Primo esonero di Analisi Reale — a.a. 2008-2009

18 novembre 2008

1) Dimostrare che $d(x,y) = \sqrt[3]{|x-y|}$ è una distanza su $\mathbb{R}$ e determinare $E = \{x \in \mathbb{R} : d(x,2) < 3\}$.

Ricordando che $d(x,y) = \varphi(|x-y|)$ è una distanza se $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ è una funzione crescente, nulla in zero e sublineare, non resta che verificare che $\varphi(s) = \sqrt[3]{s}$ soddisfa queste proprietà su $\mathbb{R}^+$. Le prime due sono evidentemente vere, mentre per la sublinearità si tratta di verificare se si ha:

$$\sqrt[3]{s+t} \leq \sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{t}\,, \quad \forall s \geq 0, \forall t \geq 0\,.$$

Elevando al cubo, questa disuguaglianza è equivalente a

$$s + t \leq (\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{t})^3 = s + 3\sqrt[3]{s^2\,t} + 3\sqrt[3]{s\,t^2} + t\,,$$

che è vera se e solo se

$$0 \leq 3\sqrt[3]{s^2\,t} + 3\sqrt[3]{s\,t^2}\,.$$

Essendo s e t non negativi, quest'ultima disuguaglianza è vera e quindi φ è sublineare. Si ha poi

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{|x-2|} < 3\} = (-25, 29)\,.$$

2) Studiare la convergenza in ℓ^p, $1 \leq p \leq +\infty$, della successione $\{x^{(n)}\}$ definita da

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{k}{n^3}\right) & \text{se } k \leq n, \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

La successione è definitivamente nulla e quindi appartiene ad ℓ^p per ogni $1 \leq p \leq +\infty$. Tenendo fisso k e facendo tendere n ad infinito, la successione $x_k^{(n)}$ tende puntualmente a zero (che appartiene nuovamente ad ogni ℓ^p). Se $1 \leq p < +\infty$ si ha

$$0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k^{(n)}|^p = \sum_{k=1}^{n} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{k}{n^3}\right)\right|^p \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^{3p}} \leq \frac{n\,n^p}{n^{3p}} = \frac{1}{n^{2p-1}}\,,$$

e l'ultima successione è infinitesima per ogni $p \geq 1$. Pertanto, $x^{(n)}$ tende a zero in ℓ^p, $1 \leq p < +\infty$. Per quanto riguarda ℓ^∞ si ha

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k^{(n)}| = \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|\,,$$

che tende a zero quando n diverge. Pertanto, $x^{(n)}$ tende a zero anche in ℓ^∞.

3) Dire perché è misurabile l'insieme

$$E = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq \log(x) < 1\} \cup \left\{ \begin{matrix} \text{reali} \\ \text{algebrici} \end{matrix} \right\} \cup \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{2^n} \right] ,$$

e successivamente calcolarne la misura.

Detti rispettivamente A, B e C i tre insiemi, si ha che A è misurabile come intersezione di due insiemi di livello della funzione continua $\log(x)$, che B è misurabile perché è numerabile, e che C è misurabile come intersezione numerabile di intervalli. Si ha poi, trascurando B che ha misura nulla,

$$A = [1, \mathrm{e}) , \quad C = \left[\frac{1}{2}, 2\right] ,$$

e quindi E è (a meno di un insieme di misura nulla), l'insieme $[\frac{1}{2}, \mathrm{e})$, e si ha quindi $m(E) = \mathrm{e} - \frac{1}{2}$.

4) Calcolare, giustificando i passaggi,

$$\int_{(0,\pi)} f(x) , \quad \text{dove} \quad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\cos(2kx)|}{2^k} .$$

Posto $g_k(x) = \frac{|\cos(2kx)|}{2^k}$, si ha che $g_k \geq 0$ ed è misurabile (perché continua). Per un corollario del teorema di convergenza monotona, si ha allora

$$\int_{(0,\pi)} f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \int_{(0,\pi)} |\cos(2kx)| .$$

Si ha

$$\int_{(0,\pi)} |\cos(2kx)| = \frac{1}{2k} \int_0^{2k\pi} |\cos(y)| \, dy = \frac{2k}{2k} \int_0^{\pi} |\cos(y)| \, dy = 2 .$$

Pertanto,

$$\int_{(0,\pi)} f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{2^k} = 2 .$$

5) Sia $f \geq 0$ sommabile su $(0, 1)$. Detto, per $n \geq 0$ ed intero,

$$E_n = \{x \in (0, 1) : n \leq f(x) < n + 1\} ,$$

calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} n \, m(E_n) .$$

Suggerimento: Qual è l'unione degli E_n?

Essendo $f \geq 0$, l'unione degli E_n è $(0,1)$ meno l'insieme su cui f vale più infinito. Essendo f sommabile, tale insieme ha misura nulla e quindi, essendo gli E_n a due a due disgiunti,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x)\, \chi_{E_n}(x)$$

quasi ovunque. Si ha allora, per uno dei corollari del teorema di convergenza monotona, che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{(0,1)} f(x)\, \chi_{E_n}(x) = \int_{(0,1)} f(x) = M \in \mathbb{R}\,,$$

dato che f è sommabile. Dal momento che, per definizione di E_n, si ha

$$0 \leq n\, m(E_n) \leq \int_{E_n} f(x) = \int_{(0,1)} f(x)\, \chi_{E_n}(x)\,,$$

dalla identità precedente si ha

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(E_n) \leq M\,,$$

e quindi il limite richiesto vale zero (per la condizione necessaria di convergenza delle serie).

6) Calcolare, giustificando i passaggi,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{(1,+\infty)} f_n(x)\,, \quad \text{dove} \quad f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{x^2}\, \mathrm{e}^{-nx}\,.$$

Ognuna delle f_n è misurabile (essendo continua); inoltre, $f_n(x)$ tende ovunque a zero in $(1,+\infty)$. Inoltre

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\operatorname{sen}(nx)}{x^2}\, \mathrm{e}^{-nx} \right| \leq \frac{1}{x^2}\,,$$

e la funzione $g(x) = \frac{1}{x^2}$ è sommabile su $(1,+\infty)$. Per il teorema di Lebesgue, l'integrale di f_n tende allora a zero.

7) Dimostrare, giustificando i passaggi, che è ben definita, limitata e continua su $\mathbb{R}$ la funzione

$$g(t) = \int_{(0,1)} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x+|t|}}\,.$$

Per ogni t fissato, la funzione $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x+|t|}}$ è misurabile su $(0,1)$ essendo continua. Essendo non negativa, è integrabile su $(0,1)$ e quindi

g è ben definita. Si ha poi

$$0 \leq \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x+|t|}} \leq \frac{\mathrm{e}}{\sqrt{x}}\,,$$

e quindi

$$0 \leq g(t) \leq \int_{(0,1)} \frac{\mathrm{e}}{\sqrt{x}} = 2\mathrm{e}\,,$$

cosicché g è limitata su $\mathbb{R}$. Sia ora t_n convergente a t_0. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x+|t_n|}} = \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x+|t_0|}}\,,$$

ed inoltre

$$0 \leq \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x+|t_n|}} \leq \frac{\mathrm{e}}{\sqrt{x}}\,,$$

che è sommabile su $(0,1)$. Per il teorema di Lebesgue si ha allora

$$\lim_{n\to+\infty} g(t_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_{(0,1)} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x+|t_n|}} = \int_{(0,1)} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x+|t_0|}} = g(t_0)\,,$$

e quindi g è continua.