

**Analisi Vettoriale - Secondo esonero - 30 novembre 2006**

**Esercizio 1.**

- i) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare omogenea

$$y'' + \beta y = 0$$

al variare di  $\beta \in \mathbb{R}$ .

- ii) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + \beta y = \cos(2x)$$

al variare di  $\beta \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 2.** Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = x^2(y^2 + y - 2), \quad y(0) = \alpha$$

per  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 2$ .

**Esercizio 3.** Si consideri il problema di Cauchy

$$y' = \arctan y, \quad y(0) = y_0 \tag{1}$$

- i) Verificare che sussistono le ipotesi del teorema di esistenza e unicità per ogni  $y_0 \in \mathbb{R}$ .
- ii) Determinare per quali  $y_0$  il problema ammette una soluzione costante.
- iii) Si studi qualitativamente, in un intorno dell'origine, la soluzione del problema (1) per  $y_0 > 0$  (monotonia e convessità).

**Esercizio 4.** Data la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^{k-1}} (\log x)^{k-1}, \quad x > 0 \tag{2}$$

- i) determinare per quali  $x > 0$  la serie converge;
- ii) calcolare la somma  $S(x)$  della serie (2);
- iii) calcolare

$$\int_1^e \frac{S(x)}{x} dx.$$