**Analisi Vettoriale A.A. 2006-2007 - Foglio 4**

# 1 Esercizio

*Sia* $\Sigma$ *la superficie cartesiana*

$$z = 1 - x - y, \quad (x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \leq 1\},$$

- *determinare in ogni punto di* $\Sigma$ *il versore normale diretto nel verso delle* $z$ *crescenti,*
- *determinare l'area di* $\Sigma$, *ed esaminare il collegamento tra essa e l'area del cerchio* $D$.

# 2 Esercizio

*Determinare l'area della superficie cartesiana* $\Sigma$

$$z = 3x^2 + 2y^2 \ , \qquad (x, y) \in D = \{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\} \ .$$

# 3 Esercizio

*Dato il tetraedro* $\Omega = \{x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, x + y + z \leq 1\}$, *e detta* $\partial\Omega$ *la sua frontiera, calcolare l'integrale superficiale*

$$\int\int_{\partial\Omega} xyz \, d\,\sigma \ .$$

# 4 Esercizio

*Sia* $\overrightarrow{F} = \{x + y,\, z,\, x\}$ : *calcolare il flusso*

$$\int\int_{\partial Q} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, d\sigma$$

*di* $F$ *uscente dal cubo* $Q = \{|x| \leq 1,\, |y| \leq 1,\, |z| \leq 1\}$.

## 5 Esercizio

*Assegnata la semipalla* $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$

- *determinare il versore normale esterno* $\overrightarrow{\nu}$ *a* $\partial\Omega$ *(la sua frontiera),*
- *dato il campo scalare* $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ *, determinare l'espressione delle derivata* $\frac{df}{d\nu}$ *,*
- *calcolare l'integrale superficiale*

$$\int\int_{\partial\Omega} \frac{df}{d\nu}\, d\sigma,$$

- *ricavare tale integrale servendosi del teorema della divergenza.*

## 6 Esercizio

*Sia* $\mathcal{C}$ *la curva dello spazio di equazioni parametriche*

$$x = \cos(t),\ y = \sin(t),\ z = \cos(t) + \sin(t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

- *determinare il versore tangente* $\overrightarrow{\tau}$ *alla curva* $\mathcal{C}$ *orientata nel verso delle* $t$ *crescenti,*
- *determinare il lavoro* $\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\tau}\, ds$ *essendo* $\overrightarrow{F} = \{y, x, z\}$*,*
- *determinare, dandone la rappresentazione parametrica, una superficie di cui* $\mathcal{C}$ *sia il bordo,*
- *esprimere il lavoro richiesto precedentemente tramite il teorema di Stokes.*

## 7 Esercizio

*Sia* $\Sigma$ *la superficie ottenuta per rotazione di* $y = x - 1,\ x \in [1, 2]$ *intorno all'asse* $y$ :

- *fornire una rappresentazione parametrica di tale superficie,*
- *calcolare la sua area,*
- *calcolare l'integrale superficiale*

$$\int\int_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) d\,\sigma\ .$$