

Secondo esonero di Analisi Reale — 26/01/2009 — a.a. 2008-2009

1) Studiare la convergenza in $L^p((0, 1))$, $1 \leq p \leq +\infty$, della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\cos(nx) e^{-nx}}{\sqrt[3]{x}}.$$

Si vede facilmente che la successione f_n converge puntualmente a zero in $(0, 1)$. Per quanto riguarda la convergenza in $L^p((0, 1))$, essendo f_n di segno variabile è “obbligatorio” provare ad usare il teorema di Lebesgue. Dal momento che $|\cos(nx) e^{-nx}| \leq 1$, si ha

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Essendo $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ in $L^p((0, 1))$ se e solo se $p < 3$, dal teorema di Lebesgue segue che f_n converge a zero in $L^p((0, 1))$ se $p < 3$. Avendo effettuato una maggiorazione, non possiamo concludere nulla se $p \geq 3$. Siccome si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f_n(x)|}{g(x)} = 1,$$

qualsiasi sia n , il criterio del confronto per integrali impropri ci permette di affermare che f_n è in $L^p((0, 1))$ se e solo se g vi appartiene. In altre parole, f_n **non** appartiene a $L^p((0, 1))$ se $p \geq 3$, quindi non può convergere a zero in tale spazio. Infine, essendo l'estremo superiore di $|f_n|$ infinito (è il valore del limite in zero di $|f_n|$), nessuna delle f_n appartiene ad $L^\infty((0, 1))$ e quindi f_n non converge a zero in tale spazio.

2) Per quali valori di $1 \leq p \leq +\infty$ appartiene ad $L^p((1, +\infty))$ la funzione

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \chi_{[3^k, 3^{k+2})}(x) ?$$

Osservando che $[3^k, 3^{k+2}) = [3^k, 3^{k+1}) \cup [3^{k+1}, 3^{k+2})$, con unione disgiunta, si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \chi_{[3^k, 3^{k+1})}(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \chi_{[3^{k+1}, 3^{k+2})}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \chi_{[3^k, 3^{k+1})}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \chi_{[3^k, 3^{k+1})}(x) \\ &= \chi_{[1, 3)}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} \right) \chi_{[3^k, 3^{k+1})}(x) \\ &= \chi_{[1, 3)}(x) + 3 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \chi_{[3^k, 3^{k+1})}(x). \end{aligned}$$

Dal momento che per ogni x in $(1, +\infty)$ uno solo degli addendi è diverso da zero, si ha

$$|f(x)|^p = \chi_{[1,3)}(x) + 3^p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{kp}} \chi_{[3^k, 3^{k+1})}(x).$$

Essendo ogni addendo non negativo, uno dei corollari del teorema di Beppo Levi permette di affermare che

$$\int_{(1, +\infty)} |f(x)|^p = 2 + 2 \cdot 3^p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{2^{kp}}.$$

L'ultima serie converge se e solo se $2^p > 3$ e quindi per $p > \log_2(3)$. Inoltre, essendo $0 \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$, f appartiene ad $L^\infty((1, +\infty))$.

3) Sia

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(kx) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{k} \right).$$

Dopo aver dimostrato che f appartiene a $L^2((-\pi, \pi))$, calcolare (giustificando i passaggi)

$$\int_0^\pi f(x) dx.$$

La funzione f è limitata su $(-\pi, \pi)$?

Dal momento che $\operatorname{sen} \left(\frac{1}{k} \right)$ si comporta asintoticamente come $\frac{1}{k}$, ed essendo $\frac{1}{k}$ in ℓ^2 , la funzione f appartiene ad $L^2((-\pi, \pi))$, e la serie di Fourier converge in $L^2((-\pi, \pi))$. Essendo l'intervallo $(-\pi, \pi)$ di misura finita, la convergenza in L^2 implica la convergenza in L^1 , e pertanto

$$\int_{(0, \pi)} f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{k} \right) \int_{(0, \pi)} \cos(kx) = 0.$$

Infine, si ha

$$f(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{k} \right) = +\infty,$$

e quindi f non è limitata.

4) Siano $\alpha > 0$ e

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sen}(kx) \left(1 - \cos \left(\frac{1}{k^\alpha} \right) \right).$$

Per quali valori di α la funzione f appartiene a $C^4((-\pi, \pi))$?

La condizione sufficiente affinché f sia derivabile 4 volte con continuità è che la successione $k^4 \left(1 - \cos \left(\frac{1}{k^\alpha} \right) \right)$ appartenga ad ℓ^1 . Ricordando

che $1 - \cos(x) \approx \frac{x^2}{2}$ vicino all'origine, tale fatto è vero se e solo se è convergente la serie di termine generico $\frac{1}{k^{2\alpha-4}}$, ovvero se $\alpha > \frac{5}{2}$. Che succede se $\alpha = \frac{5}{2}$? In tal caso la serie di Fourier delle derivate quarte è “paragonabile” a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k},$$

che è (a meno di costanti) la serie di Fourier della funzione che vale $\frac{\pi-x}{2}$ per $x > 0$ e $-\frac{\pi+x}{2}$ se $x < 0$. Essendo tale funzione discontinua, se $\alpha = \frac{5}{2}$ la serie delle derivate quarte di f converge ad una funzione discontinua (e quindi f non è C^4). Un ragionamento analogo vale se $\alpha < \frac{5}{2}$.

5) Ricordando che la trasformata di Fourier di $e^{-x^2/2}$ è $e^{-\xi^2/2}$ (tutte le costanti sono state prese uguali ad 1...), calcolare

$$\mathcal{F}(x e^{-x^2/2})(\xi), \quad \mathcal{F}(x^2 e^{-x^2/2})(\xi).$$

Innanzitutto, la funzione $x e^{-x^2/2}$ appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$. Infatti

$$\int_{\mathbb{R}} |x| e^{-x^2/2} dx = 2 \int_{(0, \infty)} x e^{-x^2/2} dx = -2 e^{-x^2/2} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = 2.$$

Pertanto,

$$\mathcal{F}(x e^{-x^2/2})(\xi) = i \left[\mathcal{F}(e^{-x^2/2})(\xi) \right]' = -i \xi e^{-\xi^2/2}.$$

Inoltre, la funzione $x^2 e^{-x^2/2}$ appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$. Infatti, integrando per parti,

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2/2} dx = -x e^{-x^2/2} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Pertanto,

$$\mathcal{F}(x^2 e^{-x^2/2})(\xi) = i \left[\mathcal{F}(x e^{-x^2/2})(\xi) \right]' = \left(\xi e^{-\xi^2/2} \right)' = e^{-\xi^2/2} (1 - \xi^2).$$

6) Calcolare, giustificando i passaggi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{B_1(0)} \max \left(-n, \min \left(\frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, n \right) \right) dx dy.$$

Detta

$$f_n(x, y) = \max \left(-n, \min \left(\frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, n \right) \right),$$

si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x, y) = \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2},$$

quasi ovunque in $B_1(0)$. Inoltre, si ha

$$|f_n(x, y)| \leq \frac{x^2 |y|}{(x^2 + y^2)^2} = g(x, y).$$

Essendo (usando le coordinate polari)

$$\iint_{B_1(0)} \frac{x^2 |y|}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\rho^3 \cos^2(\theta) |\sin(\theta)|}{\rho^4} \rho d\rho d\theta,$$

ed essendo l'ultimo integrale finito, la funzione g è in $L^1(B_1(0))$. Per il teorema di Lebesgue, si ha che il limite richiesto è l'integrale

$$\int_{B_1(0)} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} dx dy.$$

Passando in coordinate polari, si ha

$$\int_{B_1(0)} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta = 0.$$

In maniera più semplice, è sufficiente osservare che la funzione integranda è, per ogni n , limitata e “dispari” rispetto alla variabile y . Pertanto l'integrale è nullo per ogni n , e quindi il limite richiesto vale 0.

7) Studiare la convergenza in $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq +\infty$, della successione di funzioni

$$f_n(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \chi_{D_n}(x, y),$$

dove

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - n)^2 + y^2 \leq n^2\}.$$

Il primo passo consiste nel calcolare il limite della successione $\chi_{D_n}(x, y)$. Dal momento che

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2nx \leq 0\},$$

è facile vedere che ogni coppia (x, y) con $x > 0$ e y qualsiasi appartiene definitivamente a D_n , mentre tutte le coppie (x, y) con $x \leq 0$ e y qualsiasi (tranne l'origine) non appartengono a nessuno dei D_n . Pertanto, detto $D_\infty = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, la successione di funzioni χ_{D_n} converge quasi ovunque (abbiamo “eliminato” solo l'origine) a χ_{D_∞} . Dal momento che la successione D_n è “crescente”, si ha

$$0 \leq f_n(x, y) \leq \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \chi_{D_\infty}(x, y) = f(x, y).$$

Essendo $f(x, y)$ in $L^p(\mathbb{R}^2)$ per ogni $p > 1$, il teorema di Lebesgue permette di concludere che f_n converge a f in $L^p(\mathbb{R}^2)$ per ogni $p > 1$. Essendo, inoltre, f non appartenente a $L^1(\mathbb{R}^2)$ non c'è convergenza in $L^1(\mathbb{R}^2)$. Rimane da studiare il caso $p = \infty$. In questo caso è sufficiente

osservare che $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \sqrt{4 - \frac{1}{n^2}})$ appartiene a D_∞ ma non a D_n (per nessun n). Pertanto,

$$\operatorname{ess\,sup} |f_n - f| \geq |f(x_n, y_n)| = \frac{1}{5},$$

e quindi non si ha convergenza in $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.