

1.1 Esercizio

- Verificare che l'equazione $y = xy + \ln y$ definisce in un intorno di $P = (1, 1)$ una funzione $y = f(x)$.
- Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $(1, 1)$,
- Determinare il polinomio di Taylor di punto iniziale $x_0 = 1$ di ordine 2 della $f(x)$.

1.2 Esercizio

Sia $F(x, y) = \cos(xy) + y - \frac{2}{\pi}x$.

- Dimostrare che l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente, in un intorno del punto $P_0 = (\frac{\pi}{2}, 0)$, una funzione $x = g(y)$;
- determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $x = g(y)$ nel punto P_0 ;
- determinare il polinomio di Taylor del secondo ordine di $g(y)$ di punto iniziale $y_0 = 0$.

1.3 Esercizio

Sia $F(x, y) = 2x^2 + 5xy + 11x - 3y^2 - 2y + 5$.

- Disegnare la linea di livello $F(x, y) = 0$.
- Giustificare l'affermazione: l'equazione $F(x, y) = 0$ non definisce implicitamente nè una funzione $y = g(x)$ nè una funzione $x = h(y)$ in alcun intorno del punto $(-8/7, -9/7)$.
- Dimostrare che l'equazione $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = f(x)$ in un intorno di $(1, -2)$.
- Determinare il polinomio di Taylor di secondo ordine relativo a tale $f(x)$ e di punto iniziale $x_0 = 1$.

1.4 Esercizio

Sia $F(x, y) = e^{2y^3+y} - x - x^3 - 1$.

- Dimostrare che $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = f(x)$ definita in un intorno di $x_0 = 0$;
- determinare il polinomio di Taylor di secondo ordine relativo a tale $f(x)$ e di punto iniziale $x_0 = 0$;
- calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

1.5 Esercizio

Sia $f_a(x, y) = \sin(x) + e^{x+y} + ax + y^3 + y - 1$.

- Verificare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ in un intorno del punto $(0, 0)$ l'equazione $f_a(x, y) = 0$ definisce in modo esplicito la funzione $y_a(x)$ tale che $f_a[x, y(x)] = 0$;
- determinare a in modo tale che la funzione y_a abbia un punto di massimo relativo in 0 ;
- dimostrare che per ogni $a > 1$ la funzione y_a è decrescente in tutto il suo intervallo di definizione.

1.6 Esercizio

Sia a un numero reale e sia $F_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la famiglia di funzioni definita da

$$F_a(x, y) = e^{xy} - \cos(x + y) - x - ax + ay.$$

- Determinare per quali valori di a è possibile applicare all'equazione $F_a(x, y) = 0$ il teorema delle funzioni implicite in un intorno del punto $P = (0, 0)$, in modo che y sia una funzione di x .
- Detta $f(x)$ tale funzione, si trovino ulteriori condizioni su a in modo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x}{\sin(x)} = 0.$$

1.7 Esercizio

Sia $F(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 6z^2 + 2x - 3y - 4$.

- Dimostrare che l'equazione $F(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente una superficie $z = f(x, y)$ in un intorno del punto $(0, 2, 1)$;
- determinare il piano tangente alla superficie nel punto $(0, 2, 1)$;
- riconoscere la forma geometrica della superficie trovata.

1.8 Esercizio

Sia $F(x, y, z) = e^z + x^2 y^2 z - e^{xy} + x^4 - y^4$.

- Dimostrare che l'equazione $F(x, y, z) = 0$ determina una funzione implicita $z = g(x, y)$ definita per (x, y) in un intorno dell'origine;
- determinare il valore di $g(0, 0)$;
- riconoscere che l'origine è un punto stazionario per la $g(x, y)$;
- riconoscere il tipo di tale punto.