pi])$; allora, per ogni n in $\mathbb{N}$,*

$$\int_{[-\pi,\pi]} |S_n(f)(x) - S_n(g)(x)|^2\,dx \le \int_{[-\pi,\pi]} |f(x) - g(x)|^2\,dx\,.$$

Dimostrazione. Essendo $S_n(f) - S_n(g) = S_n(f-g)$, è sufficiente dimostrare che, per ogni n in $\mathbb{N}$, e per ogni h in $L^2([-\pi,\pi])$,

$$\int_{[-\pi,\pi]} |S_n(h)(x)|^2\,dx \le \int_{[-\pi,\pi]} |h(x)|^2\,dx\,.$$

Ma questa è esattamente la disuguaglianza di Bessel. ■

Teorema 4.5.11 *$\mathcal{T}$ è un sistema ortonormale completo in $L^2([-\pi,\pi])$.*

Dimostrazione. Dal Teorema 4.5.9, e dalla linearità dell'applicazione S_n segue che, se

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} q_i\,\chi_{(a_i,b_i)}(x)\,, \tag{5.5}$$

allora $S_n(\varphi)$ converge a φ in $L^2([-\pi,\pi])$. L'insieme delle funzioni semplici φ della forma appena scritta è però denso in $L^2([-\pi,\pi])$ (lo è se si prendono q_i, a_i e b_i razionali per il Teorema 4.4.1, e lo è dunque a maggior ragione se q_i, a_i e b_i sono numeri reali). Se f è in $L^2([-\pi,\pi])$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste φ_ε funzione semplice come in (5.5) tale che

$$d_2(f,\varphi_\varepsilon) = \left(\int_{[-\pi,\pi]} |f(x) - \varphi_\varepsilon(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

D'altra parte, per il Teorema 4.5.10, per ogni n in $\mathbb{N}$ si ha

$$d_2(S_n(f),S_n(\varphi_\varepsilon)) = \left(\int_{[-\pi,\pi]} |S_n(f)(x) - S_n(\varphi_\varepsilon)(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Infine, esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$d_2(\varphi_\varepsilon,S_n(\varphi_\varepsilon)) = \left(\int_{[-\pi,\pi]} |\varphi_\varepsilon(x) - S_n(\varphi_\varepsilon)(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{\varepsilon}{3}\,, \qquad \forall n \ge n_\varepsilon\,.$$

Pertanto, per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si ha, per la disguguaglianza triangolare,

$$d_2(f, S_n(f)) \leq \varepsilon \,,$$

e quindi la tesi. ■

Osservazione 4.5.12 Il Teorema precedente dà una seconda dimostrazione del fatto che le funzioni continue sono dense in $L^2([-\pi, \pi])$; infatti, $S_n(f)$ è una funzione continua per ogni n in $\mathbb{N}$. È naturale a questo punto chiedersi se, data una f in $L^2([-\pi, \pi])$, la successione $S_n(f)$ (che converge a f in $L^2([-\pi, \pi])$) non abbia delle proprietà di convergenza migliori, come ad esempio la convergenza puntuale, fermo restando il fatto che (come tutte le successioni convergenti in $L^2([-\pi, \pi])$) da $S_n(f)$ si può estrarre una sottosuccessione convergente quasi ovunque ad f. Il Teorema 4.5.7 ci dice che non è possibile che la convergenza sia puntuale ovunque (per le funzioni caratteristiche "saltano" due punti), ed allora si potrebbe sperare di avere convergenza "tranne al più un numero finito di punti". In questa maniera, di tutte le funzioni nella classe di equivalenza di f, la serie di Fourier ne sceglierebbe una "migliore" di tutte le altre. Purtroppo, la convergenza di $S_n(f)$ ad f è "solo" quasi ovunque.

Teorema 4.5.13 (Carleson, 1966) *Sia f in $L^2([-\pi, \pi])$. Allora $S_n(f)$ converge a f quasi ovunque.*

Per avere convergenza puntuale della serie di Fourier è allora necessario fare delle ipotesi più restrittive su f (si rimanda a testi di Analisi II per le ipotesi sufficienti per la convergenza quasi ovunque). Osserviamo qui che una condizione sufficiente per la convergenza puntuale di $S_n(f)$ a f è l'appartenenza a ℓ^1 delle successioni $\{a_k(f)\}$ e $\{b_k(f)\}$. Infatti, in questo caso si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \max_{[-\pi,\pi]} |a_k(f)\, \cos(kx) + b_k(f)\, \mathrm{sen}(kx)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k(f)| + |b_k(f)| \,,$$

cosicché la serie $S_n(f)$ è totalmente (dunque uniformemente) convergente in $C^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$; in questo caso, però, f è — obbligatoriamente — una funzione continua.

Osservazione 4.5.14 Se si considera $L^2([-T,T])$ invece di $L^2([-\pi,\pi])$, il sistema ortonormale completo diventa

$$\mathcal{T} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2T}}\,,\ \frac{1}{\sqrt{T}}\cos\left(\frac{k\pi x}{T}\right)\,,\ \frac{1}{\sqrt{T}}\sin\left(\frac{k\pi x}{T}\right)\,,\ k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Osservazione 4.5.15 Affinché i coefficienti di Fourier siano definiti, è sufficiente che f appartenga allo spazio (più grande) $L^1([-\pi,\pi])$. Infatti, essendo $\cos(kx)$ e $\mathrm{sen}(kx)$ in $L^\infty([-\pi,\pi])$, le funzioni $f(x)\,\cos(kx)$ e $f(x)\,\mathrm{sen}(kx)$ sono in $L^1([-\pi,\pi])$. Vale, inoltre, il Lemma di Riemann-Lebesgue.

Teorema 4.5.16 *Per ogni f in $L^1([-\pi,\pi])$ si ha*

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\,\cos(kx)\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\,\mathrm{sen}(kx)\,dx = 0\,.$$

Dimostrazione. Sia $f(x) = \chi_{(a,b)}$. Allora

$$\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\,\cos(kx)\,dx = \mathrm{R}\int_a^b \cos(kx)\,dx = \frac{\mathrm{sen}(kb) - \mathrm{sen}(ka)}{k}\,,$$

che tende a zero quando k tende ad infinito. Pertanto, per ogni funzione semplice φ,

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{[-\pi,\pi]} \varphi(x)\,\cos(kx)\,dx = 0\,.$$

Approssimando (in $L^1([-\pi,\pi])$) una funzione f con una successione φ_n di funzioni semplici si ha allora la tesi. ■

Ovviamente, non abbiamo più a disposizione la disuguaglianza di Bessel (perché f^2 può non essere sommabile, e se lo è la f è — per definizione — in $L^2([-\pi,\pi])$), né tantomeno un prodotto scalare: il fatto che

$$\int_{[-\pi,\pi]} \cos(kx)\,\mathrm{sen}(hx)\,dx = 0\,,$$

non va interpretato come una relazione di ortogonalità tra le due funzioni, ma solo come un "risultato numerico": l'integrale del prodotto è nullo. Comunque sia, è lecito chiedersi se la serie di Fourier di una funzione in $L^1([-\pi,\pi])$ converga, e — nel caso lo faccia — se converga ad f.

Esempio 4.5.17 (Kolmogorov, 1926) Esiste K in $L^1([-\pi,\pi])$ tale che la serie di Fourier $S_n(K)(x)$ diverge in **ogni** x di $[-\pi,\pi]$.

Grazie a questo esempio, possiamo affermare che, in generale, la serie di Fourier di una funzione f di $L^1([-\pi,\pi])$ non converge ad f in $L^1([-\pi,\pi])$, né converge a qualsiasi altra funzione di $L^1([-\pi,\pi])$; se così fosse per la funzione dell'esempio appena citato, allora $S_n(K)(x)$ dovrebbe convergere quasi ovunque, a meno di sottosuccessioni, al suo limite in $L^1([-\pi,\pi])$, che però è una funzione finita quasi ovunque; e questo contrasta con il fatto che $S_n(K)$ (e quindi ogni sua sottosuccessione) diverge ovunque.

A questo punto resta aperta la domanda — e continua a rimanerlo ancor oggi — su quale sia il miglior spazio per definire la serie di Fourier in modo che questa converga: si tratta di uno spazio di funzioni "compreso" tra $L^2([-\pi,\pi])$ e $L^1([-\pi,\pi])$, ma non è ancora stato dimostrato quale sia. Ad esempio, si sa che la serie di Fourier di una funzione f di $L^p([-\pi,\pi])$, con $1 < p < 2$, converge a f in $L^p([-\pi,\pi])$.

Osservazione 4.5.18 Ben più facile da dimostrare dei risultati citati precedentemente è il fatto che la serie di Fourier di una funzione f di $L^\infty([-\pi,\pi])$ non converga, in generale, ad f in $L^\infty([-\pi,\pi])$. Infatti, se $S_n(f)$ converge ad f in $L^\infty([-\pi,\pi])$, allora $S_n(f)$ converge uniformemente ad f e quindi (essendo $S_n(f)$ una funzione continua), f è continua. Quindi, la serie di Fourier di una funzione f essenzialmente limitata che non sia quasi ovunque uguale ad una funzione continua (ad esempio, $\operatorname{sgn}(x)$) non può convergere ad f in $L^\infty([-\pi,\pi])$.

Capitolo 5

Misure prodotto

5.1 Definizione della misura in $\mathbb{R}^2$

Nell'introdurre la misura secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$, abbiamo definito la misura esterna di un sottoinsieme qualsiasi E come

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} l(I_j)\,,\ \{I_j\}_{j \in J} \begin{array}{c} \text{famiglia numerabile} \\ \text{di intervalli aperti} \end{array} : E \subseteq \bigcup_{j \in J} I_j \right\},$$

essendo $l(I)$ la lunghezza di un intervallo (definita in maniera naturale). Per definire la misura esterna di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ è allora sufficiente definire la lunghezza di un intervallo I di $\mathbb{R}^N$: se

$$I = I_1 \times \ldots \times I_N$$

con gli I_j intervalli di $\mathbb{R}$, allora

$$l_N(I) = l(I_1) \cdot \ldots \cdot l(I_N)\,.$$

Una volta definita la lunghezza di un intervallo, la misura esterna N-dimensionale di un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^N$ è data da

$$m_N^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} l_N(I_j), \{I_j\}_{j \in J} \begin{array}{c} \text{famiglia numerabile} \\ \text{di intervalli aperti} \end{array} : E \subseteq \bigcup_{j \in J} I_j \right\}.$$

Una volta definita m_N^*, si dimostra che essa gode di tutte le proprietà dimostrate a suo tempo per m^*: che è monotona, regolare, che coincide con l_n

sugli intervalli di $\mathbb{R}^N$, è σ-subadditiva ed invariante per traslazioni. Detto misurabile un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^N$ tale che

$$m_N^*(A) = m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c)\,, \qquad \forall A \subseteq \mathbb{R}^N\,,$$

la famiglia $\mathcal{M}_N$ degli insiemi misurabili secondo Lebesgue è una σ-algebra che contiene gli intervalli, gli aperti ed i chiusi, e che verifica tutte le proprietà dimostrate a suo tempo per la famiglia degli insiemi misurabili su $\mathbb{R}$. Su di essa è definita la misura di Lebesgue N-dimensionale m_N.

In altre parole, una volta scelti i "mattoni base" (gli intervalli), e definita la misura su di essi, quasi tutte le proprietà della misura esterna (e, di conseguenza, della misura e degli insiemi misurabili) discendono solo dalla sua definizione. Quasi tutte le proprietà, tranne una: il fatto che, sugli intervalli, coincida con la lunghezza; ovvero, che m_N^* sia un'estensione di l_N. Questo fatto è conseguenza della "struttura" particolare della famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}^N$, e delle proprietà della lunghezza relativamente alle unioni di intervalli.

Definizione 5.1.1 Un sottoinsieme $\mathcal{C}$ di $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ si dice una **semi-algebra** se

i) per ogni C_1, C_2 in $\mathcal{C}$, si ha $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}$;

ii) per ogni C in $\mathcal{C}$, C^c è unione disgiunta e finita di elementi di $\mathcal{C}$.

La famiglia $\mathcal{C}$ degli intervalli di $\mathbb{R}^N$ è una semi-algebra, come si verifica facilmente; in particolare, se $N = 2$, e I è un intervallo di $\mathbb{R}^2$, $I = I_1 \times I_2$ e

$$I^c = (\mathbb{R} \times {I_2}^c) \cup ({I_1}^c \times I_2) = ({I_1}^c \times \mathbb{R}) \cup (I_1 \times {I_2}^c)\,,$$

e l'unione è disgiunta (si noti che il complementare di I non si scrive in modo unico come unione disgiunta).

Come si verifica facilmente, la funzione lunghezza, definita sulla semi-algebra degli intervalli, è σ-subadditiva: se I è un intervallo di $\mathbb{R}^N$, unione di una famiglia numerabile di intervalli $\{I_n\}$, allora

$$l_N(I) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} l_N(I_n)\,.$$

Questo fatto fa sì che la misura esterna di un intervallo coincida con la sua lunghezza. Infatti, se I è un intervallo, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste I_ε intervallo aperto contenente I e tale che $l_N(I_\varepsilon) \leq l_N(I) + \varepsilon$; pertanto

$$m_N^*(I) \leq l_N(I_\varepsilon) \leq l_N(I) + \varepsilon\,.$$

D'altra parte, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia al più numerabile di intervalli aperti $\{I_n\}$ che ricopre I e tale che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} l_N(I_n) \leq m_N^*(I) + \varepsilon\,.$$

Ma allora $\{I_n \cap I\}$ è una famiglia al più numerabile di intervalli la cui unione è I, e quindi

$$m_N^*(I) - \varepsilon \leq l_N(I) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} l_N(I_n \cap I) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} l_N(I_n) \leq m_N^*(I) + \varepsilon\,,$$

da cui (per l'arbitrarietà di ε) $l_N(I) = m_N^*(I)$.

Il fatto che la misura esterna di un intervallo sia la sua lunghezza (assieme alla σ-subadditività della misura esterna) implica poi che gli intervalli siano misurabili (si veda la dimostrazione del Teorema 2.3.10).

Ricapitolando, siamo partiti dalla semi-algebra degli intervalli e dalla funzione lunghezza (che è σ-subadditiva), e abbiamo costruito una misura esterna (e quindi la famiglia degli insiemi misurabili), ottenendo che la misura esterna coincide con la lunghezza sugli intervalli, e che gli intervalli sono misurabili.

L'unico punto di tutto il discorso nel quale è stato usato il fatto che avevamo a che fare *proprio* con la semi-algebra degli intervalli e con la lunghezza è stato nell'usare il fatto che la lunghezza era monotona e σ-subadditiva. In altre parole, è valido il seguente teorema.

Teorema 5.1.2 *Sia $\mathcal{C}$ una semi-algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$, e sia $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ una funzione di insieme monotona e σ-subadditiva su $\mathcal{C}$; ovvero, se C in $\mathcal{C}$ è unione numerabile di una famiglia $\{C_n\}$ di insiemi di $\mathcal{C}$, allora*

$$\mu(C) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(C_n)\,.$$

Definiamo, per ogni E sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$,

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} \mu(C_j), \{C_j\}_{j\in J} \begin{array}{c}\textit{famiglia numerabile}\\ \textit{di insiemi di } \mathcal{C}\end{array} : E \subseteq \textstyle\bigcup_{j \in J} C_j \right\}.$$

Allora μ^* è una misura esterna (ovvero, è monotona e σ-subadditiva) tale che $\mu^*(C) = \mu(C)$ per ogni C in $\mathcal{C}$. Inoltre, detto "misurabile" un insieme E tale che

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^{\mathrm{c}}) \,, \qquad \forall A \subseteq \mathbb{R}^N \,,$$

la famiglia degli insiemi misurabili è una σ-algebra che contiene $\mathcal{C}$.

È allora possibile definire una misura esterna su $\mathbb{R}^N$ in un'altra maniera: non partendo dagli intervalli, ma partendo da una semi-algebra più "raffinata".

Definizione 5.1.3 Un **rettangolo** di $\mathbb{R}^N$ è il prodotto cartesiano di N insiemi misurabili secondo Lebesgue di $\mathbb{R}$:

$$R = E_1 \times \ldots \times E_N \,, \qquad E_i \in \mathcal{M} \,.$$

La misura di un rettangolo di $\mathbb{R}^N$ è definita — in maniera naturale — come il prodotto delle misure degli E_i:

$$\mu(R) = m(E_1) \cdot \ldots \cdot m(E_N) \,.$$

Teorema 5.1.4 *Sia $\mathcal{R}$ la famiglia dei rettangoli di $\mathbb{R}^N$. Allora $\mathcal{R}$ è una semi-algebra; inoltre, la funzione μ è monotona e σ-subadditiva su $\mathcal{R}$.*

Dimostrazione. Il fatto che $\mathcal{R}$ sia una semi-algebra è di dimostrazione immediata, così come lo è la monotonia di μ. Rimane pertanto da verificare la σ-subadditività di μ. Per semplicità, limitamoci al caso $N = 2$. Sia allora R un rettangolo di $\mathbb{R}^2$, unione di una famiglia numerabile di rettangoli di $\mathbb{R}^2$:

$$A \times B = R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \times B_n \,.$$

Sia x in A fissato; allora x appartiene ad alcuni degli A_n; sia $N_x = \{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$. Si ha allora

$$B = \bigcup_{n \in N_x} B_n \,.$$

Infatti, sia y in B; allora (x, y) è in $A \times B$ e quindi esiste m in $\mathbb{N}$ tale che (x, y) è in $A_m \times B_m$. Poiché x è in A_m, m è in N_x e quindi y è nell'unione dei B_n con n in N_x (essendo y in B_m). Viceversa, se y è nell'unione dei B_n con n in N_x, allora y è in B_m per qualche m in N_x e quindi (x, y) è in $A_m \times B_m$, ovvero in $A \times B$. Essendo i B_n misurabili, si ha

$$m(B) \leq \sum_{n \in N_x} m(B_n)\,.$$

Osserviamo ora che $m(B_n)$ è uno degli addendi della somma precdente se e solo se x è in A_n, e che quindi si può scrivere (ricordiamo che x è fissato)

$$m(B) \leq \sum_{n \in N_x} m(B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(B_n)\, \chi_{A_n}(x)\,.$$

Consideriamo ora la funzione caratteristica $\chi_A(x)$. Si ha allora, essendo $\chi_{A_n}(x)\, \chi_A(x) = \chi_{A_n}(x)$,

$$m(B)\, \chi_A(x) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m(B_n)\, \chi_{A_n}(x)\, \chi_A(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(B_n)\, \chi_{A_n}(x)\,.$$

Per uno dei corollari del teorema di convergenza monotona, si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} m(B_n)\, \chi_{A_n}(x) \right) dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(B_n) \int_{\mathbb{R}} \chi_{A_n}(x)\, dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n)\, m(B_n)\,,$$

da cui la tesi per la monotonia dell'integrale e per definizione di μ, essendo

$$\int_{\mathbb{R}} m(B)\, \chi_A(x)\, dx = m(A)\, m(B)\,.$$

■

Possiamo allora definire μ_N^* sui sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ nel seguente modo:

$$\mu_N^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j \in J} \mu_N(R_j), \{R_j\}_{j \in J} \begin{array}{c} \text{famiglia numerabile} \\ \text{di insiemi di } \mathcal{R} \end{array} :\ E \subseteq \bigcup_{j \in J} R_j \right\}.$$

La funzione d'insieme così definita è una misura esterna, e coincide con μ_N su $\mathcal{R}$. Inoltre, definiti gli insiemi misurabili nella maniera usuale, i rettangoli di $\mathbb{R}^N$ risultano essere misurabili. Ovviamente, dal momento che l'insieme degli intervalli di $\mathbb{R}^N$ è un sottoinsieme di $\mathcal{R}$ e che μ_N e l_N coincidono sugli intervalli, ogni intervallo è misurabile rispetto a μ_N^*, e $\mu_N^*(I) = l_N(I) = m_N(I)$.

A questo punto ci si può chiedere se la misura μ_N costruita a partire dai rettangoli sia più fine della misura m_N costruita a partire dagli intervalli; ovvero se si riescano a misurare più insiemi partendo da ricoprimenti costituiti da rettangoli piuttosto che da intervalli.

Teorema 5.1.5 *Per ogni E sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ si ha*

$$\mu_N^*(E) = m_N^*(E)\,.$$

Dimostrazione. Detto $\mathcal{I}$ l'insieme degli intervalli di $\mathbb{R}^N$, si ha ovviamente $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$, e pertanto

$$\mu_N^*(E) \leq m_N^*(E)\,, \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^N\,.$$

Se $\mu_N^*(E) = +\infty$, dalla disuguaglianza precedente segue che $m_N^*(E) = +\infty$ e quindi si ha la tesi. Supponiamo ora che $\mu_N^*(E) < +\infty$. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $\{R_n\}$ una famiglia al più numerabile di intervalli che ricoprono E e tali che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_N(R_n) \leq \mu_N^*(E) + \varepsilon\,.$$

Ognuno degli R_n ha misura finita, e si scrive come

$$R_n = A_1^n \times \ldots \times A_N^n\,,$$

con A_j^n misurabili in $\mathbb{R}$ e di misura finita. Per ogni j in $\{1,\ldots,N\}$ esiste allora (si veda il Teorema 2.2.5) una famiglia al più numerabile di intervalli aperti $\{I_{m_j}^n\}$ la cui unione contiene A_j^n e tale che

$$\sum_{m_j\in\mathbb{N}} l(I_{m_j}^n) \leq m(A_j^n) + \frac{\varepsilon}{2^n\,(1+\mu_N(A^n))}\,.$$

Definiamo ora, per $\mathbf{m} = (m_1,\ldots,m_N) \in \mathbb{N}^N$,

$$I_{\mathbf{m}}^n = I_{m_1}^n \times \ldots \times I_{m_N}^n\,,$$

in modo tale che $\{I^n_{\mathbf{m}}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^N\}$ sia un ricoprimento di R_n. Inoltre,

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}^N} l_N(I^n_{\mathbf{m}}) = \prod_{j=1}^{N} \sum_{m_j\in\mathbb{N}} l(I^n_{m_j}) \le m(A^n) \cdot \ldots \cdot m(A^n_N) + \frac{\varepsilon}{2^n} = \mu_N(R_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\,.$$

In definitiva, $\{I^n_{\mathbf{m}}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}^N, n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia al più numerabile di intervalli aperti che ricopre E, e si ha

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}^N} l_N(I^n_{\mathbf{m}}) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_N(R_n) + \varepsilon \le \mu^*_N(E) + 2\varepsilon\,.$$

Pertanto,

$$m^*_N(E) \le \mu^*_N(E) + 2\varepsilon\,,$$

da cui la tesi per l'arbitrarietà di ε. ∎

A questo punto, essendo μ^*_N e m^*_N *numericamente* uguali, ne segue che E è misurabile per μ^*_N se e solo se lo è per m^*_N. Pertanto, la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo μ^*_N è la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo m^*_N (ovvero, quella che abbiamo definito come la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue). Cosa abbiamo guadagnato? Una sola cosa: adesso possiamo affermare che i rettangoli di $\mathbb{R}^N$ sono misurabili secondo Lebesgue e che

$$m_N(R) = m^*_N(R) = \mu^*_N(R) = m(A_1) \cdot \ldots \cdot m(A_n)\,,$$

ovvero che la misura N-dimensionale del prodotto cartesiano di N insiemi misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$ è il prodotto delle loro misure.

5.2 Il teorema di Fubini-Tonelli

A partire dalla misura N-dimensionale, è possibile definire il concetto di misurabilità per una funzione, e successivamente dare la definizione di integrale. Ancora una volta, tutte le proprietà dimostrate nel caso unidimensionale continuano a valere in dimensione qualsiasi, compresi i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Per semplicità di esposizione, a partire da ora ci limiteremo a considerare $\mathbb{R}^2$. Sia allora $f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione sommabile; ovvero, una funzione misurabile e tale che

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,dx\,dy < +\infty\,.$$

Ci chiediamo ora se — per analogia con quanto accade per l'integrazione secondo Riemann per funzioni continue — l'integrale precedente possa essere "spezzato" in due integrali su $\mathbb{R}$, ovvero se

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\,dy \right) dx\,.$$

A prescindere dall'uguaglianza, affinché la formula precedente sia esatta, devono verificarsi due fatti:

i) per ogni fissato $\overline{y}$ in $\mathbb{R}$ la funzione $x \mapsto |f(x,\overline{y})|$ deve essere misurabile e sommabile su $\mathbb{R}$;

ii) la funzione $y \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\,dx$ deve essere misurabile e sommabile su $\mathbb{R}$.

Esempio 5.2.1 Sia P un insieme non misurabile di $\mathbb{R}$ contenuto in $[0,1]$, e sia $E = P \times \mathbb{Q}$. Allora E (che *non* è un rettangolo) è misurabile in $\mathbb{R}^2$. Infatti, $E \subset [0,1] \times \mathbb{Q}$, che è un rettangolo di misura nulla, e pertanto $m_2^*(E) = 0$, da cui segue (si veda il Teorema 2.3.2), che E è misurabile (e ha misura nulla). Consideriamo ora $f(x,y) = \chi_E(x,y) = \chi_P(x)\,\chi_{\mathbb{Q}}(y)$. Ovviamente f è misurabile (come funzione caratteristica di un insieme misurabile), e il suo integrale su $\mathbb{R}^2$ vale zero (essendo f nulla quasi ovunque). Sia ora $\overline{y}$ fissato in $\mathbb{R}$; allora $f(x,\overline{y}) = \chi_P(x)$ se y è razionale, e zero altrimenti. Pertanto, se $\overline{y}$ è in $\mathbb{Q}$, $f(x,\overline{y})$ non è misurabile e non ha dunque senso scrivere $\int_{\mathbb{R}} f(x,\overline{y})\,dx$. Il che vuol dire che non è (apparentemente) possibile "spezzare" l'integrale di f su tutto $\mathbb{R}^2$ come due integrali. In realtà, la funzione $f(x,\overline{y})$ è sia misurabile che sommabile su $\mathbb{R}$ per *quasi tutti* gli $\overline{y}$ in $\mathbb{R}$: tutti, tranne i razionali, che formano un insieme di misura nulla. Pertanto, possiamo definire, per quasi ogni y in $\mathbb{R}$, la funzione

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,,$$

che è la funzione identicamente nulla, definire arbitrariamente la stessa funzione per y razionale (dal momento che siamo interessati ad integrare tale funzione su $\mathbb{R}$, modificarla — o definirla — su un insieme di misura nulla non modifica il valore dell'integrale), ed ottenere una funzione misurabile (perché quasi ovunque nulla), sommabile, e con integrale zero.

La validità della seconda formula è ancora più evidente, dal momento che, per ogni $\overline{x}$ in $\mathbb{R}$ la funzione $f(\overline{x}, y)$ è la funzione quasi ovunque nulla, e pertanto

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy\,,$$

è nuovamente la funzione ovunque nulla, il cui integrale è zero.

L'esempio precedente mostra che, nonostante la funzione ottenuta da $f(x,y)$ "congelando" una delle due variabili possa non essere misurabile, i valori di x (o di y) per i quali si ottiene una funzione non misurabile formano un insieme di misura di nulla, e sono quindi trascurabili quando si parla di integrali. Questo fatto accade non solo nell'esempio precedente, ma per ogni funzione misurabile. Per dimostrare questo fatto, abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari.

Definizione 5.2.2 Sia $\mathcal{R}$ la famiglia dei rettangoli di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{R} = \{A \times B,\ A, B \in \mathcal{M}\}\,.$$

Definiamo

$$\mathcal{R}_{\cup} = \{E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n\,,\ R_n \in \mathcal{R}\}\,,$$

e

$$\mathcal{R}_{\cup\cap} = \{E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n\,,\ R_n \in \mathcal{R}_{\cup}\}\,.$$

Ovviamente, si ha $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_{\cup} \subset \mathcal{R}_{\cup\cap} \subset \mathcal{M}_2$, e le inclusioni sono strette.

Alcune delle proprietà di $\mathcal{R}_{\cup}$ e $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ sono riassunte nel teorema che segue.

Teorema 5.2.3 *Si ha*

1) $\mathcal{R}_{\cup}$ è chiuso rispetto all'unione numerabile e all'intersezione finita;

2) $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ *è chiuso rispetto all'unione numerabile e all'intersezione numerabile;*

3) per ogni E *misurabile in* $\mathbb{R}^2$ *con* $m_2(E) < +\infty$*, e per ogni* $\varepsilon > 0$*, esiste* R_ε *in* $\mathcal{R}_\cup$*, con* $E \subseteq R_\varepsilon$*, e* $m_2(R_\varepsilon) \leq m_2(E) + \varepsilon$*;*

4) per ogni E *misurabile in* $\mathbb{R}^2$ *con* $m_2(E) < +\infty$*, esiste* R *in* $\mathcal{R}_{\cup\cap}$*, con* $E \subseteq R$*, e* $m_2(R) = m_2(E)$*;*

5) se E *è in* $\mathcal{R}_\cup$*, esiste una famiglia al più numerabile di rettangoli* $\{Q_n\}$ *a due a due disgiunti e tali che* $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$*;*

6) se E *è in* $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ *e* $m_2(E) < +\infty$*, esiste una famiglia al più numerabile di insiemi* $\{Q_n\}$ *in* $\mathcal{R}_\cup$ *tali che* $m_2(Q_1) < +\infty$*,* $Q_{n+1} \subseteq Q_n$ *per ogni* n *in* $\mathbb{N}$*, e* $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_n$*.*

Dimostrazione. Il fatto che $\mathcal{R}_\cup$ sia chiuso rispetto all'unione numerabile discende direttamente dalla definizione di $\mathcal{R}_\cup$. Se E e F appartengono a $\mathcal{R}_\cup$, allora

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n\,, \qquad F = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} Q_m\,,$$

con R_n e Q_m rettangoli. Allora

$$E \cap F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} R_n \cap Q_m\,,$$

e quindi $E \cap F$ è in $\mathcal{R}_\cup$ dal momento che $R_n \cap Q_m$ è un rettangolo per ogni n e m. Dalla definizione segue poi in maniera evidente che $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ è chiuso rispetto alle unioni numerabili ed alle intersezioni numerabili.

Sia ora E misurabile e di misura finita. Essendo $m_2(E) = m_2^*(E) = \mu_2^*(E)$, per definizione di μ_2^*, fissato $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia $\{R_n\}$ al più numerabile di rettangoli la cui unione ricopre E e

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m_2(R_n) \leq m_2(E) + \varepsilon\,.$$

Se definiamo $R_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$, allora R_ε è in $\mathcal{R}_\cup$, E è contenuto in R_ε, ed essendo m_2 σ-subadditiva, si ha

$$m_2(R_\varepsilon) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m_2(R_n) \leq m_2(E) + \varepsilon\,,$$

che è la tesi di 3).

A partire da 3), sia $\varepsilon = \frac{1}{n}$, e sia R_n in $\mathcal{R}_\cup$ tale che $E \subseteq R_n$ e $m_2(R_n) \leq m_2(E) + \frac{1}{n}$. Definiamo $R = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$. Allora R è in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$, R contiene E e si ha, per ogni n in $\mathbb{N}$,

$$m_2(E) \leq m_2(R) \leq m_2(R_n) \leq m_2(E) + \frac{1}{n}\,,$$

da cui segue 4).

Sia ora E in $\mathcal{R}_\cup$; allora E è l'unione di una famiglia al più numerabile di rettangoli $\{R_n\}$. Sia $P_1 = R_1$, $P_2 = R_2 \backslash R_1$, $P_n = R_n \backslash (\bigcup_{j=1}^{n-1} R_j)$. Gli insiemi P_j sono evidentemente a due a due disgiunti, e la loro unione è ancora E. Si verifica facilmente che ognuno dei P_j è unione finita di rettangoli a due a due disgiunti: $P_j = \bigcup_{i=1}^{n_j} Q_i^j$. Pertanto, E è l'unione dei $\{Q_j^n\}$, che sono rettangoli a due a due disgiunti.

Infine, sia E in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$, con $m_2(E) < +\infty$. Allora $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$, con R_n in $\mathcal{R}_\cup$. Definiamo $P_1 = R_1$, $P_2 = R_1 \cap R_2$ e $P_n = \bigcap_{j=1}^{n} R_j$. Allora i P_j sono ancora in $\mathcal{R}_\cup$ (per 1)), verificano $P_{n+1} \subseteq P_n$, e la loro intersezione è ovviamente E; l'unica cosa che P_1 potrebbe non verificare è $m_2(P_1) < +\infty$. In questo caso, siccome $m_2(E)$ è finita, per il punto 3) esiste R in $\mathcal{R}_\cup$ tale che $E \subseteq R$ e $m_2(R) \leq m_2(E) + 1$; in particolare, R ha misura finita. Ma allora $\{P_n \cap R\}$ soddisfa tutte le richieste del punto 6). ■

Definizione 5.2.4 Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, e sia x in $\mathbb{R}$. Definiamo la **sezione di E secondo x** l'insieme

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in E\}\,.$$

Se E è un insieme di $\mathbb{R}^2$, e x è in $\mathbb{R}$, si ha

$$\chi_{E_x}(y) = \chi_E(x,y)\,.$$

Inoltre, se $\{E_n\}$ è una famiglia qualsiasi di insiemi, allora

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n)_x\,, \qquad \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)_x = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E_n)_x\,.$$

Teorema 5.2.5 *Sia x in $\mathbb{R}$ e sia E in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$. Allora E_x è misurabile in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Sia E in $\mathcal{R}$. Allora $E = A \times B$, e quindi

$$E_x = \begin{cases} \emptyset & \text{se } x \notin A, \\ B & \text{se } x \in A. \end{cases}$$

In entrambi i casi, E_x è misurabile. Se E è in $\mathcal{R}_\cup$, allora

$$E_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (R_n)_x \,,$$

dove $\{R_n\}$ sono i rettangoli la cui unione è E. Ma allora E_x è misurabile come unione numerabile di insiemi misurabili. Infine, se E è in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$, allora

$$E_x = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (R_n)_x \,,$$

dove $\{R_n\}$ sono gli insiemi di $\mathcal{R}_\cup$ la cui intersezione è E. Ma allora E_x è misurabile come intersezione numerabile di insiemi misurabili. ■

Teorema 5.2.6 *Sia E in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ con $m_2(E) < +\infty$, e sia $g(x) = m(E_x)$. Allora g è misurabile su $\mathbb{R}$ e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = m_2(E)\,.$$

Dimostrazione. Se E è un rettangolo, allora $E = A \times B$, E_x è B oppure l'insieme vuoto a seconda se x appartiene o meno ad A, e quindi $g(x) = m(B)\,\chi_A(x)$. Essendo A misurabile, g lo è, e il suo integrale è proprio $m(A)\,m(B)$ che è $m_2(E)$.

Se E è in $\mathcal{R}_\cup$, per il Teorema 5.2.2, 5), E è unione al più numerabile di una famiglia $\{R_n\}$ di rettangoli a due a due disgiunti. Definiamo $g_n(x) = m((R_n)_x)$. Allora g_n è misurabile (per quanto appena dimostrato), e si ha

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n(x)\,,$$

da cui segue che g è misurabile. Infine, essendo $g_n \geq 0$ per ogni n, il corollario del Teorema di convergenza monotona, ed il fatto che gli R_n sono disgiunti, implica che

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\, dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} m_2(R_n) = m_2(E)\,.$$

Sia ora E in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$. Allora, per il Teorema 5.2.2, 6), E è l'intersezione di una famiglia $\{R_n\}$ numerabile di insiemi in $\mathcal{R}_{\cup}$, con $m_2(R_1) < +\infty$ e $R_{n+1} \subseteq R_n$. Detta $g_n(x) = m((R_n)_x)$, si ha che g_1 è in $L^1(\mathbb{R})$ e che $0 \leq g_{n+1}(x) \leq g_n(x) \leq g_1(x)$. Essendo g_1 in $L^1(\mathbb{R})$, g_1 è finita quasi ovunque, e quindi $m((R_1)_x) < +\infty$ per quasi ogni x in $\mathbb{R}$. Per questi x, dal momento che la successione $\{(R_n)_x\}$ è monotona decrescente e la sua intersezione è E_x, si ha, per il Teorema 2.3.7, ii),

$$g(x) = m(E_x) = \lim_{n\to+\infty} m((R_n)_x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)\,.$$

Pertanto, g_n converge a g quasi ovunque e quindi g è misurabile. Essendo $0 \leq g_n \leq g_1$, dal Teorema di Lebesgue segue

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} m_2(R_n) = m_2(E)\,,$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato ancora una volta il Teorema 2.3.7, ii).

■

Finora ci siamo occupati solo degli insiemi di $\mathcal{R}_{\cup\cap}$, ma per trattare gli insiemi misurabili qualsiasi ci viene in aiuto il punto 4) del Teorema 5.2.2.

Teorema 5.2.7 *Sia E un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^2$, con $m_2(E) = 0$. Allora E_x è misurabile in $\mathbb{R}$ per quasi ogni x in $\mathbb{R}$ e si ha $m(E_x) = 0$.*

Dimostrazione. Per il Teorema 5.2.2, 4), esiste F in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ contenente E e con $m_2(F) = 0$. Dal teorema precedente segue allora che

$$0 = m_2(F) = \int_{\mathbb{R}} m(F_x)\,dx\,.$$

Essendo $m(F_x)$ una funzione misurabile e non negativa, ne segue che $m(F_x) = 0$ per quasi ogni x in $\mathbb{R}$. Essendo $E \subseteq F$, si ha $E_x \subseteq F_x$ e quindi, per quasi ogni x, E_x è misurabile ed ha misura zero. ■

Teorema 5.2.8 *Sia E un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^2$, con $m_2(E) < +\infty$. Allora per quasi ogni x in $\mathbb{R}$ l'insieme E_x è misurabile in $\mathbb{R}$; la funzione, definita quasi ovunque, $g(x) = m(E_x)$ è misurabile in $\mathbb{R}$, sommabile su $\mathbb{R}$ e tale che*

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = m_2(E)\,.$$

Dimostrazione. Sempre per il Teorema 5.2.2, 4), esiste F in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$ tale che $E \subseteq F$ e $m_2(E) = m_2(F)$. Sia $G = F \setminus E$. Allora G ha misura nulla e quindi, per il teorema precedente, G_x è misurabile per quasi ogni x in $\mathbb{R}$ (con $m(G_x) = 0$). Dal momento che $E_x = F_x \setminus G_x$, E_x è misurabile per quasi ogni x in $\mathbb{R}$, e $m(E_x) = m(F_x)$ per tali x. Pertanto, $g(x) = m(F_x)$ quasi ovunque; per il Teorema 5.2.6, g è dunque misurabile essendo quasi ovunque uguale ad una funzione misurabile. Inoltre, sempre per il Teorema 5.2.6,

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} m(F_x)\,dx = m_2(F) = m_2(E)\,,$$

come volevasi dimostrare. ∎

Osservazione 5.2.9 Sia ora E un insieme misurabile di $\mathbb{R}^2$, con $m_2(E) < +\infty$, e sia $f(x,y) = \chi_E(x,y)$, cosicché f è sommabile su $\mathbb{R}^2$. Dal momento che $\chi_E(x,y) = \chi_{E_x}(y)$ il teorema precedente si può così interpretare:

a) per quasi ogni $\overline{x}$ fissato in $\mathbb{R}$, la funzione $y \mapsto f(\overline{x},y) = \chi_{E_{\overline{x}}}(y)$ è misurabile e sommabile su $\mathbb{R}$ (dal momento che il suo integrale vale $m(E_{\overline{x}})$);

b) la funzione (definita per quasi ogni x in $\mathbb{R}$) $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$ è misurabile (dato che $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = m(E_x)$) e sommabile su $\mathbb{R}$;

c) si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right) dx = m_2(E) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Un discorso analogo si può fare considerando sezioni di E secondo y, ottenendo lo stesso risultato. In altre parole, almeno per le funzioni caratteristiche di insiemi misurabili di misura finita è possibile spezzare un integrale doppio come due integrali semplici, integrando prima rispetto ad una qualsiasi delle due variabili, e poi rispetto all'altra.

In realtà, la stessa operazione si può effettuare qualsiasi sia la funzione sommabile su $\mathbb{R}^2$; prima di dimostrare questo fatto, abbiamo bisogno di un ulteriore risultato di approssimazione.

Teorema 5.2.10 *Sia f una funzione non negativa e misurabile su $\mathbb{R}^2$. Allora esiste una successione crescente di funzioni semplici $\{\varphi_n\}$, ognuna nulla fuori da un insieme misurabile di misura finita, tale che φ_n converge a f ovunque in $\mathbb{R}^2$.*

Dimostrazione. L'idea di questa dimostrazione è la stessa usata per dimostrare il Teorema 2.4.12. Innanzitutto, siano n in $\mathbb{N}$ e $F_n = [-n, n] \times [-n, n]$; definiamo, per $k = 0, \ldots, n\,2^n - 1$,

$$E_{n,k} = \left\{x \in F_n : \frac{k}{2^n} \leq f(x, y) < \frac{k+1}{2^n}\right\}, \; E_n = \{(x, y) \in F_n : f(x, y) \geq n\}.$$

Gli insiemi E_n e $E_{n,k}$ sono ovviamente misurabili (perché lo è f), e, se $k \leq n\,2^n - 1$,

$$E_{n,k} = E_{n+1,2k} \cup E_{n+1,2k+1}, \tag{2.1}$$

l'unione essendo disgiunta. Definiamo

$$\varphi_n(x, y) = n\,\chi_{E_n}(x, y) + \sum_{k=0}^{n\,2^n-1} \frac{k}{2^n}\,\chi_{E_{n,k}}(x, y).$$

Per costruzione, φ_n è una funzione semplice, nulla fuori da F_n (ovvero, da un insieme di misura finita). Inoltre, per ogni (x, y) in $F_n \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq f(x, y) < n\}$ si ha

$$|\varphi_n(x, y) - f(x, y)| \leq \frac{1}{2^n}. \tag{2.2}$$

Da (2.1) (e dalla definizione di φ_n su E_n) segue anche che, su F_n, si ha $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$; dal momento che φ_n è nulla fuori da F_n, mentre φ_{n+1} è non negativa, si ha $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ su $\mathbb{R}^2$.

Sia ora (x, y) in $\mathbb{R}^2$ tale che $f(x, y) < +\infty$ (quasi ogni (x, y) in $\mathbb{R}^2$ soddisfa tale proprietà). Allora esiste $n_{(x,y)}$ in $\mathbb{N}$ tale che (x, y) è in $F_n \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq f(x, y) < n\}$ per ogni $n \geq n_{(x,y)}$; per (2.2) si ha allora che $\varphi_n(x, y)$ converge a $f(x, y)$.

Se, invece, $f(x, y) = +\infty$, allora esiste $n_{(x,y)}$ in $\mathbb{N}$ tale che (x, y) è in $F_n \cap E_n$ per ogni $n \geq n_{(x,y)}$. Ma allora $\varphi_n(x, y) = n$ definitivamente, e quindi tende a $+\infty = f(x, y)$. ∎

Possiamo ora enunciare e dimostrare il teorema di spezzamento degli integrali.

Teorema 5.2.11 (Fubini, Tonelli) *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile e non negativa. Allora (teorema di Tonelli)*

1) *per quasi ogni $\overline{x}$ in $\mathbb{R}$ la funzione $f_{\overline{x}}$ definita da $f_{\overline{x}}(y) = f(\overline{x}, y)$ è misurabile in $\mathbb{R}$;*

2) *per quasi ogni $\overline{y}$ in $\mathbb{R}$ la funzione $f_{\overline{y}}$ definita da $f_{\overline{y}}(x) = f(x, \overline{y})$ è misurabile in $\mathbb{R}$;*

3) *la funzione (definita quasi ovunque) $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy$ è misurabile su $\mathbb{R}$;*

4) *la funzione (definita quasi ovunque) $y \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dx$ è misurabile su $\mathbb{R}$;*

5) *si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy \right) dx = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dx \right) dy\,.$$

Se f è sommabile (di segno qualsiasi), allora (teorema di Fubini) le funzioni definite nei punti 1)–4) sono sommabili.

Dimostrazione. Data la simmetria dell'enunciato rispetto ad x e y, è sufficiente dimostrare 1), 3) e 5).

Iniziamo con l'osservare che il teorema è già provato se $f(x, y)$ è la funzione caratteristica di un insieme misurabile e di misura finita: questo è infatti il contenuto dell'Osservazione 5.2.9, la 1), 3) e 5) essendo rispettivamente la a), b) e c).

Pertanto, per linearità, il teorema è vero per ogni funzione semplice nulla fuori da un insieme di misura finita.

A questo punto utilizziamo il Teorema 5.2.10, e costruiamo una successione $\{\varphi_n\}$ monotona crescente di funzioni semplici convergente ad f ovunque, con φ_n nulla fuori da un insieme di misura finita. Ovviamente, per ogni $\overline{x}$ in $\mathbb{R}$ si ha

$$f_{\overline{x}}(y) = \lim_{n \to +\infty} (\varphi_n)_{\overline{x}}(y)\,,$$

Sia ora E_n contenuto in $\mathbb{R}$ tale che $m(E_n) = 0$ e $(\varphi_n)_{\overline{x}}$ è misurabile in $\mathbb{R}$ per ogni x in $\mathbb{R}\backslash E_n$. Detta E l'unione degli E_n, si ha $m(E) = 0$, e $f_{\overline{x}}$ è misurabile su $\mathbb{R}$ per ogni $\overline{x}$ in $\mathbb{R}\backslash E$, essendo limite puntuale di funzioni misurabili. Per $\overline{x}$ in $\mathbb{R}\backslash E$, inoltre, dal Teorema di convergenza monotona segue che

$$\int_{\mathbb{R}} f(\overline{x}, y)\, dy = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(\overline{x}, y)\, dy\,,$$

cosicché, essendo misurabile per tali $\overline{x}$ la funzione

$$\overline{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(\overline{x}, y)\, dy\,,$$

si ha che

$$\overline{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(\overline{x}, y)\, dy\,,$$

è misurabile.

Dal momento che

$$\overline{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(\overline{x}, y)\, dy\,,$$

è limite della successione crescente

$$\overline{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(\overline{x}, y)\, dy\,,$$

una seconda applicazione del Teorema della convergenza monotona, ed il fatto che il teorema è vero per funzioni semplici, implica che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy \right) dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x, y)\, dy \right) dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_n(x, y)\, dx\, dy \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dx\, dy\,,
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato ancora una volta il Teorema di convergenza monotona. Pertanto, 5) è dimostrata.

Supponiamo ora che f sia sommabile; per linearità dell'integrale, è sufficiente dimostrare 1), 3) e 5) per $f^+(x, y)$ e $f^-(x, y)$, ovvero dimostrarle per una funzione sommabile non negativa. Essendo una tale funzione misurabile, otteniamo 1), 3) e 5); inoltre, essendo finito l'integrale su $\mathbb{R}$ di

$$\overline{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(\overline{x}, y)\, dy\,,$$

ne segue che tale funzione è sommabile, cosicché la funzione definita in 3) è sommabile; essendo sommabile, è finita quasi ovunque, e quindi

$$\overline{x} \mapsto f(\overline{x}, y)\,,$$

è sommabile per quasi ogni $\overline{x}$. ∎

Osservazione 5.2.12 Lo "spazio ambiente" delle dimostrazioni svolte finora è stato $\mathbb{R}^2$, ma il Teorema di Fubini-Tonelli è valido anche in $\mathbb{R}^N$, che possiamo "spezzare" come $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$. Analogamente, possiamo "spezzare" gli integrali come vogliamo, ed effettuarli nell'ordine che vogliamo.

Osservazione 5.2.13 Il teorema precedente è un buon "test" di sommabilità, nel senso che per dimostrare che una funzione misurabile è sommabile su $\mathbb{R}^2$ la si può integrare prima rispetto ad una variabile, poi rispetto all'altra; se il risultato è finito, la funzione di partenza è sommabile, altrimenti no.

Esempio 5.2.14 Sia f in $L^p(\mathbb{R})$. Allora è finito l'integrale su $\mathbb{R}$ di $|f(x)|^p$. Pertanto, per il Teorema di Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\, dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{[0,|f(x)|]} p y^{p-1}\, dy \right) dx \\
&= p \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} y^{p-1}\, \chi_{[0,|f(x)|]}(y)\, dy \right) dx \\
&= p \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le y \le |f(x)|\}}(x,y)\, dx \right) y^{p-1}\, dy \\
&= p \int_{\mathbb{R}} m(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \ge y\})\, \chi_{[0,+\infty)}(y)\, y^{p-1}\, dy \\
&= p \int_{[0,+\infty]} y^{p-1}\, m(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \ge y\})\, dy\,,
\end{aligned}$$

che dà una formula per il calcolo dell'integrale di una funzione di $L^p(\mathbb{R})$ in termini della misura dei sopralivelli. In maniera analoga si dimostra che, se

E è un insieme misurabile e f è in $L^p(E)$, allora

$$\int_E |f(x)|^p\,dx = p\int_{[0,+\infty)} m(\{x\in E : |f(x)|\geq y\})\,y^{p-1}\,dy\,.$$

In modo simile, si ha, per ogni $k\geq 0$,

$$\int_{\{x\in E:|f(x)|\geq k\}} |f(x)|^p\,dx = p\int_{[k,+\infty)} m(\{x\in E : |f(x)|\geq y\})\;y^{p-1}\,dy\,.$$

Ad esempio, se $f(x)=\frac{1}{x}\chi_{[1,+\infty)}(x)$, dal momento che

$$m(\{x\in\mathbb{R} : |f(x)|\geq y\} = \begin{cases} \frac{1}{y}-1 & \text{se } 0<y\leq 1,\\ 0 & \text{altrimenti,}\end{cases}$$

si ha

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,dx = p\int_{[0,1]} y^{p-1}\left(\frac{1}{y}-1\right)dy = \frac{1}{p-1}\,.$$

Inoltre, se $m(E)<+\infty$, e se f è tale che esiste una costante $C>0$ tale che $m(\{x\in E : |f(x)|>y\}\leq\frac{C}{t^q}$ (ovvero, f appartiene allo spazio di Marcinkiewicz $M^q(E)$), allora f è in $L^p(E)$ per ogni $p<q$. Infatti

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|^p\,dx &= \int_{\{x\in E:|f(x)|<1\}} |f(x)|^p\,dx + \int_{\{x\in E:|f(x)|\geq 1\}} |f(x)|^p\,dx\\ &\leq m(E)+p\int_{[1,+\infty)} m(\{x\in E : |f(x)|\geq y\})\,y^{p-1}\,dy\\ &\leq m(E)+p\,C\int_{[1,+\infty)} \frac{1}{y^{q-p+1}}\,dy<+\infty\,.\end{aligned}$$

Pertanto, ricordando che $L^p(E)$ è contenuto in $M^p(E)$ (come si vede utilizzando la disuguaglianza (2.25) del Capitolo 3), se $m(E)<+\infty$, $M^{p+\varepsilon}(E)\subset L^p(E)\subset M^p(E)$, con inclusioni strette.

Indice analitico

condizione di Cauchy, 14
continuità, 13
convergenza
– di una successione crescente di funzioni semplici verso una funzione sommabile, 128
– in $L^\infty(E)$ è la uniforme quasi ovunque, 95
– in $L^p(E)$ implica in $L^q(E)$ se $p > q$ e $m(E) < +\infty$, 96
– in $L^p(E)$ implica in misura, 95
– in $L^p(E)$ implica quasi ovunque per sottosuccessioni, 95
– in $L^p(E)$ non implica quasi ovunque, 94
– in misura, 79
– in misura implica quasi ovunque per sottosuccessioni, 79
– in misura non implica quasi ovunque, 94
– lemma di Riemann-Lebesgue in $L^1([-\pi,\pi])$, 112
– lemma di Riemann-Lebesgue in $L^2([-\pi,\pi])$, 106
– quasi ovunque, 47
– quasi ovunque implica in misura se $m(E) < +\infty$, 80
– quasi ovunque non implica in misura se $m(E) = +\infty$, 80
– schema riassuntivo, 96

distanza, 2
– discreta, 2
– disuguaglianza triangolare, 2
– positività, 2
– simmetria, 2
disuguaglianza
– di Bessel, 102
– di Cauchy-Schwartz in $\mathbb{R}^N$, 3
– di Cauchy-Schwartz per successioni, 7
– di Chebyshev, 75
– di Hölder in $\mathbb{R}^N$, 5
– di Hölder per funzioni continue, 10
– di Hölder per successioni, 7
– di Young, 4

funzione a gradino, 54
funzione di Dirichlet, 55
funzioni misurabili, 44
– sup, inf, lim sup, lim inf e lim, 46
– continuità a meno di insiemi di misura piccola, 48, 88
– convergenza quasi uniforme, 51, 52

– formano uno spazio vettoriale, 44
– funzioni caratteristiche, 47
– funzioni continue, 44
– funzioni semplici, 48, 56
– rappresentazione canonica, 56
– restrizioni ad insiemi misurabili di funzioni misurabili, 44
– uguali quasi ovunque, 47

insieme aperto, 11
insieme chiuso, 11
insiemi misurabili
– secondo Lebesgue, 29
– σ-additività, 32
– σ-algebra dei misurabili, 40
– finita additività, 31, 32
– i rettangoli in $\mathbb{R}^N$, 120, 122
– insieme non misurabile, 40
– insiemi con la stessa misura di un numerabile in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$, 123
– insiemi misurabili, aperti e chiusi, 38
– invarianza per traslazioni, 36
– le intersezioni numerabili di unioni numerabili di rettangoli in $\mathbb{R}^N$, 122
– le unioni numerabili di rettangoli in $\mathbb{R}^N$, 122
– misurabilità degli aperti, 38
– misurabilità degli insiemi di misura esterna nulla, 30
– misurabilità degli intervalli, 38
– misurabilità dei chiusi, 38
– misurabilità dell'unione finita, 30
– misurabilità delle semirette, 37
– successioni monotone crescenti, 35
– successioni monotone decrescenti, 35
– secondo Peano-Jordan, 23
integrale secondo Lebesgue
– funzioni misurabili e limitate
– additività, 64
– definizione, 63
– funzioni uguali quasi ovunque, 64
– integrabilità, 60
– integrale inferiore, 60
– integrale superiore, 60
– monotonia, 64
– su unioni finite di insiemi misurabili, 64
– teorema di convergenza limitata, 67
– funzioni non negative
– additività, 70
– definizione, 69
– integrabilità per serie, 73
– lemma di Fatou, 71
– monotonia, 70
– su unioni numerabili di insiemi misurabili, 73
– teorema di Beppo Levi, 72
– funzioni sommabili
– additività, 77

– assoluta continuità dell'integrale, 75
– definizione per funzioni di segno qualsiasi, 76
– definizione per funzioni non negative, 74
– finite quasi ovunque, 75
– monotonia, 77
– su unioni finite di insiemi misurabili, 77
– teorema di Lebesgue, 78
– teorema di Lebesgue generalizzato, 81
– teorema di Vitali, 81
– integrabilità delle funzioni integrabili secondo Riemann, 63
– integrale di funzioni semplici, 57
– additività, 58
– indipendenza dalla rappresentazione, 57, 59
– monotonia, 58

integrale secondo Riemann
– definizione, 54
– integrale inferiore, 53
– integrale inferiore e funzioni a gradino, 55
– integrale superiore, 53
– integrale superiore e funzioni a gradino, 55
– somme inferiori, 53
– somme superiori, 53

limitatezza, 13

lunghezza di un intervallo
– in $\mathbb{R}$, 25
– in $\mathbb{R}^N$, 114

lunghezza di un intervallo aperto, 23

massimo limite, 45

minimo limite, 45

misura di Lebesgue, 40
– di un rettangolo, 117
– in $\mathbb{R}^N$, 115

misura esterna
– secondo Lebesgue, 25
– σ-subadditività, 28
– estensione, 26
– in $\mathbb{R}^N$ a partire dagli intervalli, 114
– in $\mathbb{R}^N$ a partire dagli intervalli è la stessa a partire dai rettangoli, 119
– in $\mathbb{R}^N$ a partire dai rettangoli, 118
– invarianza per traslazioni, 29
– monotonia, 26
– regolarità, 26
– secondo Peano-Jordan, 23

misura interna
– secondo Peano-Jordan, 23

misura secondo Peano-Jordan, 23

partizione di un intervallo, 53

pluriintervallo, 23

quasi ovunque, 47

razionali
– misurabili secondo Lebesgue, 30
– non misurabili secondo Peano-Jordan, 24

rettangolo, 117

semi-algebra
- definizione, 115
- estensione di una misura, 116
- gli intervalli di $\mathbb{R}^N$, 115
- i rettangoli di $\mathbb{R}^N$, 117

separabilità
- $(L^\infty(\mathbb{R}), d_\infty)$ non è separabile, 100
- definizione, 97
- di $(L^p(\mathbb{R}), d_p)$, 98
- di $(L^p(E), d_p)$, 99

sezione di un insieme misurabile
- definizione, 124
- misurabilità della funzione $m(E_x)$, 126
- misurabilità delle sezioni di insiemi in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$, 124
- misurabilità per ogni x della misura di E_x, se E è in $\mathcal{R}_{\cup\cap}$, 125
- misurabilità per quasi ogni x di E_x, 126
- misurabilità per quasi ogni x di E_x se $m_2(E) = 0$, 126

sfera aperta, 11

spazi metrici
- $(C(X,Y), d_\infty)$, 13
- $(C^0([a,b],\mathbb{R}), d_1)$, 9
- $(C^0([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$, 9
- $(C^0([a,b],\mathbb{R}), d_p)$, 10
- $(C^1([a,b],\mathbb{R}), \overline{d}_{\infty,1})$, 11
- $(C^1([a,b],\mathbb{R}), \tilde{d}_{\infty,1})$, 11
- $(C^1([a,b],\mathbb{R}), d_{\infty,1})$, 11
- $(L(X,Y), d_\infty)$, 13
- $(L^2(E), d_2)$
  - prodotto scalare, 100
- (ℓ^∞, d_∞), 9
- (ℓ^p, d_p), 8
- $(L^1(E), d_1)$, 82
  - convergenza totale, 83
  - convergenza totale implica convergenza, 84
  - densità delle funzioni continue, 87
- $(L^\infty(E), d_\infty)$, 91
- $(L^p(E), d_p)$, 90
  - densità delle funzioni continue, 90
- $(\mathbb{R}^N, d_2)$, 3
- $(\mathbb{R}^N, d_\infty)$, 7
- $(\mathbb{R}^N, d_p)$, 6
- definizione, 2
- densità, 19
- isometria, 19
- metrica discreta, 2

spazi metrici completi
- $(C(X,Y), d_\infty)$ se Y è completo, 15
- $(C^0([a,b]), d_1)$ non è completo, 17
- $(C^0([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$, 16
- $(L(X,Y), d_\infty)$ se Y è completo, 15
- $(L^1([-\pi,\pi]), d_1)$
  - la serie di Fourier può divergere ovunque, 113
  - lemma di Riemann-Lebesgue, 112
- $(L^2([-\pi,\pi]), d_2)$

– convergenza della serie di Fourier di funzioni caratteristiche, 109
– convergenza quasi ovunque della serie di Fourier, 111
– lemma di Riemann-Lebesgue, 106
– sistema ortogonale trigonometrico, 105
– sistema ortogonale trigonometrico è completo, 110
– $(L^\infty([-\pi, \pi]), d_\infty)$
– la serie di Fourier non converge, 113
– (ℓ^∞, d_∞), 16
– (ℓ^p, d_p), 16
– $(L^1(E), d_1)$, 86
– $(L^\infty(E), d_\infty)$, 91
– $(L^p(E), d_p)$, 90
– completezza dei sottoinsiemi chiusi, 15
– definizione, 14
– spazi di Hilbert, 101
– spazi di Hilbert separabili
– coefficienti di Fourier, 103
– identità di Parseval, 102
– isometria biunivoca fra (H, d) e (ℓ^2, d_2), 104
– sistema ortonormale completo, 101
– teorema di completamento, 19
successioni convergenti, 12
– unicità del limite, 12

teorema di Fubini-Tonelli
– per funzioni caratteristiche, 127
– per funzioni misurabili, 129
– per funzioni sommabili, 129