Analisi Vettoriale A.A. 2006-2007 - Soluzioni del Foglio 1

1.1 Esercizio

- *Dimostrare che l'equazione* $y = xy + \ln y$ *definisce in un intorno di* $P = (1,1)$ *una funzione* $y = f(x)$.
- *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di* $y = f(x)$ *nel* punto $(1,1)$,
- *Determinare il polinomio di Taylor di punto iniziale* $x_0 = 1$ *di ordine* 2 *della* $f(x)$.

$\boxed{\text{Soluzione.}}$

- Posto $F(x,y) = y - xy - \log(y)$:
  - $F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$;
  - il punto assegnato $(1,1)$ soddisfa l'equazione $F(x,y) = 0$;
  - in tale punto riesce $F_y(x,y) = 1 - x - 1/y \neq 0$ cosa che accade essendo $F_y(1,1) = -1$

  quindi l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce, per x in un intorno di $x_0 = 1$, una funzione implicita $y = f(x)$, $f(1) = 1$.

  Tale funzione $f(x)$ è, nell'intorno di $x_0 = 1$ in cui è definita anche infinitamente derivabile.

- L'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $(1,1)$, è $y - 1 = f'(1)(x-1)$. Dal teorema di Dini si ha

  $$f'(x) = -\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))} = -\frac{-f(x)}{1 - x - 1/f(x)},\ f'(1) = -1.$$

  La retta tangente è pertanto

  $$y = 1 - (x-1) \ \rightarrow\ y = 2 - x.$$

- Il polinomio di Taylor richiesto è, per definizione

  $$P(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2$$

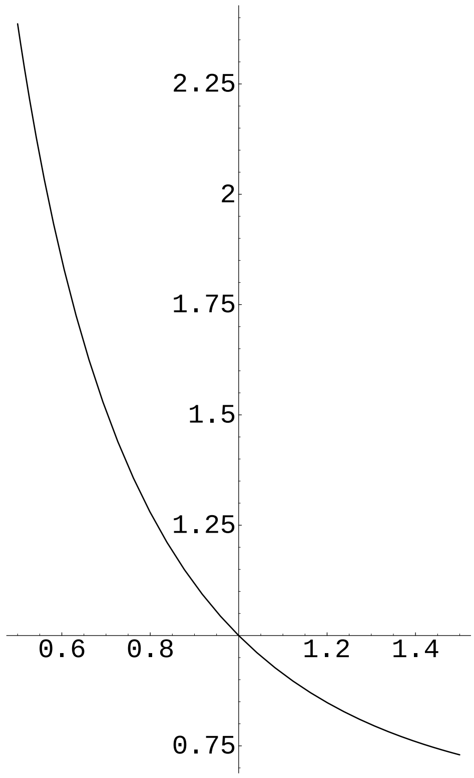

Figure 1: Il luogo del piano $y - xy - \log(y) = 0$.

Per determinarlo occorre determinare i due valori $f'(1)$ (già calcolato) $f''(1)$:

$$f(x) - x\, f(x) - \log(f(x)) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) - f(x) - x\, f'(x) - f'(x)/f(x) \equiv 0$$

$$\Rightarrow f''(x) - f'(x) - f'(x) - xf''(x)\frac{f''(x)f(x) - f'^2(x)}{f^2(x)} = 0$$

$$f''(1) - f'(1) - f'(1) - 1f''(1) - \frac{f''(1)f(1) - f'^2(1)}{f^2(1)} = 0$$

$$\Rightarrow f''(1) = 3$$

Ne segue

$$P(x) = 1 - (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2$$

ovvero

$$P(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2}$$

OSS. L'equazione $y - xy - \log(y) = 0$ è risolvibile molto più facilmente rispetto ad x che non rispetto da y

$$x = g(y) = 1 - \frac{1}{y}\log(y)$$

La funzione $y = f(x)$ cercata é semplicemente l'inversa della $g(y)$ di cui sopra.

Il grafico della $x = g(y)$ si disegna facilmente, ad esempio con MATHEMATICA: il grafico dell'inversa $y = f(x)$ é semplicemente il simmetrico rispetto alla bisettrice del primo quadrante ...

1.2 Esercizio

Sia $F(x, y) = \cos(xy) + y - \frac{2}{\pi}x$.

- *Dimostrare che l'equazione* $F(x, y) = 0$ *definisce implicitamente, in un intorno del punto* $P_0 = (\frac{\pi}{2}, 0)$, *una funzione* $x = g(y)$;
- *determinare l'equazione della retta tangente al grafico di* $x = g(y)$ *nel punto* P_0;
- *determinare il polinomio di Taylor del secondo ordine di* $g(y)$ *di punto iniziale* $y_0 = 0$.

$\boxed{\text{Soluzione.}}$

- Occorre verificare che siano soddisfatte nel punto P_0 le condizioni sufficienti del teorema di Dini:
  - $F \in C^1$ almeno in un intorno del punto assegnato;
  - $F(\frac{\pi}{2}, 0) = 0$;
  - $F_x(x, y) = -y\sin(xy) - \frac{2}{\pi}$, $F_x(\frac{\pi}{2}, 0) = -\frac{2}{\pi} \neq 0$
- L'equazione della retta tangente al grafico di $x = g(y)$ nel punto $(\frac{\pi}{2}, 0)$, è $x - \frac{\pi}{2} = g'(0)(y - 0)$. Dal teorema di Dini si ha

$$g'(y) = -\frac{F_y(g(y), y)}{F_x(g(y), y)} = -\frac{-g(y)\sin(g(y)y) + 1}{-y\sin(g(y)y) - 2/\pi},\ g'(0) = \frac{\pi}{2}.$$

La retta tangente è pertanto

$$\frac{\pi}{2}(y+1)-x=0.$$

- Il polinomio di Taylor richiesto è

$$P_2(y)=g(0)+g'(0)y+\frac{1}{2}g''(0)y^2.$$

Per scriverlo esplicitamente manca solo il coefficiente $g''(0)$. Derivando rispetto a y la relazione

$$F_x(g(y),y)g'(y)+F_y(g(y),y)=0$$

si trova

$$F_{yy}+2F_{xy}g'+F_{xx}(g')^2+F_xg''=0$$

da cui, per $y=0$,

$$F_y(\frac{\pi}{2},0)=1,\, F_x(\frac{\pi}{2},0)=-\frac{2}{\pi},$$

$$F_{yy}(\frac{\pi}{2},0)=-\frac{\pi^2}{4},\, F_{xy}(\frac{\pi}{2},0)=0,\, F_{xx}(\frac{\pi}{2},0)=0$$

quindi

$$-\frac{\pi^2}{4}-\frac{2}{\pi}g''(0)=0\ \rightarrow\ g''(0)=-\frac{\pi^3}{8}.$$

Il polinomio di Taylor richiesto è

$$P_2(y)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}y-\frac{1}{2}\frac{\pi^3}{8}y^2.$$

1.3 Esercizio

Sia

$$F(x,y)=2x^2+5xy+11x-3y^2-2y+5$$

- *Disegnare la linea di livello* $F(x,y)=0$*,*
- *giustificare l'affermazione:* $F(x,y)=0$ *non definisce implicitamente né una funzione* $y=g(x)$ *né una* $x=h(y)$ *in alcun intorno di* $(-8/7,-9/7)$*;*
- *definisce invece una funzione implicita* $y=f(x)$ *in un intorno di* $(1,-2)$*;*

- *determinare il polinomio di Taylor di secondo ordine relativo a tale* $f(x)$ *e di punto iniziale* $(1, -2)$

$\boxed{\text{Soluzione.}}$

- $$F(x, y) = (x + 3y + 5)(2x - y + 1)$$

  pertanto la linea di livello è formata dalle due rette $x + 3y + 5 = 0$ e $2x - y + 1 = 0$.
  La fattorizzazione di $F(x, y)$ osservata corrisponde allo spezzamento della conica $F(x, y) = 0$ in due rette [1];

- il punto $(-8/7, -9/7)$ è l'intersezione delle due rette di sopra;

- il punto $(1, -2)$ appartiene alla retta $x + 3y + 5 = 0$, la funzione implicita é
  $$y = f(x) = -\frac{1}{3}(x + 5)$$

- l'espressione data sopra per $f(x)$ è già quella dello sviluppo di Taylor richiesto.

1.4 Esercizio

Sia
$$F(x, y) = e^{2y^3 + y} - x - x^3 - 1 \ ,$$

- *dimostrare che* $F(x, y) = 0$ *definisce implicitamente una funzione* $y = f(x)$ *definita in un intorno di* $x = 0$*;*

- *determinare il polinomio di Taylor di secondo ordine relativo a tale* $f(x)$ *e di punto iniziale* $x = 0$

- *calcolare*
  $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} \ .$$

[1] Ricordate che scritta l'espressione di secondo grado della conica nella forma
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$
lo spezzamento corrisponde all'annullarsi del determinante della matrice (a_{hk}).

$\boxed{\text{Soluzione.}}$

- $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $F(0,0) = 0$, $F_y(0,0) = 1 \neq 0$, quindi il teorema di Dini assicura l'esistenza di $y = f(x)$ definita in un intorno I di $x = 0$. La funzione $y(x) \in C^\infty(I)$.

  La funzione implicita $y = f(x)$ è in realtà definita almeno per ogni $x \geq 0$: infatti e^{2y^3+y} é monotona crescente[2] e al variare di $y \in (-\infty, +\infty)$ prende tutti i valori positivi, quindi in particolare quelli espressi da $x^3 + x + 1$ per ogni $x \geq 0$.

  Tenuto conto che l'espressione $x^3 + x + 1$ é positiva per $x > -0.67...$ se ne deduce che per $x > -0.67...$ esiste ed é unica y tale che $e^{2y^3+y} = x^3 + x + 1$.

- $$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = x - \frac{1}{2}x^2$$

  Il calcolo dei due coefficienti è stato condotto con le regole che forniscono le derivate della funzione implicita nel punto x_0.

- Servendosi della precedente approssimazione di Taylor si ha

  $$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

  La risposta é... *il limite non esiste* !

1.5 Esercizio

Sia $f_a(x, y) = \sin(x) + e^{x+y} + ax + y^3 + y - 1$.

- *Verificare che per ogni* $a \in \mathbb{R}$ *in un intorno del punto* $(0,0)$ *l'equazione* $f_a(x, y) = 0$ *definisce in modo implicito la funzione* $y_a(x)$ *tale che* $f_a[x, y(x)] = 0$;
- *determinare* a *in modo tale che la funzione* y_a *abbia un punto di massimo relativo in* 0;
- *dimostrare che per ogni* $a > 1$ *la funzione* y_a *è decrescente in tutto il suo intervallo di definizione.*

[2] É composta da due funzioni crescenti e^t e $2t^3 + t$

$\boxed{\text{SOLUZIONE.}}$

- Sono soddisfatte le condizioni sufficienti del teorema di Dini:

$$f_a \in C^1(\mathbb{R}^2); f_a(0,0) = 0;$$

$$f'_{ay}(x,y) := \frac{\partial f_a(x,y)}{\partial y} = \mathrm{e}^{x+y} + 3y^2 + 1; \quad \frac{\partial f_a(0,0)}{\partial y} = 2 \neq 0$$

- Il teorema di Dini esprime

$$y'_a(x) = -\frac{f'_{ax}(x,y(x))}{f'_{ay}(x,y(x))} \tag{1}$$

da cui segue

$$y'_a(x) = -\frac{\cos(x) + \mathrm{e}^{x+y} + a}{\mathrm{e}^{x+y} + 3y^2 + 1}$$

$$y'_a(0) = -\frac{1+1+a}{2} = 0 \to a = -2.$$

Per riconoscere che si tratta di un punto di massimo non resta che calcolare la derivata seconda $y''(0)$: sempre dal teorema di Dini, per $a = -2$, riesce

$$f_{xx} + 2f_{xy}y' + f_y(y')^2 + f_y y'' = 0$$

formula che, nel punto $x = 0$, produce

$$y''_{-2}(0) = -\frac{f_{xx}(0,0)}{f_y(0,0)} = -\frac{1}{2}.$$

Il valore negativo della derivata seconda garantisce il punto di massimo.

- Tenuto conto dell'espressione (1) di $y'_a(x)$, opposto di una frazione con numeratore

$$\cos(x) + \mathrm{e}^{x+y} + a \geq \cos(x) + a \geq -1 + a$$

e denominatore positivo, si riconosce, tenuto nconto del segno $-$ avanti alla frazione, che se $a > 1$ si ha $y'_a(x) < 0$.

1.6 Esercizio

Sia a un numero reale e sia $F_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la famiglia di funzioni definita da

$$F_a(x, y) = \mathrm{e}^{xy} - \cos(x + y) - x - ax + ay.$$

- *Determinare per quali valori di a è possibile applicare all'equazione $F_a(x, y) = 0$ il teorema delle funzioni implicite in un intorno del punto $P = (0, 0)$, in modo che y sia una funzione di x.*
- *Detta $f(x)$ tale funzione, si trovino ulteriori condizioni su a in modo che*
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + x}{\sin(x)} = 0.$$

$\boxed{\text{Soluzione.}}$

- Risulta $F_a(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e si ha $F_a(0, 0) = 0$ qualunque sia a. Inoltre deve essere
$$\frac{\partial}{\partial y} F_a(x, y)|_{x=0,y=0} = x\mathrm{e}^{xy} - \sin(x + y) + a\Big|_{x=0,y=0} = a \neq 0.$$
Se $a \neq 0$ sono verificate le ipotesi del teorema di Dini che assicurano che l'equazione $F_a(x, y) = 0$ definisce, per x in un intorno di $x_0 = 0$, una funzione $y = f(x)$, $f(0) = 0$, $f \in C^1$. Inoltre sappiamo che
$$f'(0) = -\frac{F_{ax}(0, 0)}{F_{ay}(0, 0)} = -\frac{y\mathrm{e}^{xy} + \sin(x + y) - 1 - a}{x\mathrm{e}^{xy} - \sin(x + y) + a}\Big|_{x=0,y=0} = \frac{1 + a}{a}.$$
- $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + x}{\sin(x)} = 0$$
Si tratta del quoziente di due funzioni di classe C^1, infinitesime per $x \to 0$.

  Servendosi del teorema di Hôpital si può quindi cercare il limite del quoziente delle derivate
$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) + 1}{\cos(x)} = \frac{\frac{1+a}{a} + 1}{1}.$$
Ne segue che per avere limite 0 deve essere
$$a = -\frac{1}{2}.$$

1.7 Esercizio

Sia

$$F(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 6z^2 + 2x - 3y - 4 \ ,$$

- *dimostrare che l'equazione $F(x,y,z) = 0$ definisce implicitamente una superficie $z = f(x,y)$ in un intorno del punto (0,2,1),*
- *determinare il piano tangente alla superficie nel punto (0,2,1).*
- *riconoscere la forma geometrica della superficie trovata.*

Soluzione.

- $F(x,y,z) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $F(0,2,1) = 0$, $\quad F_z(0,2,1) = 2 \neq 0$, quindi la superficie $F(x,y,z) = 0$ coincide, in un intorno di $(0,2,1)$ con il grafico di una funzione $z = f(x,y)$
- $$\begin{cases} F_x + F_z f_x = 0 \\ F_y + F_z f_y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 + 12 f_x = 0 \\ 1 + 12 f_y = 0 \end{cases}$$

  Se ne ricava

  $$f_x(0,2) = -\frac{1}{6}, \quad f_y(0,2) = -\frac{1}{12}$$

  Il piano tangente è, pertanto,

  $$z = 1 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{12}(y-2)$$

- L'equazione $F(x,y,z) = 0$ è l'equazione di una quadrica dello spazio xyz: tenuto conto che la parte quadratica è definita positiva si riconosce che si tratta di un'ellissoide che si puó scrivere in forma canonica con pochi semplici passaggi algebrici

$$3x^2 + y^2 + 6z^2 + 2x - 3y - 4 =$$

$$= 3(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}) + (y^2 - 3y + \frac{9}{4}) + 6z^2 - 4 - \frac{1}{3} - \frac{9}{4} =$$

$$= 3(x + \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 + 6z^2 - \frac{79}{12}$$

$$\frac{(x+\frac{1}{3})^2}{\frac{79}{36}} + \frac{(y-\frac{3}{2})^2}{\frac{79}{12}} + \frac{z^2}{\frac{79}{72}} = 1$$

1.8 Esercizio

Sia

$$F(x,y,z) = e^z + x^2y^2z - e^{xy} + x^4 - y^4$$

- *dimostrare che l'equazione $F(x,y,z) = 0$ determina una funzione implicita $z = g(x,y)$ definita per (x,y) in un intorno dell'origine.*
- *determinare il valore $g(0,0)$*
- *riconoscere che l'origine è un punto stazionario per la $g(x,y)$*
- *riconoscere il tipo di tale punto: minimo, massimo o sella.*

Soluzione.

- $F(x,y,z) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $F(0,0,0) = 0$, $F_z(x,y,z) = e^z + x^2y \quad F_z(0,0,0) = 1 \neq 0$ quindi la superficie $F(x,y,z) = 0$ coincide, in un intorno dell'origine, con il grafico di una funzione $z = g(x,y)$ regolare che assume il valore $g(0,0) = 0$.
- Occorre riconoscere che

$$\nabla g(0,0) = \{0,0\} : F_x + F_z g_x = 0, \; F_y + F_z g_y = 0$$

eseguiti i conti in corrispondenza di $x = 0, y = 0$ si ottiene infatti

$$g_x(0,0) = 0, g_y(0,0) = 0$$

- Il tipo di tale punto stazionario per g si riconosce studiando il determinante della matrice hessiana nel punto

$$\begin{vmatrix} g_{xx}(0,0) & g_{xy}(0,0) \\ g_{yx}(0,0) & g_{yy}(0,0) \end{vmatrix}$$

Calcolo della derivata g_{xx} :

$$12\,x^2 - e^{x\,y}\,y^2 + 2\,y^2\,g(x,y) + 4\,x\,y^2\,g^{(1,0)}(x,y) +$$

$$+ e^{g(x,y)}\,{g^{(1,0)}(x,y)}^2 + e^{g(x,y)}\,g^{(2,0)}(x,y) + x^2\,y^2\,g^{(2,0)}(x,y) = 0$$

Il conto fatto per $x = 0$ e $y = 0$ produce, tenuto conto che le due derivate prime $g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0$, il valore

$$g_{xx}(0,0) = 0$$

Calcolo della derivata g_{yy} :

$$-\left(e^{x\,y}\,x^2\right) - 12\,y^2 + 2\,x^2\,g(x,y) + 4\,x^2\,y\,g^{(0,1)}(x,y) +$$

$$+e^{g(x,y)}\,g^{(0,1)}(x,y)^2 + e^{g(x,y)}\,g^{(0,2)}(x,y) + x^2\,y^2\,g^{(0,2)}(x,y) = 0$$

Il conto fatto per $x = 0$ e $y = 0$ produce, tenuto conto che le due derivate prime $g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0$, il valore

$$g_{yy}(0,0) = 0$$

Calcolo della derivata g_{xy} :

$$-e^{x\,y} - e^{x\,y}\,x\,y + 4\,x\,y\,g(x,y) + 2\,x\,y^2\,g^{(0,1)}(x,y) +$$

$$+2\,x^2\,y\,g^{(1,0)}(x,y) + e^{g(x,y)}\,g^{(0,1)}(x,y)\,g^{(1,0)}(x,y) +$$

$$+e^{g(x,y)}\,g^{(1,1)}(x,y) + x^2\,y^2\,g^{(1,1)}(x,y) = 0$$

Il conto fatto per $x = 0$ e $y = 0$ produce, tenuto conto che le due derivate prime $g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0$, il valore

$$g_{yx}(0,0) = g_{xy}(0,0) = 1.$$

Sostituendo i valori trovati nel determinante hessiano si ottiene il valore -1 e quindi si riconosce che il punto stazionario $x = 0$, $y = 0$ è un punto di sella per g.