Analisi Vettoriale - Primo esonero - 26 ottobre 2006

Esercizio 1. Sia $F(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + x^2 y - 2x - 2y + 1$.

a) Dimostrare che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente, in un intorno del punto $P_0 = (1,0)$, una funzione $y = f(x)$ oppure $x = g(y)$;

b) scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine della funzione trovata nel punto P_0;

c) dimostrare che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente, in un intorno del punto $P_1 = (0,1)$, una funzione $y = f(x)$ oppure $x = g(y)$;

d) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione trovata nel punto P_1.

a) La funzione F si annulla nel punto P_0, come si verifica facilmente. Inoltre, essendo

$$F_x(x,y) = y\,\mathrm{e}^{xy} + 2x\,y - 2\,, \qquad F_y(x,y) = x\,\mathrm{e}^{xy} + x^2 - 2\,,$$

si ha $F_x(1,0) = -2$ e $F_y(1,0) = 0$. Si può pertanto applicare il Teorema del Dini, ed esplicitare la relazione $F(x,y) = 0$ rispetto alla variabile y: esiste un'unica funzione $x = g(y)$ (con $g(0) = 1$) tale che $F(g(y), y) = 0$ per ogni y in un intorno di zero.
b) Ricordando la formula per la derivata prima della funzione g, si ha

$$g'(0) = -\frac{F_y(1,0)}{F_x(1,0)} = 0\,.$$

Essendo la derivata prima di g nulla per $y = 0$, ed essendo

$$F_{yy}(x,y) = x^2\,\mathrm{e}^{xy}\,, \qquad F_{yy}(1,0) = 1\,,$$

si ha

$$g''(0) = -\frac{F_{yy}(1,0)}{F_x(1,0)} = \frac{1}{2}\,,$$

cosicché (ricordando che $g(0) = 1$) il polinomio di Taylor del secondo ordine è

$$P_2(y) = 1 + \frac{y^2}{4}\,.$$

c) Dal momento che $F(0,1) = 0$ e che $F_x(0,1) = -1$ e $F_y(0,1) = -2$, la relazione $F(x,y) = 0$ si può esplicitare rispetto ad una qualsiasi delle due variabili. Ad esempio, esiste un'unica funzione $y = h(y)$ (con $h(0) = 1$) tale che $F(x, h(x)) = 0$ per ogni x in un intorno di zero.
d) Ricordando che

$$h'(0) = -\frac{F_x(0,1)}{F_y(0,1)} = -\frac{1}{2}\,,$$

la retta tangente al grafico delle funzione h nel punto $x = 0$ ha equazione

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 0)\,, \quad \text{ovvero} \quad y = 1 - \frac{x}{2}\,.$$

Esercizio 2. Siano $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ e

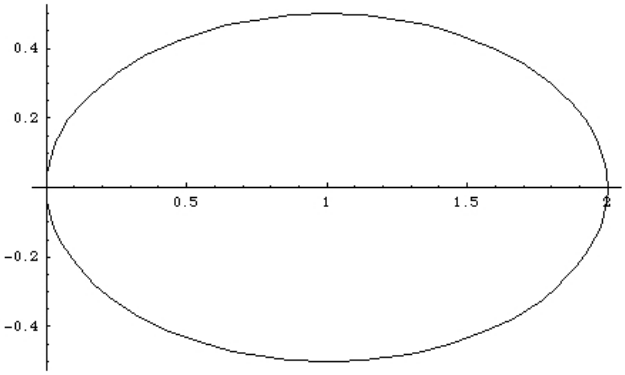
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

a) Disegnare l'insieme D;

b) giustificare l'esistenza del massimo e del minimo di f nell'insieme D;

c) determinare $\max\limits_D f(x,y)$ e $\min\limits_D f(x,y)$.

a) L'insieme D è un'ellisse di centro $(1,0)$ e semiassi 1 e $\frac{1}{2}$ rispettivamente.



b) Essendo la funzione f continua, e D chiuso e limitato, l'esistenza di massimo e minimo seguono dal Teorema di Weierstrass.
c) Dal momento che $\nabla f(x,y) = (2x, -4y)$, si ha che il gradiente di f si annulla solo nell'origine. Essendo tale punto non appartenente all'interno di D (è infatti sulla frontiera), non lo prendiamo in considerazione ai fini del calcolo di massimo e minimo.

Per quello che riguarda lo studio della f sulla frontiera di D, adottiamo il metodo del determinante (tenendo conto che il gradiente del vincolo ha componenti $2(x-1)$ e $8y$). Imponendo la condizione

$$\begin{vmatrix} 2x & -4y \\ 2(x-1) & 8y \end{vmatrix} = 4y(4x+2x-2) = 4y(6x-2) = 0\,,$$

si ricavano $y=0$ (cui corrispondono i punti $P_1=(0,0)$ e $P_2=(2,0)$ sulla frontiera dell'ellisse) e $x=\frac{1}{3}$ (cui corrispondono i punti $P_3=(\frac{1}{3},\frac{\sqrt{5}}{6})$ e $P_4=\frac{1}{3},\frac{-\sqrt{5}}{6}$ sulla frontiera dell'ellisse). Si ha allora

$$f(P_1)=0\,,\ f(P_2)=4\,,\ f(P_3)=f(P_4)=-\frac{1}{6}\,,$$

da cui segue che P_2 è il punto di massimo, e P_3 e P_4 i punti di minimo della f.

Esercizio 3.

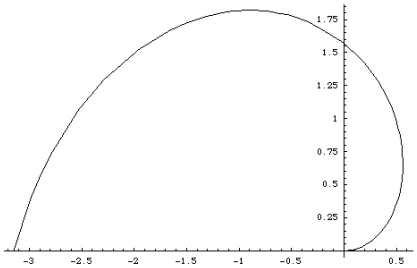
a) Calcolare l'area del dominio D limitato dall'asse x e dall'arco di spirale

$$x = t\,\cos t, \quad y = t\,\sin t \qquad 0 \le t \le \pi.$$

b) Assegnato il campo vettoriale $\overrightarrow{F}=(x^2,xy)$, calcolare $\displaystyle\iint_D \operatorname{div}\overrightarrow{F}\,dx\,dy$

(sapendo che $\int_0^\pi t^3\cos t\,dt = 12-3\pi^2$).

a) Per calcolare l'area di D usiamo il Teorema della divergenza con $\overrightarrow{F}(x,y)=(x/2,y/2)$, un campo vettoriale di divergenza 1.



Come si vede dalla figura, la frontiera di D è composta da due parti: l'arco γ di spirale e il segmento S contenuto nell'asse x di estremi $-\pi$ e 0. Si ha allora

$$\text{Area}(D) = \int_\gamma \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\nu}\,ds + \int_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\nu}\,ds\,.$$

Ricordando la parametrizzazione di γ, si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\nu}\,ds &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[t\,\cos(t)\cdot(t\,\cos(t)+\sin(t)) - t\,\sin(t)\cdot(\cos(t)-t\,\sin(t))\right]\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi t^2\,dt = \frac{\pi^3}{6}\,.\end{aligned}$$

Parametrizzando S come $x=t$ e $y=0$ (al variare di t in $[-\pi,0]$), si ha

$$\int_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\nu}\,ds = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^0 [t\cdot 0 - 0\cdot 1]\,dt = 0\,,$$

e quindi l'area di D vale $\frac{\pi^3}{6}$.

b) Per calcolare l'integrale richiesto, usiamo nuovamente il teorema della divergenza:

$$\iint_D \operatorname{div}\overrightarrow{F}\,dx\,dy = \int_{+\partial D}\overrightarrow{F}\,\overrightarrow{\nu}\,ds$$

Ricordando le parametrizzazioni usate in precedenza (e il fatto che la frontiera di D è l'unione di γ ed S), si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\nu}\,ds &= \int_0^\pi \left[t^2\,\cos^2(t)\cdot(t\,\cos(t)+\sin(t)) - t^2\,\sin(t)\,\cos(t)\cdot(\cos(t)-t\,\sin(t))\right]\,dt\\ &= \int_0^\pi t^3\,(\cos^3(t)+\cos(t)\,\sin^2(t))\,dt = \int_0^\pi t^3\,\cos(t)\,dt = 12-3\pi^2\,,\end{aligned}$$

e

$$\int_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\nu}\,ds = \int_{-\pi}^0 [t^2\cdot 0 - t\cdot 0\cdot 1]\,dt = 0\,.$$

L'integrale richiesto vale pertanto $12-3\pi^2$.

Esercizio 4. Sia Σ la superficie

$$\begin{cases} x= & u-v\\ y= & u+v\\ z= & u^2+v\end{cases} \qquad 0\le u\le 1;\ 0\le v\le 1$$

a) verificare che Σ è una superficie regolare;

b) calcolare $\displaystyle\iint_\Sigma (x+y)\,d\sigma$.

a) Le funzioni $x(u,v) = u-v$, $y(u,v) = u+v$ e $z(u,v) = u^2+v$ che definiscono Σ sono di classe C^∞; inoltre la matrice

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2u \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango pari a 2 dato che il determinante del minore

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

è diverso da zero. La superficie Σ è pertanto regolare.
b) Si ha

$$E = x_u^2+y_u^2+z_u^2 = 2+4u^2\,,\ F = x_u\,x_v+y_u\,y_v+z_u\,z_v = 2u\,,\ G = x_v^2+y_v^2+z_v^2 = 3\,,$$

da cui $E\,G - F^2 = 6 + 8u^2$. Dal momento che lungo la superficie $x + y = 2u$, si ha, tenendo conto della variabilità dei parametri u e v,

$$\iint_\Sigma (x+y)\,d\sigma = \iint_{[0,1]\times[0,1]} 2u\,\sqrt{6+8u^2}\,du\,dv\,.$$

Per le formule di riduzione degli integrali doppi, si ha allora

$$\iint_\Sigma (x+y)\,d\sigma = \int_0^1 2u\,\sqrt{6+8u^2}\,du = \frac{1}{12}(6+8u^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{12}\left(14^{\frac{3}{2}} - 6^{\frac{3}{2}}\right)\,.$$