

7.1 Esercizio

Assegnata la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1+k) x^k$$

- determinare l'intervallo di convergenza,
- determinare la somma $S(x)$,

SOLUZIONE.

- L'intervallo di convergenza si determina con il criterio del rapporto

$$\left| \frac{(1+k) x^k}{(k) x^{k-1}} \right| = \frac{1+k}{k} |x| \rightarrow |x|$$

La serie converge assolutamente per $|x| < 1$. Agli estremi $x = 1$ e $x = -1$ i termini della serie non sono infinitesimi, quindi é escluso che in essi la serie possa convergere.

- Ricordato che $\forall |x| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = (1-x)^{-2},$$

ovvero

$$\sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = x(1-x)^{-2},$$

Ne segue

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = (1-x)^{-1} + x(1-x)^{-2}$$

Eseguite le somme si ha pertanto

$$S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

OSSERVAZIONE. Il risultato ottenuto poteva essere osservato anche più rapidamente al modo seguente, sempre naturalmente per $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1+k) x^k = \sum_{h=1}^{\infty} h x^{h-1} = \left(\sum_{h=0}^{\infty} x^h \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

7.2 Esercizio

Assegnata la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1+k) \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^k$$

- determinare l'insieme E di convergenza,
- determinare la somma $S(x)$,
- determinare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$$

SOLUZIONE.

Il rapporto da considerare é il seguente

$$\left| \frac{(1+(k+1)) \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^{k+1}}{(1+k) \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^k} \right| = \frac{2+k}{1+k} \left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \rightarrow \left| \frac{2x}{1+x^2} \right|$$

L'insieme di convergenza corrisponde pertanto all'insieme dei punti x che soddisfano la disuguaglianza

$$\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| < 1 \Leftrightarrow x^2 - 2|x| + 1 > 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$$

da cui

$$E = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

La somma della serie assegnata, per ogni $x \in E$ si ricava dalla serie geometrica per $|\rho| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k \rho^{k-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

quindi

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (1+k) \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^k + \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^{k-1} = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{2x}{1+x^2}} + \frac{2x}{1+x^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{2x}{1+x^2} \right)^2} = \frac{(1+x^2)^2}{(1-x)^4} \end{aligned}$$

Per quanto concerne il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x^2)^2}{(1-x)^4} = 1$$

avendo tenuto conto nell'espressione razionale dei termini di grado maggiore.

OSSERVAZIONE

Un'indagine artigianale sui termini che compongono la serie avrebbe condotto a considerare

$$\begin{aligned} S(x) &= (1+0) \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^0 + (1+1) \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^1 + (1+2) \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^2 + \dots = \\ &= 1 + 2 \frac{2x}{1+x^2} + 3 \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^2 + \dots \end{aligned}$$

da cui, intanto

$$S(x) \geq 1 \quad \forall x \geq 0$$

Tenuto conto che gli addendi successivi

$$2 \frac{2x}{1+x^2}, \quad 3 \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^2, \quad \dots$$

sono infinitesimi per $x \rightarrow +\infty$ era prevedibile il risultato

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 1$$

7.3 Esercizio

Studiare la convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+3)!}{(2n)!} x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3(x-\sqrt{2})^n}{\log(n+1)}.$$

SOLUZIONE.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+3)!}{(2n)!} x^n \tag{1}$$

Serviamoci del criterio del rapporto

$$\left| \frac{\frac{2^n(n+3)!}{(2n)!} x^n}{\frac{2^{n-1}(n+2)!}{(2n-2)!} x^{n-1}} \right| = |x| \frac{n+3}{n(2n-1)} \rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi la serie converge (1) assolutamente per ogni x , e quindi converge per ogni x .

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3(x - \sqrt{2})^n}{\log(n+1)} \quad (2)$$

Si tratta, posto

$$y = x - \sqrt{2},$$

della serie di potenze in y

$$3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{\log(n+1)}$$

Per riconoscere dove converge serviamoci ancora del criterio del rapporto

$$\left| \frac{\frac{y^n}{\log(n+1)}}{\frac{y^{n-1}}{\log(n)}} \right| = |y| \frac{\log(n+1)}{\log(n)} \rightarrow |y|$$

Ne segue che la serie converge assolutamente in ogni $y \in (-1, 1)$.

La serie originale (2) pertanto converge assolutamente e quindi converge per

$$x \in (-1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$$

ESTREMI DI TALE INTERVALLO

- $x = -1 + \sqrt{2}$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}$$

serie che rientra nel caso delle serie a termini di segno alterno, decrescenti in modulo a 0, considerate dal Teorema di Leibnitz, e riconosciute convergenti.

- $x = 1 + \sqrt{2}$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$$

che é una maggiorante della serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

serie divergente. Pertanto la serie assegnata in tale estremo destro é divergente anch'essa.

7.4 Esercizio

Assegnata la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{1+k^2}$$

- Determinare l'intervallo di convergenza, precisando la convergenza o meno ai suoi estremi,
- detta $S(x)$ la somma determinare il polinomio di Taylor relativo al quadrato $S^2(x)$ con punto iniziale $x_0 = 0$ e ordine $n = 2$.

SOLUZIONE.

- Appliciamo il criterio del rapporto

$$\left| \frac{\frac{x^k}{1+k^2}}{\frac{x^{k-1}}{1+(k-1)^2}} \right| = \frac{k^2 - 2k + 2}{k^2 + 1} |x| \rightarrow |x|$$

Quindi la serie converge assolutamente per $-1 < x < 1$ e non converge né per $x < -1$ né per $x > 1$.

Per $x = 1$ e per $x = -1$ i termini della serie sono maggiorati in modulo da

$$\frac{1}{1+k^2}$$

termini che costituiscono una serie convergente: pertanto la serie assegnata converge assolutamente nell'intervallo $[-1, 1]$ estremi inclusi.

- Indichiamo con $f(x) = S^2(x)$: il polinomio di Taylor richiesto é

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

Riesce naturalmente

$$\begin{aligned} f(0) &= S^2(0) &&= 1, \\ f'(0) &= 2S(0)S'(0) &&= 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1, \\ f''(0) &= 2[S'(0)]^2 + 2S(0)S''(0) &&= \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{13}{10} \end{aligned}$$

Il polinomio richiesto é quindi

$$1 + x + \frac{13}{20}x^2$$

OSSERVAZIONE.

Il risultato poteva essere ottenuto anche piú rapidamente eseguendo il quadrato della somma dei primi 3 termini della $S(x)$

$$\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}x^2\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{25}x^4 + x + \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{5}x^3$$

e trascurando i termini con esponente di x maggiore di 2

$$1 + \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{2}{5}x^2$$

7.5 Esercizio

Assegnata la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} (\sin(x))^n$$

studiarne la convergenza.

Detta $f(x)$ la somma della serie calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} f(x) \cos(x) dx$$

SOLUZIONE.

I termini della serie soddisfano, qualunque sia $x \in R$, la disuguaglianza

$$\left| \frac{n+1}{2^n} (\sin(x))^n \right| \leq \frac{n+1}{2^n}$$

I termini, non dipendenti da x a secondo membro formano, come si riconosce ad esempio col criterio del rapporto, una serie convergente.

Pertanto:

- La serie di funzioni assegnata converge assolutamente $\forall x \in R$,
- la serie di funzioni assegnata converge $\forall x \in R$,
- la serie di funzioni assegnata converge (criterio di Weierstrass) uniformemente $\forall x \in R$.

Detta $f(x)$ la somma della serie, la convergenza uniforme permette la seguente uguaglianza

$$\int_0^{\pi/2} f(x) \cos(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^{\pi/2} (n+1) \sin^n(x) \cos(x) dx$$

da cui tenuto presente che

$$\int_0^{\pi/2} (n+1) \sin^n(x) \cos(x) dx = \sin^{n+1}(x) \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

si ottiene

$$\int_0^{\pi/2} f(x) \cos(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

OSSERVAZIONE.

Indicato con

$$y = \frac{\sin(x)}{2}$$

e tenuto presente che $|y| < 1$, la serie precedente si scrive anche come

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) y^n = \sum_{m=1}^{\infty} m y^{m-1} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} y^m \right)' = \frac{1}{(1-y)^2}$$

Risostituendo ad y la sua espressione si riconosce

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} (\sin(x))^n = \frac{4}{4 - 4 \sin(x) + \sin^2(x)}$$

7.6 Esercizio

Studiare l'insieme di convergenza della somma di serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+3} (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+3} (x-1)^n .$$

SOLUZIONE.

Indicato come sopra con

$$y = x - 1$$

la somma assegnata si scrive come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n+3} y^n \tag{3}$$

Applicando il criterio del rapporto si ha

$$\left| \frac{\frac{2^n + 3^n}{n+3} y^n}{\frac{2^{n-1} + 3^{n-1}}{n+2} y^{n-1}} \right| = |y| \frac{2^n + 3^n}{2^{n-1} + 3^{n-1}} \frac{n+2}{n+3} = 3|y| \frac{(2/3)^n + 1}{(2/3)^{n-1} + 1} \frac{n+2}{n+3}$$

espressione che, per $n \rightarrow +\infty$ tende a $3|y|$.

La serie somma (3) assegnata converge assolutamente e quindi converge per $3|y| < 1$ ovvero

$$y \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

ovvero ancora per

$$x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

ESTREMI DI TALE INTERVALLO

- $x = \frac{2}{3}$ la prima serie delle due serie addendi converge ovviamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3} \left(\frac{-1}{3}\right)^n$$

la seconda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+3}$$

converge anch'essa per il Teorema di Leibnitz sul caso dei segni alterni.

Quindi la serie somma in tale estremo sinistro converge.

- $x = \frac{4}{3}$ la prima delle due serie addendi converge, la seconda no.

Quindi la serie somma in tale estremo destro non converge.

7.7 Esercizio

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n e^{-n x^2}.$$

SOLUZIONE.

La serie assegnata é, scritta piú chiaramente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2 e^{-x^2}\right)^n \quad (4)$$

una serie geometrica costruita su

$$\rho = 2 e^{-x^2}$$

É quindi ben noto che converge se e solo se $|\rho| < 1$ ovvero se e solo se

$$|2e^{-x^2}| < 1 \quad \leftrightarrow \quad \sqrt{\ln(2)} < |x|$$

la semiretta da $-\sqrt{\ln(2)}$ a $-\infty$ e quella da $\sqrt{\ln(2)}$ a $+\infty$.

La convergenza della (4), pensata come serie geometrica in ρ , é uniforme in ogni intervallo chiuso

$$[-a, a]$$

con $a \in (0, 1)$, 1 escluso.

Quindi la serie (4) converge uniformemente in ogni semiretta $(-\infty, -b]$ ovvero $[b, +\infty)$ con

$$b > \sqrt{\ln(2)}$$

7.8 Esercizio

Dopo aver determinato l'insieme di convergenza di

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{4^n},$$

si calcoli l'integrale

$$\int_0^2 f(x) \, dx$$

SOLUZIONE.

La serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{4^n} \tag{5}$$

converge, assolutamente, se

$$\left| \frac{\frac{(n+1)x^n}{4^n}}{\frac{n x^{n-1}}{4^{n-1}}} \right| = \left| \frac{x}{4} \right| \frac{n+1}{n} \rightarrow \left| \frac{x}{4} \right| < 1$$

ovvero converge assolutamente per

$$x \in (-4, 4)$$

e, com'è noto per tutte le serie di potenze, converge uniformemente in ogni intervallo

$$[a, b] \subseteq (-4, 4)$$

Quindi la serie (5) converge uniformemente in $[0, 2]$ e quindi in tale intervallo riesce

$$\int_0^2 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^2 \sum_{k=0}^n \frac{(k+1)x^k}{4^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_0^2 \frac{(k+1)x^k}{4^k} dx$$

da cui, calcolando gli integrali

$$\int_0^2 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = 2$$

7.9 Esercizio

Trovare lo sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ e calcolare $f^{(7)}(0)$.

SOLUZIONE.

Tenuto presente che

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k, \quad \forall x \in (-1, 1) \quad (6)$$

e tenuto presente che in ogni intervallo chiuso

$$[a, b] \subseteq (-1, 1)$$

si può liberamente derivare termine, si ha anche

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(x-1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k x^{k-1}, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Del resto i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots$ di una serie di potenze hanno rispetto alla somma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

i seguenti significati, deducibili per derivazione nel punto $x = 0$:

$$\begin{aligned} a_0 &= f(0) \\ a_1 &= f'(0) \\ a_2 &= \frac{1}{2} f''(0) \\ a_3 &= \frac{1}{3!} f'''(0) \\ &\text{ecc.} \end{aligned}$$

Da tale osservazione si riconosce che, nel caso dell'esercizio,

$$f^{[k]}(0) = k! a_k = (k+1)!$$

e quindi

$$f^{[7]}(0) = 8!$$

Le ridotte

$$\sum_{k=0}^n kx^{k-1}$$

rappresentano, qualunque sia n , i polinomi di Taylor della funzione $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ di punto iniziale $x_0 = 0$ e ordine $n-1$.

7.10 Esercizio

Assegnata la serie la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+2n) \left(\frac{e^{\sin(x)}}{3} \right)^n$$

- determinare l'insieme E di convergenza;
- determinare in E la somma della serie.

SOLUZIONE.

Il criterio del rapporto

$$\left| \frac{(1+2(n+1)) \left(\frac{e^{\sin(x)}}{3} \right)^{n+1}}{(1+2n) \left(\frac{e^{\sin(x)}}{3} \right)^n} \right|$$

conduce, semplificazioni effettuate a

$$\frac{e^{\sin(x)}}{3} \frac{2n+3}{2n+1} \rightarrow \frac{e^{\sin(x)}}{3}$$

Tenuto conto che

$$0 < \frac{1}{3}e^{-1} \leq \frac{e^{\sin(x)}}{3} \leq \frac{1}{3}e < 1$$

Si riconosce che la serie assegnata converge assolutamente per ogni x ovvero

$$E = \mathbb{R}$$

Tenuto conto che per $|z| < 1$ si ha

$$\sum_0^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad \sum_0^{\infty} n z^{n-1} = \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$$

si ricava per la somma della serie assegnata

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} (1+2n) \left(\frac{e^{\sin(x)}}{3} \right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{\sin(x)}}{3} \right)^n + 2 \frac{e^{\sin(x)}}{3} \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{e^{\sin(x)}}{3} \right)^{n-1} = \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{e^{\sin(x)}}{3}} + 2 \frac{e^{\sin(x)}}{3} \frac{1}{\left(1 - \frac{e^{\sin(x)}}{3} \right)^2} = \\
 &= \frac{1 + \frac{e^{\sin(x)}}{3}}{\left(1 - \frac{e^{\sin(x)}}{3} \right)^2} = 3 \frac{3 + e^{\sin x}}{(3 - e^{\sin x})^2}
 \end{aligned}$$