Analisi Vettoriale - Primo esonero - 26 ottobre 2006

Esercizio 1. Sia $F(x,y) = e^{xy} + x^2y - 2x - 2y + 1$.

a) Dimostrare che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente, in un intorno del punto $P_0 = (1,0)$, una funzione $y = f(x)$ oppure $x = g(y)$;

b) scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine della funzione trovata nel punto P_0;

c) dimostrare che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente, in un intorno del punto $P_1 = (0,1)$, una funzione $y = f(x)$ oppure $x = g(y)$;

d) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione trovata nel punto P_1.

Esercizio 2. Siano $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ e

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

a) Disegnare l'insieme D;

b) giustificare l'esistenza del massimo e del minimo di f nell'insieme D;

c) determinare $\max_D f(x,y)$ e $\min_D f(x,y)$.

Esercizio 3.

a) Calcolare l'area del dominio D limitato dall'asse x e dall'arco di spirale

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t \qquad 0 \leq t \leq \pi.$$

b) Assegnato il campo vettoriale $\overrightarrow{F} = (x^2, xy)$, calcolare $\displaystyle\iint_D \operatorname{div}\overrightarrow{F}\,dx\,dy$

(sapendo che $\int_0^\pi t^3 \cos t\,dt = 12 - 3\pi^2$).

Esercizio 4. Sia Σ la superficie

$$\begin{cases} x = & u - v \\ y = & u + v \\ z = & u^2 + v \end{cases} \qquad 0 \leq u \leq 1;\ 0 \leq v \leq 1$$

a) verificare che Σ è una superficie regolare;

b) calcolare $\displaystyle\iint_\Sigma (x+y)\,d\sigma$.