

Compito di Analisi Reale — a.a. 2008-2009

26 febbraio 2009

Chi deve fare lo scritto: svolgere non più di tre esercizi per ognuna delle due parti.
Chi è esonerato da una delle due parti: svolgere più esercizi possibile dell'altra.

-
- 1) Studiare la convergenza in ℓ^p , $1 \leq p \leq +\infty$ della successione $\{x^{(n)}\}$ definita da

$$x_k^{(n)} = \operatorname{sen} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \right).$$

- 2) Dire perché è misurabile

$$E = \{x \in \mathbb{R} : 1 < e^x < 2\} \cup \{p, p \text{ primo}\} \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n}, \frac{2n+1}{n} \right),$$

e successivamente calcolarne la misura.

- 3) Sia $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } g(x) \geq 0, \\ -x^3 & \text{se } g(x) < 0. \end{cases}$$

Dopo aver dimostrato che f è misurabile, studiare la continuità di f nel caso in cui $g(x) = 3\chi_{\mathbb{Q}}(x) - 1$.

- 4) Calcolare, usando il teorema di Lebesgue,

$$\int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n \chi_{\left(\frac{1}{n^{2^n}}, \frac{1}{n^{2^n-1}}\right)}(x) dx.$$

- 5) Calcolare, giustificando i passaggi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{(0,1)} x^{2n} (1+x) dx.$$

-
- 1) Studiare la convergenza in $L^p((0,1))$, $1 \leq p \leq +\infty$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{n+1}{n} - x}}.$$

- 2) Per quali valori di $1 \leq p \leq +\infty$ appartiene ad $L^p((1, +\infty))$ la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \operatorname{sen} \left(\frac{x}{4^{n+1}} \right) \chi_{[4^n, 4^{n+1})}(x)?$$

- 3) Sia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n^4} \right) \operatorname{sen}(nx).$$

Dopo aver dimostrato che f è in $L^2((-\pi, \pi))$, dimostrare che f è derivabile due volte con continuità. Cosa si può dire della serie delle derivate terze?

- 4) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$. Calcolare, giustificando i passaggi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_D \frac{y}{x + \frac{1}{n}} dx dy.$$

- 5) Studiare la convergenza in $L^p(\mathbb{R}^3)$, $1 \leq p \leq +\infty$ della successione di funzioni

$$f_n(x, y, z) = \frac{1}{1 + n \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$