CAPITOLO 5

È facile dire: “Sei uno zero!

A.A.A. Nuovi teoremi cercansi: pagamento anticipato. Il precedente annuncio, sebbene non esplicitamente apparso, rende l’idea dei rapporti intercorsi fra Jean Bernoulli e il marchese G. F. A. de l’Hospital (o Hopital oppure ancora Hôspital). Il padre di Jean, Nicolaus, aveva programmi ben definiti per i suoi figli che non tenevano in nessun conto le inclinazioni per la matematica di questi ultimi. Fu cosí che, in cambio di un regolare salario, l’ineffabile marchese comprò da colui che tutto gli aveva insegnato sul calcolo uno dei teoremi che, giustamente o meno, penso sia fra i più noti agli studenti delle scuole superiori: il teorema di de l’Hospital. Secondo la consolidata tradizione dei matematici, de l’Hospital non ne fu l’autore ma, almeno, ne fu il divulgatore (1696). La versione originaria fu scritta nel 1691 e 1692.

1. Si può dividere per zero?

Una delle costanti nell’apprendimento della matematica sono le frodi ai danni di chi la vuole apprendere. In particolare ci viene insegnato che certe operazioni fra gli oggetti che conosciamo sono **proibite**: ad esempio alle elementari si impara (e vatti a fidare) che “$2 - 3$” non si può fare. Successivamente si aggiusta il tiro e si scopre che non solo si può fare ma addirittura si è spesso forzati a farlo. Altro esempio famoso è l’estrazione della radice quadrata di meno uno! che rimane **assolutamente proibita** spesso fino alla tomba (almeno per quelli che non scelgono corsi di laurea con un minimo di contenuto scientifico). Questo capitolo, sia pure solo marginalmente, si occupa di rendere ammissibile una delle operazioni proibite finora.

Sicuramente avrete notato che in vari teoremi enunciati fino ad adesso è comparsa, in una delle sue tante guise, la madre di tutte le proibizioni : “non si può dividere per zero”. In particolare le operazioni sui rapporti fra limiti risentono di questo fatto.

Esercizio 1.1. Recuperare, fra quelli studiati, almeno due enunciati in cui compare la proibizione di dividere per qualcosa che tende a zero.

Per capire di cosa vogliamo parlare in questo capitolo, cominciamo con una classe di esempi molto semplici che illustra però le potenziali difficoltà ed anche la strategia di risoluzione.

Siano P e Q due monomi che si annullano nel punto $x = 0$.

Diciamo $P(x) = x^n$ e $Q(x) = x^m$. Qui n e m sono interi non nulli che per il momento non specifichiamo. Abbiamo già imparato che

$$\lim_{x\to 0} P(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} Q(x) = 0\,.$$

A priori è quindi proibito calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0\,,$$

e la ragione "tecnica" è che, se si tenta di definire la nuova "funzione" $f(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$, ci si rende conto che essa non è definita in zero ed anzi ha come dominio esattamente la retta reale privata dell'origine. D'altronde, nel suo dominio, f è una semplice funzione razionale e si può precedere "a mano" pur di avere la pazienza di considerare diversi casi. Cominciamo.

Se $n > m$, $f(x) = x^l$, $l = n - m \geq 1$ **fuori dall'origine** e sarebbe una cattiveria non estenderla per continuità nell'origine. Tecnicamente diremo che zero è una singolarità eliminabile. In questo caso quindi una eventuale "teoria" dovrebbe condurre a concludere

$$\lim_{x\to 0} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0\,.$$

Chiaramente se $n = m$ le cose vanno diversamente ($l = 0$ e $f(x) \equiv 1!$) ma, ancora, la singolarità è eliminabile e lo stesso ragionamento suggerisce che la teoria dovrebbe predire

$$\lim_{x\to 0} \frac{P(x)}{Q(x)} = 1\,.$$

Esercizio 1.2. Classificare i **due** casi rimanenti.

Quindi nel caso cosí apparentemente innocuo del rapporto fra due monomi, da un lato può accadere (quasi) di tutto, dall'altro siamo capaci di "risolvere" in un modo o nell'altro la questione. Dobbiamo però accettare:
a) che il limite esista ma non sia un numero reale (estrarre un esempio dall'esercizio 1.2) e
b) che il limite possa non esistere affatto!

Esercizio 1.3. Indovinare il testo del prossimo esercizio.

Esercizio 1.4. ? ? ?

Soluzione Esercizio 1.3. Rileggere la frase che lo precede ed esibire un caso di tipo b).

In questa apparente confusione si può per fortuna mettere ordine almeno entro certi "limiti". L'idea di fondo è a dir poco astuta ma in effetti geniale. Essa consiste nel **cercare di "ridursi" al caso dei polinomi (e successivamente a quello dei monomi!).**

Per apprezzare questa frase è opportuno tentare di immaginare "quanti sono" i polinomi nell'insieme delle funzioni. Cosa dite? Sono pochi o sono molti? E le funzioni continue (che certamente sono molte di più) sono poche o sono molte? E quanti sono i polinomi rispetto alle funzioni continue o a quelle derivabili con derivata continua? Sapreste suggerire una strada? Un po' di più si capirà nel prossimo capitolo con l'introduzione delle cosiddette funzioni "analitiche" che sono una sorta di polinomi di "ordine infinito". Per le funzioni continue l'immaginazione di solito non è sufficiente a rendere giustizia alla loro varietà. Ce ne sono di "mostruose" ben peggiori ad esempio di $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$. Ed anzi la maggioranza sono proprio orrende e quelle che di solito si disegnano, come i polinomi, sono rare. D'altronde è un fenomeno di cui abbiamo una precedente esperienza: pensate ad un numero. Quanti hanno detto un numero naturale? Eppure sono pochissimi...

Torniamo all'idea di ridursi ai polinomi. Siano

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad , \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \tag{1.1}$$

Ovviamente queste funzioni sono entrambe continue (ed anzi derivabili un numero....quante volte?)

Quindi esistono i limiti per x che tende a zero sia delle funzioni che delle loro derivate.

A questo punto possiamo chiederci ancora, come nel caso dei monomi, se esista

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \,.$$

Se $g(0) \neq 0$ possiamo fare ricorso ai teoremi già noti. Concentriamoci quindi sul caso "proibito": $b_0 = g(0) = 0$. A questo punto possono accadere due cose. La prima è che $a_0 = f(0) \neq 0$ ed allora la questione rientra in casi noti a patto di fare un'ipotesi su g che era automaticamente soddisfatta nel caso del monomio $g(x) = x^m$ e che chiameremo "ipotesi mancante" per stimolare la vostra curiosità. Chi la "vede"?

Chi non ha risposto non si preoccupi più di tanto. Le ipotesi ovvie sono le più difficili da non scordare ed in ogni caso ci torneremo.

Da ora in poi, quindi, ci concentreremo sull'unico caso che non sappiamo già affrontare. Assumeremo in (1.1) che

$$a_0 = b_0 = 0\,. \tag{1.2}$$

Nel linguaggio dei limiti, ci concentriamo solo sul caso di "forme indeterminate". Usando (1.1) nell'ipotesi (1.2), si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m} = \left(\frac{x}{x}\right) \frac{a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}}{b_1 + b_2 x + \cdots + b_m x^{m-1}}$$

e tale formula è valida nel dominio di definizione del rapporto che, ricordiamo, è $\mathbb{R}$ privato al più di un numero finito di punti (a patto di non dimenticare l'ipotesi mancante). In tale insieme si ha allora

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}}{b_1 + b_2 x + \cdots + b_m x^{m-1}}\,.$$

Ora è del tutto evidente che, se $b_1 \neq 0$ abbiamo un modo chiaro di estendere la funzione nell'origine! Il che suggerisce il seguente possibile enunciato:

Preteorema 1: Jean Bernoulli

$$\text{Se} \quad a_0 = b_0 = 0 \quad \text{ma} \quad b_1 \neq 0 \quad \text{allora} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_1}{b_1}\,. \tag{1.3}$$

Rimandiamo a dopo l'interessante problema di capire cosa accada se $b_1 = 0$. Diamo invece una interpretazione geometrica dei coefficienti a_0, a_1, b_0 e b_1. Abbiamo già sottolineato che a_0 è semplicemente il valore della funzione f nel punto incriminato. Cosa sono a_1 e b_1? Rispettivamente i valori della **derivata prima** di f e di g nel punto in questione $x = 0$.

Nella Figura 1 vediamo un esempio esplicito. Abbiamo disegnato i grafici di $f(x) = x + x^2$ e $g(x) = 2x + 3x^2$ nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

È tutt'altro che chiaro a quanto tenda il limite del rapporto. Nella Figura 2 osserviamo il grafico del rapporto $\frac{f}{g}$ in $[-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$ dal quale si "capisce" che il limite per x che tende a zero esiste e vale $\frac{1}{2}$.

Nella Figura 3 l'intervallo è più piccolo e disegnamo anche le tangenti di f e di g.

Da ora in poi abituatevi a guardare la "scala" per capire cosa succede (non solo quella di emergenza intendo).

L'osservazione cruciale è che l'errore che si fa "sostituendo" ad f la sua tangente è piccolo! E si osserva che diventa sempre più piccolo mano mano che si "stringe" l'intervallo in cui si osserva il fenomeno. Cosa accada in $[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}]$ è illustrato nella

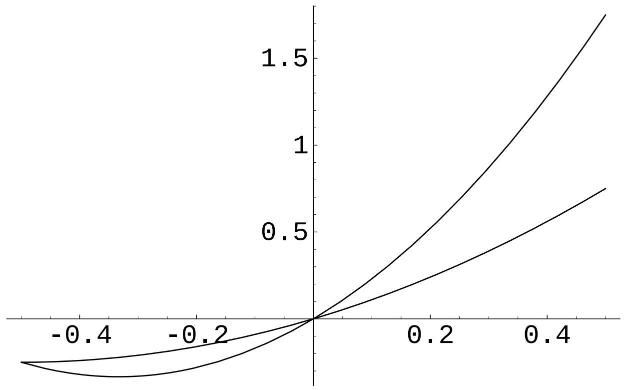

FIGURA 1. I grafici di $f(x) = x + x^2$ e $g(x) = 2x + 3x^2$ nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

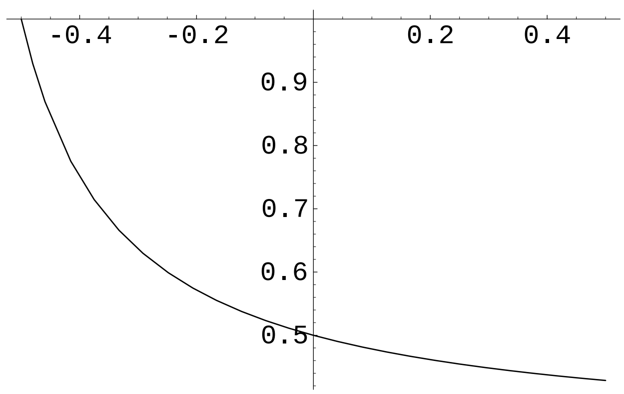

FIGURA 2. Il grafico di $\frac{f(x)}{g(x)}$ in $[-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$.

Figura 4: il grafico della funzione e della rispettiva tangente si distinguono a fatica. (I successi della tangente non si limitano agli affari).

Prima di compiere il salto qualitativo di considerare funzioni che non siano necessariamente polinomi, riprendiamo un discorso interrotto. Cerchiamo di capire cosa succede se nell'enunciato del Preteorema 1 si rimuove l'ipotesi $b_1 \neq 0$.

La speranza (che risulterà vana senza la famosa ipotesi mancante) è quella di iterare il discorso nel seguente senso.

Se $b_1 = 0$ ma $a_1 \neq 0$, allora è possibile stabilire cosa succeda al limite (inclusa la possibilità della sua non esistenza) mediante i risultati noti perché non si tratta più di una "forma indeterminata". Il caso "nuovo" che resta da analizzare è quello in cui si abbia invece (oltre che $b_0 = a_0 = 0$) anche $b_1 = a_1 = 0$. In questo caso possiamo

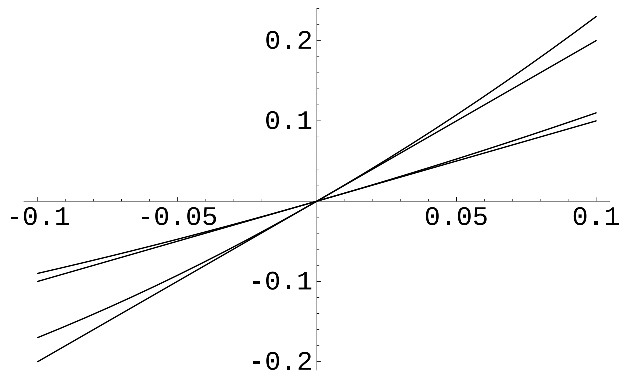

FIGURA 3. L'intervallo è diventato $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ e disegnamo insieme ad f e g le loro tangenti.

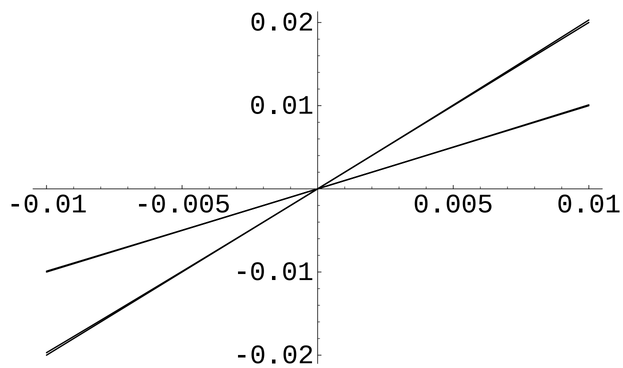

FIGURA 4. L'intervallo è diventato $[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}]$ e disegnamo insieme ad f e g le loro tangenti.

operare come prima ed ottenere che se

$$a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = 0 \tag{1.4}$$

allora usando (1.1), nel dominio di definizione, si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_2x^2 + \cdots + b_mx^m}$$

e quindi, poiché in particolare in tale insieme $x \neq 0$, il rapporto vale

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{x^2}{x^2}\right) \frac{a_2 + a_3x \cdots + a_nx^{n-2}}{b_2 + b_3x + \cdots + b_mx^{m-2}} = \frac{a_2 + a_3x \cdots + a_nx^{n-2}}{b_2 + b_3x + \cdots + b_mx^{m-2}} .$$

Questa volta abbiamo un modo chiaro di estendere la funzione nell'origine a patto che $b_2 \neq 0$!

Preteorema 2: Jean Bernoulli

$$\text{(1.5)} \qquad \text{Se} \quad a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 0 \quad \text{ma} \quad b_2 \neq 0 \quad \text{allora} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_2}{b_2}\,.$$

Ricapitoliamo in un linguaggio che prepara a ciò che diremo in seguito. Abbiamo considerato i due casi seguenti.

Primo caso. In (1.1), La derivata nell'origine del denominatore è diversa da zero: ($g'(0) \neq 0 \Leftrightarrow b_1 \neq 0$). Abbiamo concluso che il rapporto fra f e g nell'origine tende al rapporto delle derivate di f e g nell'origine.

La stringa (1.3) è quindi equivalente alla seguente

$$\text{(1.6)} \qquad \text{Se} \quad a_0 = b_0 = 0 \quad \text{ma} \quad b_1 \neq 0 \quad \text{allora} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Dal punto di vista geometrico, abbiamo di fatto "sostituito" ai polinomi in questione la sola parte di **ordine** minore o uguale ad uno. Questo significa sostituire al grafico delle funzioni la loro retta tangente nell'origine. (Abbiamo detto **ordine** e non **grado** in quanto la retta tangente al grafico di f in $x = 0$ potrebbe essere orizzontale.)

Secondo caso: iterazione del primo. Il precedente criterio fallisce ed invece sia la derivata del denominatore che quella del numeratore sono nulle in $x = 0$: ($f'(0) = a_1 = 0$ e $g'(0) = b_1 = 0$). Geometricamente questo accade quando entrambe le funzioni f e g hanno retta tangente orizzontale in $x = 0$ e ricadiamo in una forma indeterminata.

Allora facciamo entrare in gioco i coefficienti del secondo ordine. Questa volta, per trarci d'impaccio assumiamo che la derivata seconda del denominatore g sia diversa da zero ($g''(0) \neq 0 \Leftrightarrow b_2 \neq 0$).

Con questa ipotesi, confrontiamo la parte del polinomio di ordine minore o uguale a due di f con la corrispondente di g. Tutto il resto si trascura (ovvero si butta).

Allora la stringa (1.5) è equivalente alla seguente

$$\text{(1.7)} \qquad \text{Se} \quad a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 0 \quad \text{ma} \quad b_2 \neq 0 \quad \text{allora} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)}\,.$$

Il discorso potrebbe proseguire. O no?

In effetti proseguendo si finisce per battere la testa sull'ipotesi mancante. I guai arrivano se il procedimento non si ferma. E questo accade se (e solo se) $b_0 = b_1 = \cdots = b_m = 0$. Ma in questo caso saremmo stati stupidi a cominciare: $g(x) \equiv 0$!

Esercizio 1.5. Adesso che finalmente abbiamo esplicitato l'ipotesi mancante, individuare il dominio di $\frac{f}{g}$ quando tale ipotesi viene dimenticata.

Adesso ci concentreremo sull'analogo del **Primo caso**. Solo verso la fine del capitolo ritorneremo sul caso due (vedi Teorema 3.5).

2. Il Teorema di Bernoulli (ovvero, di de l'Hospital)

Fedelmente ripreso da Sua Eccellenza il Marchese di de L'Hospital, siamo lieti di presentare: alcune versioni del teorema di J. Bernoulli.

I prossimi due enunciati sono particolarmente comodi nelle applicazioni.

Teorema 2.1. *Sia I un intervallo della forma $I = (a, b)$ con $a < b$ e sia $c \in (a, b)$. Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in I e derivabili in $I \setminus \{c\}$. Se*

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0\,, \tag{2.1}$$

se

$$\forall x \in (a, b) \quad , \quad g(x) \neq 0 \quad e \quad g'(x) \neq 0\,, \tag{2.2}$$

e **se esiste**

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,, \tag{2.3}$$

allora esiste anche

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{2.4}$$

e si ha

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,. \tag{2.5}$$

Teorema 2.2. *Sia I un intervallo della forma $I = (a, +\infty)$. Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e derivabili in I. Se*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0\,, \tag{2.6}$$

se

$$\forall x \in I \quad , \quad g(x) \neq 0 \quad e \quad g'(x) \neq 0\,, \tag{2.7}$$

e **se esiste**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,, \tag{2.8}$$

allora esiste anche

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \tag{2.9}$$

e si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,. \tag{2.10}$$

Osservazioni 2.3. Osservazione 1) La condizione (2.8) va presa alla lettera. Il limite può essere un numero reale oppure più infinito o ancora meno infinito. Insomma quello che si dice un "elemento della retta reale estesa".

Osservazione 2) La dimostrazione del Teorema 2.1 si modifica senza difficoltà per fornire una versione "asimmetrica", in cui si sostituisce alla stringa "$\lim_{x\to c}$ quella "$\lim_{x\to c^-}$ oppure "$\lim_{x\to c^+}$ in tutti i punti in cui compare e si indeboliscono le ipotesi nella maniera conseguente.

Osservazione 3) La versione con $I=(-\infty,b)$ è del tutto simile. Se avete dei dubbi, provate ad enunciarla.

Osservazione 4) Come suggerito dal Preteorema 2, nel caso in cui

$$\lim_{x\to c}f'(x)=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c}g'(x)=0\,,$$

si può iterare il procedimento sotto opportune ipotesi. La versione "reiterata" sarà enunciata più avanti insieme ad un'altra utile generalizzazione.

Diamo adesso qualche esempio.

Esempio 2.4. Calcolare il seguente limite.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)\,. \tag{2.11}$$

Usiamo il Teorema 2.1 con $I=(-1,1)$ e $c=0$. Ovviamente $f(x)=e^x-1-x$, $g(x)=x^2$. Quindi, per $x\in I\setminus\{0\}$,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{e^x-1}{2x}$$

e l'ultima l'espressione ammette limite per $x\to 0$ (rivedere i calcoli sui limiti). Concludiamo che

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}\,.$$

Esercizio 2.5. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x\ln x} \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)-x}{-\cos(x)} \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Nella pratica, nel caso di forme indeterminate, si tende a "calcolare" il rapporto delle derivate come passo preliminare. Può accadere che il calcolo non vada a buon fine nel senso che, sebbene tale limite **abbia senso** (in quanto f e g sono derivabili in I), esso non esista. In questo caso il nostro teorema non ci consente di affermare nulla come illustrato dal prossimo

Controesempio 2.6. Scegliamo

$$f(x) = x^2 \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad g(x) = x \quad \text{con} \quad x \in (0,1) \tag{2.12}$$

Ovviamente

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \left[x \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0\,,$$

(infinitesimo per limitata) ma

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1}$$

e tale rapporto non ammette limite, come facilmente si verifica, per x che tende a zero.

Concludiamo, da questo esempio, che può succedere che esista il limite (2.4) senza che esista il limite (2.3).

La funzione f nel precedente esercizio è di quelle che conviene ricordare. Vedremo più avanti che chiarisce altre questioni non ovvie ed interessanti (di cose non ovvie ma assolutamente non interessanti è pieno l'universo anche quello matematico).

La dimostrazione delle varie versioni del Teorema di Bernoulli fa uso di una conseguenza del Teorema di Rolle che risulta spesso utile e ha pertanto meritato un nome: teorema di Cauchy. Questo è il contenuto del prossimo esercizio

Esercizio 2.7. (Teorema di Cauchy) Siano f e g continue in $J = [\alpha, \beta]$ e derivabili in (α, β). Se $g'(x) \neq 0$ in J allora

$$\exists\, \xi \in (\alpha, \beta) \quad \text{tale che} \quad \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,. \tag{2.13}$$

Il risultato (2.13) è chiamato teorema di Cauchy.
Dimostrazione Si tratta semplicemente di applicare il Teorema di Rolle alla funzione $h = h(x)$ definita in J nel modo seguente

$$h(x) = f(x)[g(\beta) - g(\alpha)] - g(x)[f(\beta) - f(\alpha)]\,.$$

Infatti

$$\Delta h := h(\beta) - h(\alpha) = [f(\beta)\Delta g - g(\beta)\Delta f] - [f(\alpha)\Delta g - g(\alpha)\Delta f] =$$

$$\Delta g \Delta f - \Delta f \Delta g = 0\,.$$

Si può applicare Rolle per concludere che esiste $\xi \in (\alpha, \beta)$ tale che

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi)[g(\beta) - g(\alpha)] - g'(\xi)[f(\beta) - f(\alpha)]\,. \tag{2.14}$$

Allora per (2.14) si ha

$$f'(\xi)[g(\beta) - g(\alpha)] - g'(\xi)[f(\beta) - f(\alpha)] = 0\,.$$

La quantità $(g(\beta) - g(\alpha))g'(\xi)$ è non nulla. Quindi dividendo per tale quantità la dimostrazione è conclusa.
Un ultimo sforzo: perché è vera la penultima frase? Ricordate che alcune ipotesi non sono state ancora usate. È il loro momento di gloria!.

Dimostrazione del Teorema 2.1. Estendiamo f e g per continuità in c, ovvero poniamo $f(c) := \lim_{x\to c} f(x)$, $g(c) := \lim_{x\to c} g(x)$. (Ma non useremo, come si potrebbe con un eccesso di pignoleria, una nuova notazione per l'estensione cosí ottenuta). Per l'ipotesi (2.1) si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)}\,. \tag{2.15}$$

Per ogni successione $\{x_n\} \subset (a, b)$ che converge a c, la corrispondente successione $\{\xi_n\}$ di cui all'enunciato (2.13), converge a c in quanto, per costruzione, $\xi_n \in (x_n, c)$. Per ogni successione siffatta, per fissato n, possiamo applicare (2.13) con le scelte $\alpha = x_n$ e $\beta = c$. (Provate a controllare: c'è una sottigliezza). Quindi, usando (2.15) e (2.13) si ha

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(c)}{g(x_n) - g(c)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}\,. \tag{2.16}$$

Per l'ipotesi (2.3) ed il Teorema ponte esiste anche il limite seguente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}\,.$$

Quindi, passando al limite per n che tende ad infinito in (2.16) si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}\,.$$

Poiché la successione $\{x_n\}$ che converge a c è arbitraria, usando ancora il Teorema ponte (questa volta nella direzione più interessante), si deducono entrambe le tesi in una volta sola.

Osservazioni 2.8. Negli esempi dei monomi o dei polinomi l'ipotesi dell'esistenza delle derivate di f e g nel punto $x = 0$ erano automaticamente soddisfatte. Il fatto che tale ipotesi non sia stata assunta nei teoremi precedenti ha reso necessario l'uso del Teorema di Cauchy.

La precedente osservazione motiva l'esercizio successivo.

Esercizio 2.9. Dimostrare sotto ipotesi più restrittive il Teorema 2.1: assumere, in aggiunta, che le derivate di f e g esistono in c. Suggerimento: scrivete la tesi in termini dei rapporti incrementali di f e g.

Per la dimostrazione del Teorema 2.2 non vogliamo cambiare la filosofia. L'ostacolo tecnico risiede nel fatto che per avere il teorema di Cauchy, c'è bisogno che valga Rolle in un intervallo non limitato. Per fortuna questo è vero.

La parte che tratta di questa dimostrazione può essere omessa in prima lettura. Anche in seconda se si è disposti ad accettare alcune conseguenze. . . .

Esercizio 2.10. Teorema di Rolle esteso (a intervalli illimitati). Sia f continua in $J = [\alpha, +\infty)$ e derivabile in $(\alpha, +\infty)$. Supponiamo che esista

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L_f\,.$$

Se $f(\alpha) = L_f$ allora

$$\exists \xi \in (\alpha, +\infty) \quad \text{tale che} \quad f'(\xi) = 0\,. \tag{2.17}$$

Il teorema di Rolle esteso ha una chiara interpretazione geometrica illustrata dalla seguente figura ed è per questo che abbiamo scelto questa strada per dimostrare il Teorema 2.2 rispetto ad altre più dirette ma assai meno intuitive.

Dimostrazione del Teorema di Rolle esteso. Assumiamo senz'altro f non costante! Se esistesse $b > \alpha$ tale che $f(b) = f(\alpha)$ la tesi seguirebbe dal Teorema di Rolle classico. Supponiamo quindi che $\forall x \in (\alpha, \infty) \quad , \quad f(x) \neq f(\alpha)$. Senza perdita di generalità si assuma che

$$\forall x \in (\alpha, \infty) \quad , \quad f(x) > f(\alpha) = 0\,.$$

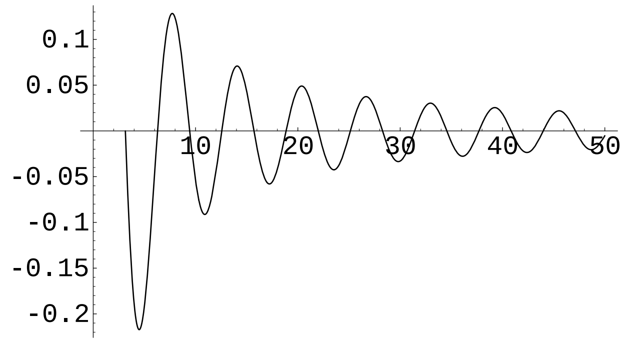

FIGURA 5. Qui $f(\alpha) = \lim_{x\to\infty} f(x)$

(Assumere $L_f = 0$ corrisponde a considerare la funzione $f(x) - L_f$).

Per ipotesi esiste qualche $a > \alpha$ tale che $f(a) = m > 0$. Per il teorema dei valori intermedi applicato all'intervallo $[\alpha, a]$ ($f(\alpha) = 0$, $f(a) = m$), esiste allora $\alpha_1 \in (\alpha, a)$ tale che $f(\alpha_1) = \frac{m}{2}$. D'altronde per ipotesi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e quindi, poiché stiamo assumendo che $f(x) > 0$ esiste $M > a$ tale che $0 < f(x) < \frac{m}{4}$ per ogni $x > M$. (Qui stiamo applicando la definizione di limite con $\epsilon = \frac{m}{4}$). Ancora il teorema dei valori intermedi applicato questa volta in $[a, M]$ ($f(a) = M$, $f(M) \le \frac{m}{4}$), esiste $\alpha_2 \in [a, M]$ per cui $f(\alpha_2) = \frac{m}{2}$.

Quindi esistono α_1 ed α_2 tali che

$$\frac{m}{2} = f(\alpha_1) = f(\alpha_2)\,.$$

Il Teorema di Rolle applicato nell'intervallo $[\alpha_1, \alpha_2]$ ci permette di concludere: esiste $\xi \in (\alpha_1, \alpha_2) \subset (\alpha, \infty)$ tale che $f'(\xi) = 0$.

ESERCIZIO 2.11. Teorema di Cauchy esteso (ad intervalli illimitati). Siano f e g continue in $J = [\alpha, +\infty)$ e derivabili in $(\alpha, +\infty)$. Supponiamo che esistano

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L_f \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = L_g\,.$$

Se $g'(x) \neq 0$ in J allora

$$\exists \xi \in (\alpha, +\infty) \quad \text{tale che} \quad \frac{L_f - f(\alpha)}{L_g - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,. \tag{2.18}$$

Soluzione. Si tratta di applicare il "Teorema di Rolle esteso" alla funzione $h = h(x)$ definita in J nel modo seguente

$$h(x) = f(x)[L_g - g(\alpha)] - g(x)[L_f - f(\alpha)]\,.$$

Poi si prosegue come nella dimostrazione del Teorema 2.10.

Dimostrazione del Teorema 2.2. La strategia è la stessa del Teorema 2.1. Soltanto ci serviamo della versione estesa del teorema di Cauchy. I dettagli sono lasciati per esercizio.

Vediamo ora come il Teorema 2.1 possa essere applicato anche in casi che apparentemente non rientrano nelle sue ipotesi.

Esercizio 2.12. Trucchi per ridursi ad usare il Teorema 2.1.
Si calcoli

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen}x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} . \tag{2.19}$$

Poiché

$$\left(\frac{\mathrm{sen}x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{sen}x}{x}\right)} .$$

Scegliamo $f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{sen}x}{x}\right)$ e $g(x) = x$. Allora per il Teorema 2.1, esiste

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x - \mathrm{sen}x}{x\mathrm{sen}x}\right) = 0$$

e quindi (verificatelo per esercizio!) esiste il limite (2.19) e vale

$$e^{\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{sen}x}{x}\right)\right]} = 1 .$$

Osserviamo esplicitamente che alcune ipotesi non sono state controllate. Farlo "a occhio" richiede esercizio. Ad esempio non abbiamo esplicitamente esibito I e certamente $I = \mathbb{R}$ non si può scegliere. (Ma, state tranquilli, esiste una scelta di I che va bene e chi non ne è convinto è invitato a verificarlo). Non abbiamo nemmeno esplicitamente scritto nei calcoli $x \neq 0$ ma a questo siamo oramai abituati dal calcolo dei limiti.

Esercizio 2.13. Si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty} n(n^{\frac{1}{n}} - 1) \quad , \quad n \in \mathbb{N} . \tag{2.20}$$

Apparentemente siamo andati "fuori tema". Cambiamo la domanda sostituendo ad "enne" una variabile continua.

Notiamo che qui dobbiamo usare il Teorema 2.2 con ad esempio $a = 1$, $b = +\infty$. Scriviamo poi

$$x(x^{\frac{1}{x}} - 1) = \frac{x^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} .$$

Scelte $f(x) = x^{\frac{1}{x}} - 1$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, siamo nelle ipotesi desiderate e poiché si ha che (verificatelo!)

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = x^{\frac{1}{x}}(\ln(x) - 1)\,,$$

concludiamo

$$\lim_{x\to+\infty} x(x^{\frac{1}{x}} - 1) = +\infty$$

e usando, per abbondare, l'"odontoiatrico" Teorema ponte, allo stesso limite tende (2.20).

Il successivo esempio suggerisce l'utilità di una variante dei teoremi enunciati sino ad adesso.

Esercizio 2.14.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3}\,. \tag{2.21}$$

Qui conosciamo già la risposta per altra via. Applicando (senza pensare) il Teorema 2.2 un po' di volte consecutive (sempre senza smettere di **non** pensare) otteniamo $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$.

Ci siamo dimenticati di controllare che l'ipotesi (2.1) fosse verificata. Non lo era. Ma il risultato non solo è sensato, è pure corretto. Non è un caso. Esistono versioni parallele dei Teoremi 2.1 e 2.2. che sostituiscono all'ipotesi (2.1), fermo restando tutte le altre la nuova ipotesi

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = +\infty\,. \tag{2.22}$$

Anche qui ci sono versioni "asimmetriche". Si può quindi considerare il limite di tipo $\lim_{x\to c^-}$. Inoltre si può alternativamente assumere

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = -\infty\,. \tag{2.23}$$

Ecco gli enunciati.

Teorema 2.15. *Sia I un intervallo della forma $I = (a,b)$ con $a < b$ e sia $c \in (a,b)$. Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in I e derivabili in $I\backslash\{c\}$. Se*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = +\infty\,, \tag{2.24}$$

se

$$\forall x \in (a,b) \quad , \quad g(x) \neq 0 \quad \text{e} \quad g'(x) \neq 0\,, \tag{2.25}$$

e **se esiste**

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,, \tag{2.26}$$

allora esiste anche

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} \tag{2.27}$$

e si ha

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,. \tag{2.28}$$

TEOREMA 2.16. *Sia I un intervallo della forma $I=(a,+\infty)$. Siano $f,g:I\to\mathbb{R}$ due funzioni continue e derivabili in I. Se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\,, \tag{2.29}$$

se

$$\forall x\in I \quad , \quad g(x)\neq 0 \quad e \quad g'(x)\neq 0\,, \tag{2.30}$$

e **se esiste**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,, \tag{2.31}$$

allora esiste anche

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \tag{2.32}$$

e si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,. \tag{2.33}$$

Vediamo ora una applicazione istruttiva del Teorema 2.1. L'esercizio è interessante ma leggermente sofisticato. Saltatelo pure in prima lettura.

3. Approfondimenti

Quel che segue in questo capitolo, fino al Teorema 3.5 è un approfondimento.

Consideriamo la seguente funzione che risulta essere molto utile in analisi:

$$h_?(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se} \quad x\neq 0 \\ ? & \text{se} \quad x\neq 0\,. \end{cases} \tag{3.1}$$

Il punto interrogativo **non** è un errore di stampa: espone la difficoltà iniziale di assegnare un valore alla funzione in $x=0$. Non dovremmo avere troppe difficoltà a scoprire i due seguenti fatti. Primo, se si vuole estendere la funzione in $x=0$ in maniera "qualificata" ovvero continua, la scelta esiste, è obbligata e vale esattamente zero. Consideriamo allora

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \neq 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

e domandiamoci se la funzione cosí ottenuta sia derivabile in $\mathbb{R}$. Subito, in coro, notiamo che

$$h'(x) = \ \tfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{se} \quad x \neq 0\,. \tag{3.3}$$

Cosa succeda nell'origine deve essere capito usando la definizione di derivata. In altre parole dobbiamo calcolare (se possibile)

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{h(x) - h(0)}{x} \right)$$

e, se si potesse applicare il Teorema 2.1, si potrebbe concludere che

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{h'(x) - 0}{1} = \lim_{x \to 0} h'(x) =^{\text{per}\,(3.3)}= \lim_{x \to 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}\,.$$

Poiché l'ultimo limite esiste e vale zero, il Teorema 2.1 si può applicare e si ha $h'(0) = 0$ e quindi

$$h'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0\,. \end{cases} \tag{3.4}$$

Questa solfa si può reiterare. Se ne deduce che le derivate **di qualunque ordine** di h nell'origine esistono e valgono zero. Scriviamo questa formula, la riprenderemo nel prossimo capitolo.

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad , \qquad h^{(N)}(0) = 0\,. \tag{3.5}$$

Il precedente calcolo della derivata in zero è di carattere generale.

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia $I = [a, b]$, f continua in $[a, b]$ e derivabile in $I \backslash \{c\}$.*

$$\textbf{Se esiste} \quad \lim_{x \to c} f'(x)\,, \tag{3.6}$$

allora necessariamente f è derivabile in $x = c$ e si ha

$$f'(c) = \lim_{x \to c} f'(x)\,. \tag{3.7}$$

ATTENZIONE. La parte in grassetto in (3.6) è necessaria. In altre parole in generale (3.7) è **falsa**.

Per convincersene si consiglia di svolgere il seguente esercizio.

Esercizio 3.2. Sia

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0\,. \end{cases} \tag{3.8}$$

Controllate che la seguente affermazione è falsa e dite perché.

$$\lim_{x\to 0} h'(x) = h'(0)\,.$$

Il precedente esercizio dimostra pure che non tutte le funzioni derivabili in un intervallo $[a, b]$ ammettono derivata continua in $[a, b]$.

Esercizio 3.3. Riusciamo a vederlo ?

Esercizio 3.4. (Miscellanea Bernoulliana) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti.

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\mathrm{tg}(x)} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x)\,, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad ,$$

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} (x)^{x^\alpha} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \alpha x}{x - \alpha x^2} \in \mathbb{R} \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \alpha x}{x - \alpha x^2} \quad ,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2\alpha} e^{-\alpha x^2} \neq 0$$

Le prossime versioni dei teoremi di Bernoulli sono dei corollari degli enunciati che oramai già conosciamo, ma sono particolarmente utili. Esse servono a trattare un caso che abbiamo incontrato ad esempio all'inizio del capitolo quando consideravamo soltanto i polinomi (1.1). Si era visto allora che se $a_0 = a_1 = 0$ e $b_0 = b_1 = 0$, allora si poteva procedere nell'ipotesi $b_2 \neq 0$, ovvero nell'ipotesi $g''(0) \neq 0$. Ecco la versione adatta a funzioni con un buon numero di derivate.

Teorema 3.5. *Sia I un intervallo della forma $I = (a, b)$ con $a < b$ e sia $c \in (a, b)$. Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in I e derivabili $N + 1$ volte in $I\backslash\{c\}$ e sia $k \in \mathbb{N}$, $k \leq N$. Se*

$$\lim_{x\to c} f^{(j)}(x) = \lim_{x\to c} g^{(j)}(x) = 0\,, \quad j = \{0, 1, \cdots, k\} \tag{3.9}$$

se

$$\forall x \in (a, b) \quad , \quad g^{(j)}(x) \neq 0\,, \quad j \in \{0, 1, \cdots, k\} \tag{3.10}$$

e **se esiste**

$$\lim_{x\to c} \frac{f^{(k+1)}(x)}{g^{(k+1)}(x)}\,, \tag{3.11}$$

allora esiste anche

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} \tag{3.12}$$

e si ha

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f^{(k+1)}(x)}{g^{(k+1)}(x)}\,. \tag{3.13}$$

Teorema 3.6. *Sia I un intervallo della forma $I=(a,+\infty)$. Siano $f,g:I\to\mathbb{R}$ due funzioni continue e derivabili $N+1$ volte in I e sia $k\in\mathbb{N}$, $k\leq N$. Se*

$$\lim_{x\to c}f^{(j)}(x)=\lim_{x\to c}g^{(j)}(x)=+\infty\,,\quad j=\{0,1,\cdots,k\} \tag{3.14}$$

se

$$\forall x\in(a,b)\quad,\quad g^{(j)}(x)\neq 0\,,\quad j\in\{0,1,\cdots,k\} \tag{3.15}$$

e **se esiste**

$$\lim_{x\to c}\frac{f^{(k+1)}(x)}{g^{(k+1)}(x)}\,, \tag{3.16}$$

allora esiste anche

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \tag{3.17}$$

e si ha

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f^{(k+1)}(x)}{g^{(k+1)}(x)}\,. \tag{3.18}$$

Gli esercizi che seguono servono a familiarizzare con l'uso dei due teoremi precedenti. Cercate pertanto di usare questi ultimi per risolverli.

Esercizio 3.7. Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}{x^4}\,,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}}{x^3}\,.$$

Esercizio 3.8. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}{x^4}\,,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^{10^5}}\,.$$

Accenno di dimostrazione del Teorema 3.5. Non ci sono idee nuove. Si cerca (e ci si riesce) di ricondursi dopo un certo numero di iterazioni al caso del corrispondente Teorema 2.1. L'unica cosa che vale la pena puntualizzare è il fatto seguente. Questa volte è possibile estendere per continuità in $x=c$ non soltanto le funzioni f e g

ma anche le loro derivate fino all'ordine k. Questo serve per fare scattare l'ipotesi induttiva.

È un esercizio, (ben noioso!), quello di scrivere l'enunciato corrispondente ai casi dei Teoremi 2.15 e 2.16. La dimostrazione dei Teoremi 2.15 e 2.16 viene omessa. Si possono consultare vari testi. Il lettore interessato può riferirsi ad esempio al testo di Giusti.

Concludiamo il capitolo con una spiegazione che, a questo punto, speriamo sia superflua. Il titolo del capitolo non si legge "seicentodieci fattoriale".

Suggerisce invece che, ad una apparente offesa di quel tipo, si può replicare in vari modi perché c'è zero e zero! e non tutti gli zeri sono uguali. In particolare, il nostro interlocutore potrebbe pure essere uno zero di ordine superiore!