Analisi Vettoriale A.A. 2006-2007 - Soluzioni del Foglio 3

3.1 Esercizio

Determinare il flusso del campo $\overrightarrow{F} = \{3x^2 + y^2, x^3 - 3y^2\}$ *uscente dalla regione* $E = \{(x, y) : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x\}$.

Soluzione.

La regione assegnata è delimitata da un tratto di parabola e da una retta.

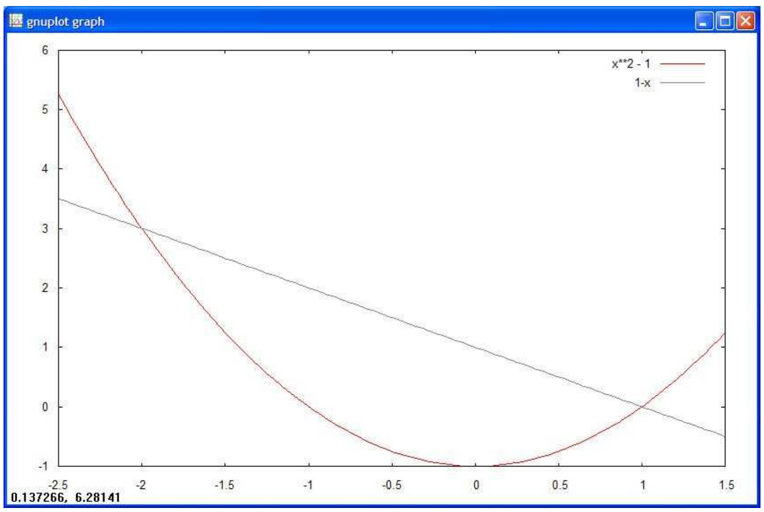

Figure 1: La regione E da cui calcolare il flusso uscente.

Il flusso richiesto può essere determinato tramite il *Teorema della divergenza*,

$$\int_{\partial E} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{n}\, ds = \int\int_E div\, \overrightarrow{F}\, dx\, dy = \int\int_E (6x - 6y)\, dx\, dy$$

Tenuto conto che E è il dominio normale rispetto all'asse x

$$-2 \leq x \leq 1, \quad x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x$$

si ha

$$6 \int\int_E (x - y)\, dx\, dy = 6 \int_{-2}^{1} dx \int_{x^2-1}^{1-x} (x - y)\, dy = -\frac{297}{10}.$$

3.2 Esercizio

Assegnato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F} = \left\{x^2 + y^2,\ x^2 - y^2\right\}$$

- *calcolare il flusso di* $\overrightarrow{F}$ *uscente dal dominio* $D = \{x^2 + 4y^2 \leq 1\}$
- *verificare il risultato ottenuto servendosi del teorema della divergenza.*

$\boxed{\text{Soluzione.}}$

Il flusso richiesto è, per definizione, il valore del seguente integrale

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, ds$$

essendo $\mathcal{C}$ l'ellisse $x^2 + 4y^2 = 1$ e $\overrightarrow{\nu}$ il versore normale a $\mathcal{C}$ orientato verso l'esterno di D. Il calcolo di $\overrightarrow{\nu}$ può essere fatto servendosi della rappresentazione parametrica di $\mathcal{C}$

$$x = \cos(\theta),\ y = \frac{1}{2}\sin(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\overrightarrow{t} = \frac{\{-\sin(\theta),\ \frac{1}{2}\cos(\theta)\}}{\sqrt{\sin^2(\theta) + \frac{1}{4}\cos^2(\theta)}} \to \overrightarrow{\nu} = \frac{\{\frac{1}{2}\cos(\theta),\ \sin(\theta)\}}{\sqrt{\sin^2(\theta) + \frac{1}{4}\cos^2(\theta)}}$$

É facile riconoscere che l'orientamento di $\overrightarrow{\nu}$ é quello richiesto.

L'espressione del ds è

$$ds = \sqrt{\sin^2(\theta) + \frac{1}{4}\cos^2(\theta)}\, d\,\theta$$

Pertanto il flusso richiesto é

$$\int_0^{2\pi} \left((\cos^2(\theta) + \frac{1}{4}\sin^2(\theta))\frac{1}{2}\cos(\theta) + (\cos^2(\theta) - \frac{1}{4}\sin^2(\theta))\sin(\theta)\right)\, d\,\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \frac{3}{4}\sin^2(\theta))\cos(\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} (\frac{5}{4}\cos^2(\theta) - \frac{1}{4})\sin(\theta) d\theta = 0$$

La verifica del teorema della divergenza

$$\int_{\partial D} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{\nu}\, ds = \int\int_D div(\overrightarrow{F})\, dx\, dy$$

richiede di calcolare anche l'integrale doppio a secondo membro e verificarne l'uguaglianza con il valore del flusso precedentemente trovato.

$$\int\int_D div(\overrightarrow{F})\,dx\,dy = \int\int_D (2x-2y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}} 2(x-y)dy = 2\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx = 0.$$

3.3 Esercizio

Calcolare le aree delle due regioni nelle quali la retta $y = 1 + (\sqrt{2}-1)x$ divide il cerchio $x^2+y^2 \leq 1$, servendosi del flusso del campo $F = \frac{1}{2}\{x,y\}$ uscente dalle loro frontiere.

$\boxed{\text{Soluzione.}}$

La retta $y = 1 + (\sqrt{2}-1)x$ interseca la circonferenza $x^2+y^2=1$ in due punti, vedi Figura 2,

$$A = (0,1), \quad B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

che corrispondono nella usuale rappresentazione parametrica della circonferenza a

$$A = (\cos(\pi/2), \sin(\pi/2)), \quad B = (\cos(3\pi/4), \sin(3\pi/4))$$

Le aree delle due regioni $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ corrispondono ai flussi sulle relative frontiere

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{C}_1} F \times \nu ds, \quad \frac{1}{2}\int_{\partial\mathcal{C}_2} F \times \nu ds$$

avendo indicato con $F = \{x,y\}$

Calcolo per la regione minore $\mathcal{C}_1$:

il versore normale sulla parte di circonferenza é $\nu = \{x,y\}$, sulla parte di retta è

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\left(\sqrt{2}-1,-1\right)$$

$$\int_{\partial\mathcal{C}_1} F \times \nu ds = \int_{\pi/2}^{3\pi/4} 1\,dt + \int_{-1/\sqrt{2}}^{0} (-1)dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.08$$

Se ne deduce quindi, ricordando il fattore $1/2$, che le aree delle due regioni sono rispettivamente:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \quad \pi - \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

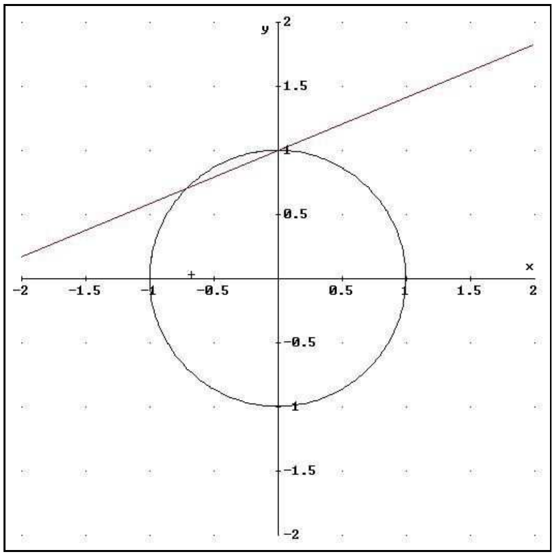

Figure 2: Le due regioni del cerchio

3.4 Esercizio

Sia C la curva di equazioni $x = \cos(t)$, $y = t\sin(t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

- *Trovare l'area della regione racchiusa*
- *Dire per quali $t \in [0, 2\pi]$ è definito il versore ν normale e calcolarlo.*

$\boxed{\text{Soluzione.}}$

$$\text{Area}(E) = \frac{1}{2}\int_{\partial E} \{x, y\} \times \nu \; ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos(t)(t\sin(t))' - t\sin(t)(\cos(t))'\}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos(t)\sin(t) + t\} dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} t dt = \pi^2$$

Il versore normale Cominciamo dal vettore tangente

$$\{(\cos(t))', \quad (t\sin(t))'\} = \{-\sin(t), \sin(t) + t\cos(t)\}$$

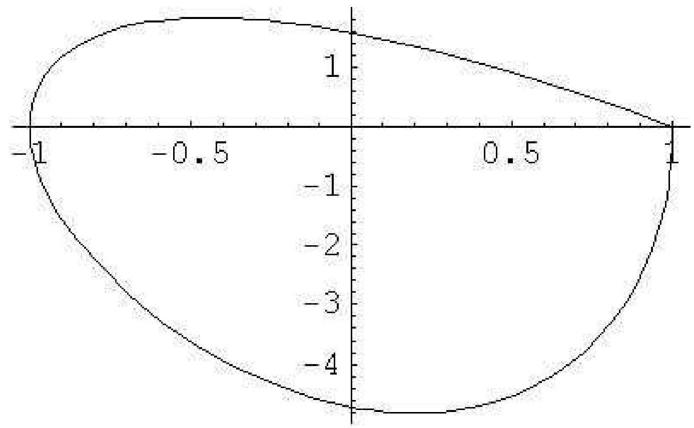

Figure 3: $x = \cos(t), \quad y = t\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$

Per $t = 0$ si ha il vettore nullo: quindi la rappresentazione parametrica offerta non soddisfa nel punto $t = 0$ ai requisiti di una curva regolare per la quale si richiede infatti

$$x'^2(t) \; + \; y'^2(t) \; > \; 0$$

Esiste, tuttavia, il limite per $t \to 0^+$ del versore tangente

$$\{-\left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{\sin(t)^2 + (t\,\cos(t) + \sin(t))^2}}\right), \frac{t\,\cos(t) + \sin(t)}{\sqrt{\sin(t)^2 + (t\,\cos(t) + \sin(t))^2}}\}$$

$$\left\{\frac{-1}{\sqrt{5}}, \quad \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$$

Limite che però è diverso dal limite per $t \to 2\pi$ che vale $\{0, 1\}$ vedi Figura 3. La curva assegnata è chiusa ma è dotata di versori tangente e normale solo per $0 < t < 2\pi$.

3.5 Esercizio

Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\overrightarrow{F} = (y + 3x, 2y - x)$ *per far compiere ad una particella un giro dell'ellisse* $4x^2 + y^2 = 4$ *in senso orario.*

$\boxed{\text{Soluzione.}}$

L'ellisse proposta, ∂E

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

ha equazioni parametriche

$$x = \cos(t), \quad y = 2\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Al crescere di t l'ellisse viene percorsa in senso antiorario.

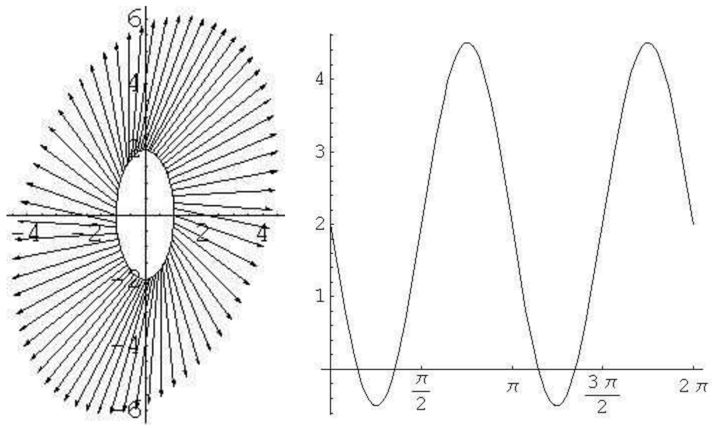

Figure 4: Il campo F sull'ellisse assegnata, a destra il grafico del prodotto scalare $F \times t$ con t orientata nel verso orario.

Il disegno di Figura 4 mostra come il prodotto scalare $F \times t$ da integrare faccia prevedere un risultato positivo.
Il lavoro richiesto é, tenuto conto del verso di percorrenza,

$$L = -\int_{\partial E} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \{(y(t) + 3x(t))\, x'(t) + (2y(t) - x(t))\, y'(t)\}\, dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \{[2\sin(t) + 3\cos(t)]\,[-\sin(t)] + [6\sin(t) - \cos(t)]\, 2\cos(t)\}\, dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} -2\sin^2(t) - 2\cos^2(t) dt = 2\int_0^{2\pi} dt = 4\pi$$

Usiamo il Teorema di Stokes I segni $-$ corrispondono alla richiesta di percorrere l'ellisse nel senso orario, che é l'opposto di quello offerto dalla parametrizzazione.

$$-\int_{\partial E} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = -\int\int_E [(2y - x)_x - (y + 3x)_y\ ]\, dxdy =$$

$$= -\int\int_E (-2)\ dxdy = 4\pi$$

OSSERVAZIONE. L'espressione trovata nell'integrale doppio, $F_{2,x} - F_{1,y} \neq 0$ si puó leggere anche dicendo che il campo $\overrightarrow{F}$ non é irrotazionale e, quindi non é conservativo.

3.6 Esercizio

- *Calcolare il lavoro del campo* $F = (xy-2, x^2+y^2)$ *lungo il segmento* $(0,0)-(1,2)$ *e lungo l'arco di parabola* $y = 2x^2$ *con gli stessi estremi*
- *sia* $u(x,y) = x^3 + yx^2$*: calcolare l'integrale della derivata normale di* u *lungo i due archi di curva dati precedentemente.*

$\boxed{\text{Soluzione.}}$

Il segmento La rappresentazione parametrica é $x(t) = t,\ y(t) = 2t,\ t \in [0,1]$, quindi il versore tangente é

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\{1,2\}$$

Ne segue

$$\int_S \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{(2t^2-2)1 + (t^2+4t^2)2\right\}\sqrt{5}dt = \int_0^1 (12t^2-2)dt = 2$$

L'arco di parabola La rappresentazione parametrica è $x(t) = t,\ y = 2t^2,\ t \in [0,1]$, quindi il versore tangente é

$$\frac{1}{\sqrt{1+16t^2}}\{1,4t\}$$

Ne segue

$$\int_S \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+16t^2}}\left\{(2t^3-2)1 + (t^2+4t^4)4t\right\}\sqrt{1+16t^2}dt =$$

$$= \int_0^1 \left\{(2t^3-2)1 + (t^2+4t^4)4t\right\}dt = \int_0^1 (16t^5+6t^3-2)dt = \frac{13}{6}$$

Derivata normale lungo il segmento La derivata normale è data da $\nabla U \times \nu$. Tenuto conto che $\nabla U = \{3x^2+2yx,\ x^2\}$ e che $\nu = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\{-2,1\}$

ne segue che l'integrale richiesto vale, tenuto conto della rappresentazione parametrica del segmento,

$$\pm \int_0^1 \{-2(3t^2 + 4t^2) + 1(t^2)\}dt = \pm \int_0^1 -13t^2 dt = \pm \frac{13}{3}$$

Come si vede, non avendo precisato l'orientamento della normale al segmento, si hanno come risposta due valori $\pm$.

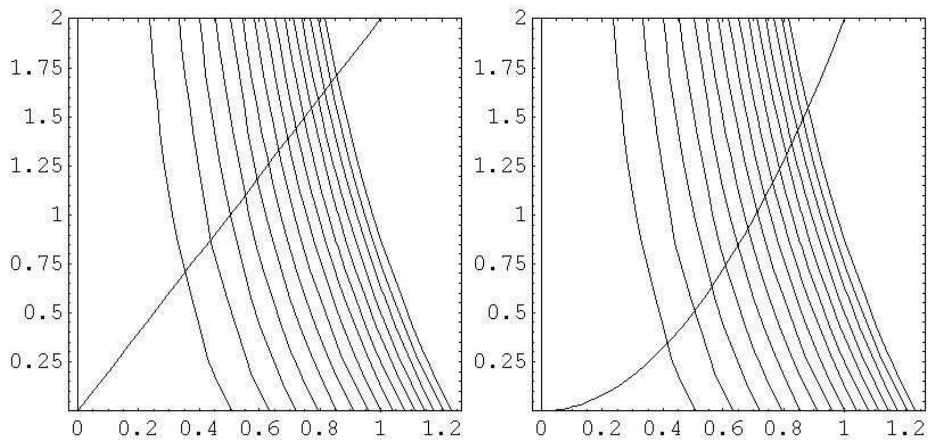

Figure 5: 15 linee di livello di $u(x, y) = x^3 + yx^2$ tra $[0, 2]$ e, rispettivamente, il segmento e l'arco di parabola, relative a livelli equidistribuiti.

Derivata normale lungo la parabola Come sopra con il versore normale

$$\nu = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + 16t^2}}\{-4t,\, 1\}$$

L'integrale richiesto è pertanto

$$\pm \int_0^1 \{-(3t^2 + 4t^3)4t + t^2\}dt = \pm \int_0^1 (t^2 - 12\,t^3 - 16\,t^4)dt = \pm \frac{88}{15}$$

Stessa ambiguità di segno precedentemente segnalata.

Cosa si legge dalle linee di livello ?

- Lungo ciascuna linea di livello la funzione è costante: quindi la derivata di una funzione lungo una direzione tangente alle linee di livello è nulla.
- La Figura (5) mostra come le direzioni normali, rispettivamente al segmento e all'arco di parabola, siano abbastanza vicine ad essere tangenti alle linee di livello della funzione $u(x, y) = x^3 + yx^2$

- Se ne deduce che le derivate normali richieste saranno abbastanza piccole in modulo.

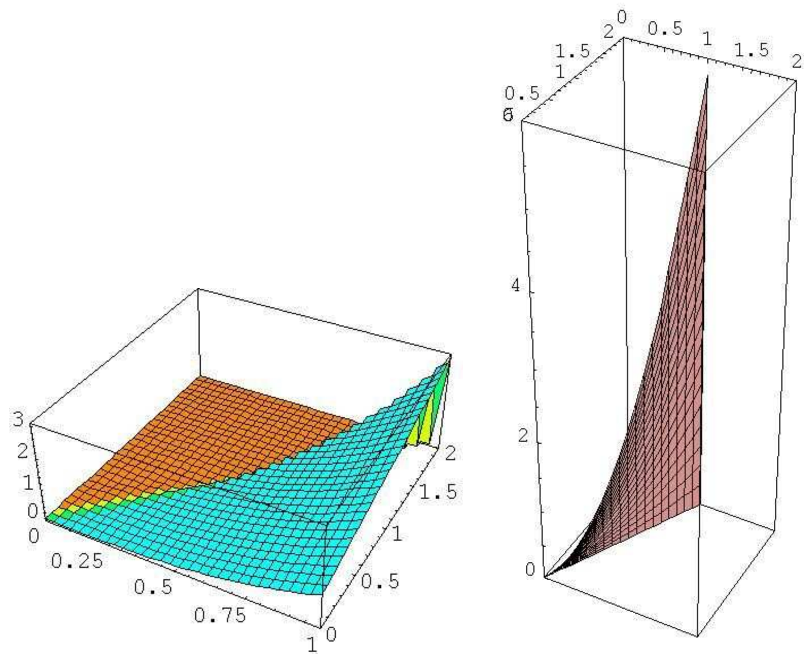

Figure 6: La superficie $u(x, y) = x^3 + yx^2$ e un muro alto quanto la sua derivata normale lungo il segmento...

- Ricordate che il gradiente ∇u é ortogonale alle linee di livello ed é in modulo tanto piú grande quanto piú le linee di livello relative a livelli equidistribuiti riescano vicine, vedi Figura (5).

3.7 Esercizio

Dire dove é definito il campo vettoriale

$$F = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y}} + y,\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2y}} - 2x \right\}$$

e calcolare il lavoro compiuto dal campo lungo la frontiera del rettangolo $D = (1, 2) \times (0, 1/2)$ *percorsa in senso antiorario.*

$\boxed{\text{Soluzione.}}$

Il campo F è definito nella parte di piano in Figura 7

$$x^2 + 2y > 0$$

insieme semplicemente connesso.

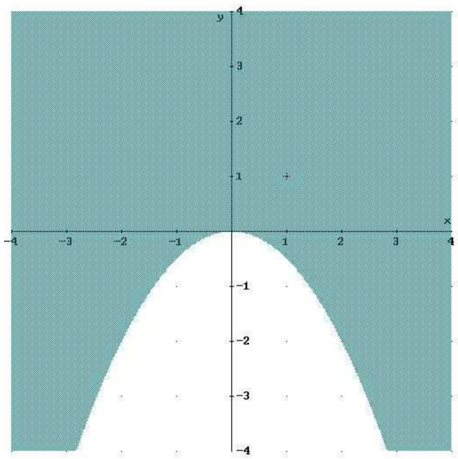

Figure 7: L'insieme, scuro, di definizione del campo F

Il lavoro richiesto è l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds$$

essendo C la poligonale rettangolare frontiera di D e $\overrightarrow{t}$ il versore tangente.

Tenuto presente che C è una curva chiusa si può applicare il Teorema di Stokes nel piano e quindi

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds = \int \int_{D} \mathrm{rot}_z \overrightarrow{F}\, dxdy$$

Tenuto presente che

$$\mathrm{rot}_z \overrightarrow{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2y}} + y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2y}} - 2x\right)$$

e che

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2y}} + y\right) = -2 - \frac{x}{(x^2+2\,y)^{\frac{3}{2}}}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2y}}-2x\right)=1-\frac{x}{(x^2+2\,y)^{\frac{3}{2}}}$$

si ha

$$\mathrm{rot}_z\overrightarrow{F}=-3$$

Ne segue

$$\int_{\mathcal{C}}\overrightarrow{F}\times\overrightarrow{t}\,ds=-3\int\int_D dxdy=-\frac{3}{2}$$

Il lavoro richiesto poteva essere calcolato anche direttamente senza servirsi della formula di Stokes al modo seguente:

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{\mathcal{C}}\overrightarrow{F}\times\overrightarrow{t}\,ds= \;& +\textstyle\int_1^2 dx+\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{4+2y}}-4\right)dy\\ & -\textstyle\int_1^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{2}\right)dx-\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2y}}-2\right)dy=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

3.8 Esercizio

Dato il campo vettoriale

$$F=(\frac{x-1}{((x-1)^2+y^2)^2},\;\frac{y}{((x-1)^2+y^2)^2})$$

i) Calcolare il rotore di F
ii) Dimostrare che F è conservativo e trovare un potenziale.

$\boxed{\text{Soluzione.}}$

É sottinteso che il vettore F ha la terza componente nulla, quindi il suo rotore ha le prime due componenti certamente nulle e la terza

$$\mathrm{rot}_zF=\frac{\partial}{\partial x}F_x-\frac{\partial}{\partial y}F_x$$

Indicato con $d(x,y)$ il denominatore delle due componenti di F si ha quindi

$$\mathrm{rot}_zF=\frac{1}{d^2(x,y)}\left(-y\,d_x\;+(x-1)\,d_y\right)=0$$

Il campo F è

- definito in R^2 privato del punto $Q=(1,0)$

- ha, in tutto R^2, privato del punto $Q = (1, 0)$, rotore nullo:
- quindi è conservativo in... ogni dominio rettangolare, anzi in ogni aperto stellato di R^2 che non includa Q,
- non è tuttavia escluso che sia conservativo in tutto R^2 privato del punto Q.

Per rispondere all'ultimo punto basta calcolare il lavoro di F lungo una circonferenza C di centro Q

$$\int_C \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t}\, ds$$

É evidente che tale integrale è nullo: infatti F è, in ogni punto della circon-

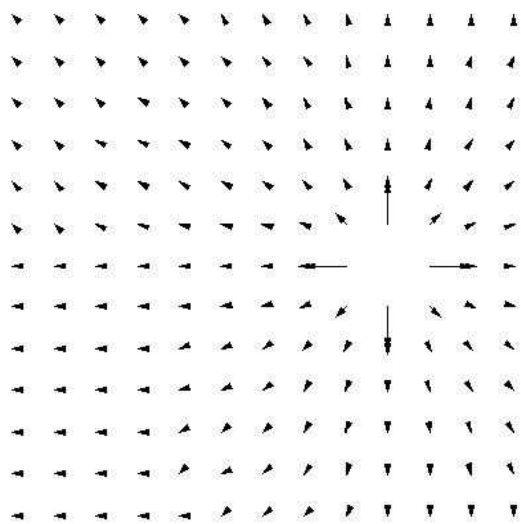

Figure 8: L'aspetto radiale del campo F intorno al punto Q

ferenza C diretto come il raggio, quindi è ortogonale al versore tangente $\overrightarrow{t}$ vedi Figura (8). Quindi F è conservativo in tutto R^2 privato naturalmente del punto Q e ammette potenziale: chiunque vede che le due componenti di F sono infatti, a meno di un ovvio fattore, le due derivate parziali di

$$\frac{1}{(x-1)^2 + y^2}$$

Un potenziale di F è

$$U(x,y) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2+y^2}$$

3.9 Esercizio

Sia $\overrightarrow{F}$ un campo irrotazionale, definito in R^2 privato dei due punti $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (2,0)$. Sapendo che

$$\int_{C_i} \overrightarrow{F}\,.\,\overrightarrow{t}\,ds = i, \quad i = 1,2$$

con C_i la circonferenza di centro P_i e raggio 1, calcolare l'integrale $\int_\gamma \overrightarrow{F}\,.\,\overrightarrow{t}\,ds$ essendo γ l'ellisse $4x^2 + 25y^2 = 25$.

$\boxed{\text{Soluzione.}}$

Essendo il campo F irrotazionale gli integrali sulle circonferenze C_i di raggio 1 sono uguali a quelli sulle circonferenze di raggi minori e stessi centri: per convincersene basta applicare il teorema di Stokes alla corona circolare di centro l'origine e raggi, ad esempio, 1/3 e 1

$$\int_{C_1(1)} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t} ds - \int_{C_1(1/3)} F \times t ds = \int\int_{Corona} \mathrm{rot}_z \overrightarrow{F}\; dxdy = 0$$

Ne segue quindi che

$$\int_{C_1(1/3)} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t} ds = 1$$

Tenuto conto di ciò si può applicare il teorema di Stokes alla regione, Figura (9), delimitata dalle due circonferenze di centri $P_i, i = 0,1$ e dall'ellisse assegnata e dedurne che

$$\int_E \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t} ds = \int_{C_1(1/3)} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t} ds + \int_{C_2(1/3)} \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t} ds = 1 + 2 = 3$$

3.10 Esercizio

Dato il campo vettoriale $F = (xy,\ (x^2 - y^2)/2)$

- *Si calcolino flusso uscente e circuitazione rispetto alla curva C di equazioni parametriche $x = \cos^3(t),\ y = \sin^3(t), \quad t \in [0, 2\pi]$*

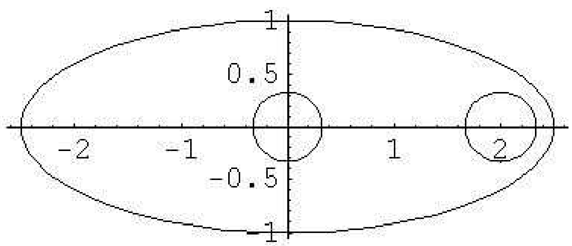

Figure 9: L'ellisse e le due circonferenze di raggio 1/3

- *Dimostrare che F é un campo vettoriale conservativo in tutto R e che i suoi potenziali sono funzioni armoniche.*
- *Costruire uno di tali potenziali.*

$\boxed{\text{Soluzione.}}$

Flusso uscente: la curva assegnata è chiusa quindi é la frontiera di una regione Ω del piano alla quale applicare il teorema della divergenza. Ma $\operatorname{div}(\overrightarrow{F}) = 0$, quindi il flusso richiesto vale 0.

La circuitazione Servendosi del Teorema di Stokes si ha

$$\int_C \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{t} ds = \int\int_\Omega \operatorname{rot}_z(\overrightarrow{F}) dx dy$$

Ma $\operatorname{rot}_z(\overrightarrow{F}) = 0$ quindi anche la circuitazione é nulla.

Campo conservativo $\overrightarrow{F}$ è irrotazionale in tutto R^2 quindi... è conservativo in tutto R^2.

Un potenziale Le primitive di xy rispetto ad x sono

$$\frac{1}{2}x^2y + g(y)$$

Basta imporre ora che tali funzioni abbiano come derivata rispetto ad y l'espressione $\frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ assegnata. A conti fatti questo si realizza prendendo

$$g(y) = -\frac{1}{6}y^3$$

Quindi un potenziale di F è la funzione

$$U(x, y) = \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3$$

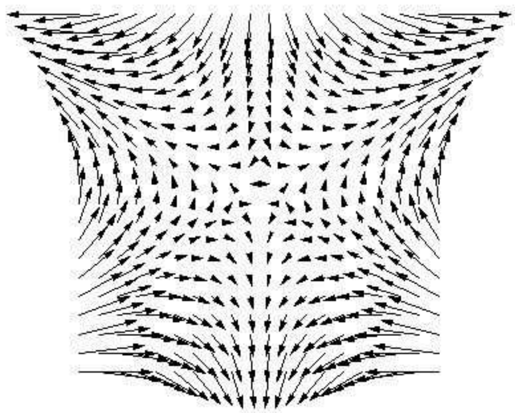

Figure 10: Il campo F dell'Esercizio 10 : non ci sono punti da cui *diverga*.

Questo vuol dire che

$$\overrightarrow{F} = \nabla U(x, y)$$

Il potenziale è armonico Si può verificare che

$$\triangle \left(\frac{1}{2} x^2 y - \frac{1}{6} y^3 \right) = 1 - 1 = 0$$

Notate del resto che

$$\triangle U(x, y) = \text{div } \nabla U(x, y) = \text{div} \overrightarrow{F}$$

e quindi si poteva prevedere che l'eventuale potenziale sarebbe stato una funzione armonica dal momento che il campo $\overrightarrow{F}$ aveva divergenza nulla, vedi Figura 10.