CAPITOLO 6

Datemi un polinomio...

1. (Quasi) tutte le funzioni somigliano ad un polinomio

Anche stavolta la ditta Bernoulli è stata soppiantata da coloro che hanno pubblicato prontamente le loro (ri)scoperte. Questa volta almeno 5 o 6 matematici avevano anticipato Brook Taylor a cui viene attribuita la formula di estrema importanza pubblicata nel 1715. Il nome Maclaurin, pure molto gettonato, discende da un lavoro del 1742. Probabilmente Jean Bernoulli (ancora lui!!) sarebbe da considerare il vero scopritore.

Sovrastimare l'importanza di una versione precisa dell'affermazione in grassetto che apre la sezione è difficile. Va chiarito che, quando i risultati che saranno raccontati in questo capitolo furono capiti ed enunciati, le funzioni erano, come sottolineato nell'introduzione del capitolo 3, non chiaramente definite. Quasi tutti gli scienziati erano propensi a credere che le "vere" funzioni fossero solo quelle che oggi chiameremmo "analitiche". Scopriremo cosa questo significhi fra breve. Per il momento diciamo che si tratta di una classe che è (molto) più restrittiva di quella delle funzioni che sono derivabili un numero arbitrario di volte. Per queste funzioni analitiche si può dimostrare un enunciato di una eleganza stratosferica. Ma anche in un ambito meno restrittivo di funzioni buonette ma non proprio ideali (ad esempio con una derivata terza un po' difettosa, oppure persino una derivata prima schifosa), si riesce a salvare una parte dell'enunciato. La strategia del presente capitolo sarà allora la seguente: data una certa funzione f ed un punto x_0 nel dominio di f, cercare di fornire la **formula** di un polinomio che sia, in un intorno di x_0 ed in un senso da precisare, la migliore approssimazione della funzione f **fra tutti i possibili polinomi**.

Prima di partire, visualizziamo ciò di cui stiamo parlando. Consideriamo una vecchia amica (sempre giovanile, per carità): la funzione esponenziale. Ammiratela in tutto il suo splendore in varie "pose" ed accanto ad amici fraterni nelle Figure da 1 a 7.

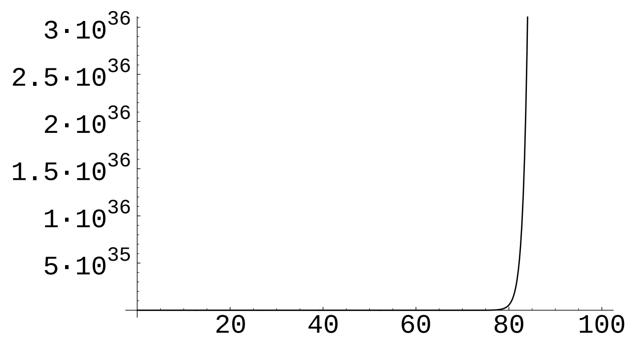

FIGURA 1. L'esponenziale vista da (troppo) lontano

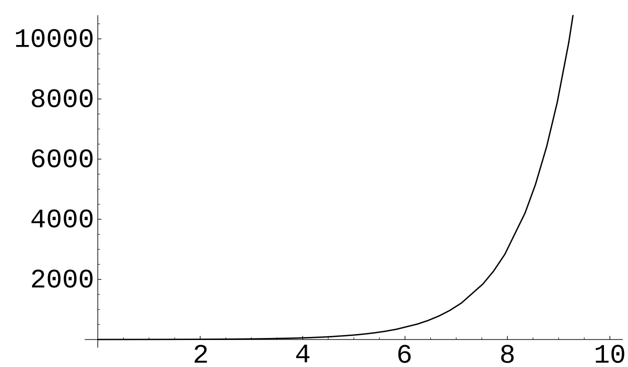

FIGURA 2. L'esponenziale vista da lontano

Mica male!! Buona parte di questo capitolo sarà dedicata a capire come si trovano quei buoni polinomi in compagnia della funzione esponenziale e che proprietà hanno (ovvero in che senso sono vicini alla funzione da approssimare).

Ricordiamo che il nostro programma è di approssimare una classe possibilmente ampia di funzioni con polinomi. Premettiamo alcune considerazioni.

2. Quando c'è speranza? (Condizioni necessarie)

Sia $I = (a, b)$ con $a < b$ e sia $x_0 \in I$. Sia infine $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Come esercizio di riscaldamento proponiamoci la seguente domanda. Fra tutti i polinomi di un certo fissato massimo grado N qual è **il migliore** per approssimare f in un

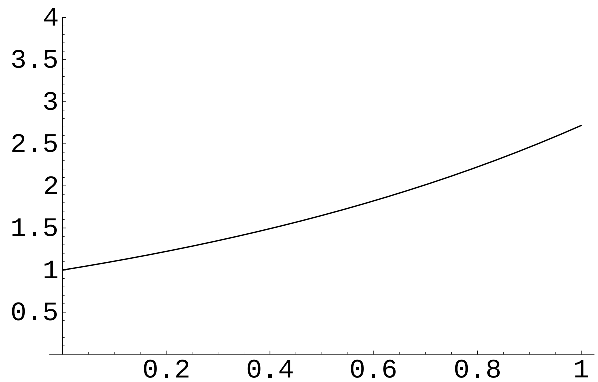

FIGURA 3. L'esponenziale vista da vicino

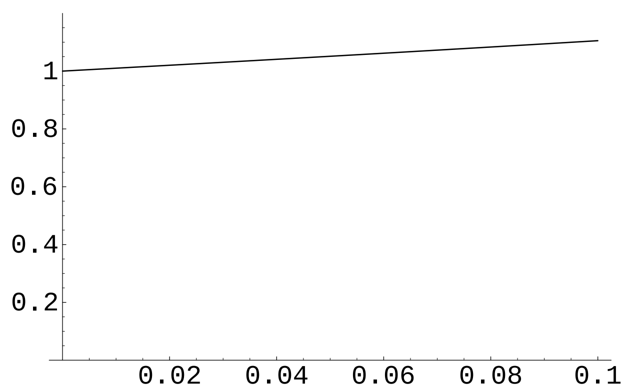

FIGURA 4. ... vista da ancora più vicino

intorno di x_0? Formulata cosí la domanda fa accapponare la pelle. Vediamo alcuni dei motivi cominciando col caso apparentemente stupido di $N = 0$. Si tratta allora semplicemente di decidere fra tutte le funzioni **costanti** (ovvero "polinomi di grado zero) quale sia quella che approssima meglio f in x_0. Se il grafico di f è come nella Figura 8 la risposta è semplice. Si cerca una retta orizzontale...

Qualunque sia il criterio di scelta vorremmo che in questo caso selezioni il polinomio $P_0 = P_0(x)$ costantemente uguale ad $f(x_0)$! Cioè fra tutte le rette orizzontali si prende quella che interseca il grafico di f esattamente nel punto $(x_0, f(x_0))$. Quindi la scelta, in questo caso, sembra essere non ambigua o, come dicono i matematici, (e i dittatori!) unica! (L'ultimo simbolo non significa naturalmente (unica)^2.)

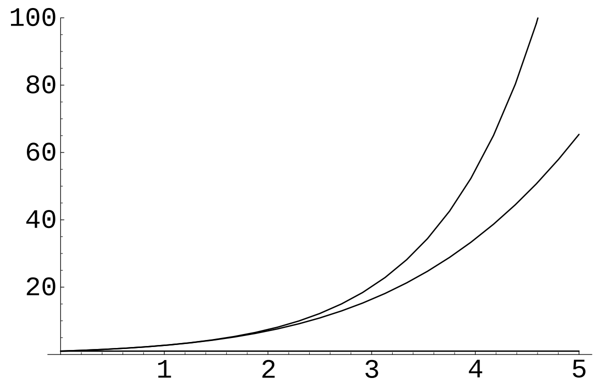

FIGURA 5. Ed ora in compagnia di un buon polinomio di grado quattro

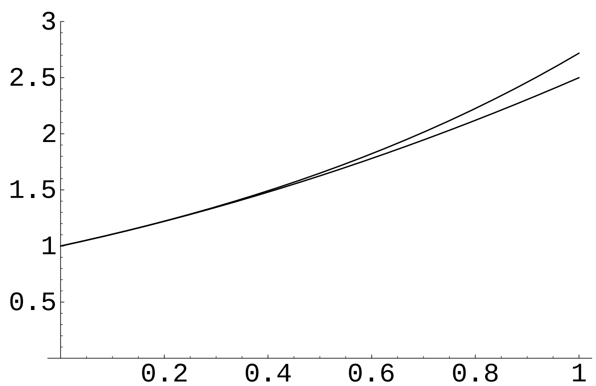

FIGURA 6. . . . di grado due

Il prossimo esempio mostra però che qualche cautela è indispensabile. Se si sceglie

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \,, \end{cases} \tag{2.1}$$

(che ha un nome: funzione di Heaviside), viene il dubbio che la stessa scelta $P_0(x) = f(x_0) = 1$ non sia poi tanto migliore della scelta $P_0(x) = 0$ oppure $P_0(x) = \frac{1}{2}$ ad esempio.

Ecco allora che l'ipotesi naturale per trarci d'impaccio è la continuità nel punto x_0. Il teorema in questo caso dirà una cosa che già avevamo sentito dire, sia pure in un linguaggio leggermente diverso. Se f è continua in x_0 esiste, **unico**, un polinomio di grado zero $P_0(x) \equiv a_0$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - P_0(x) \right) = 0 \,. \tag{2.2}$$

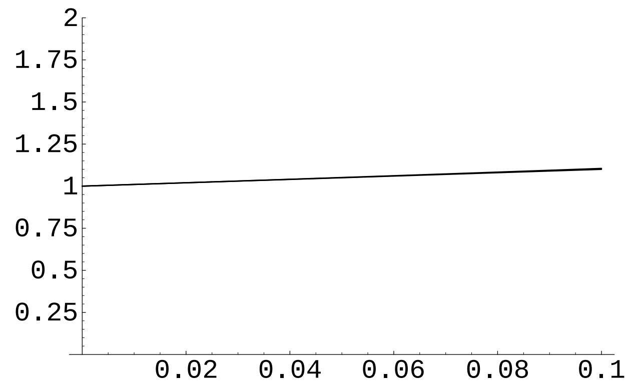

FIGURA 7. . . . di grado uno! Ma l'intervallo è piccoletto! È forse sparito un grafico?

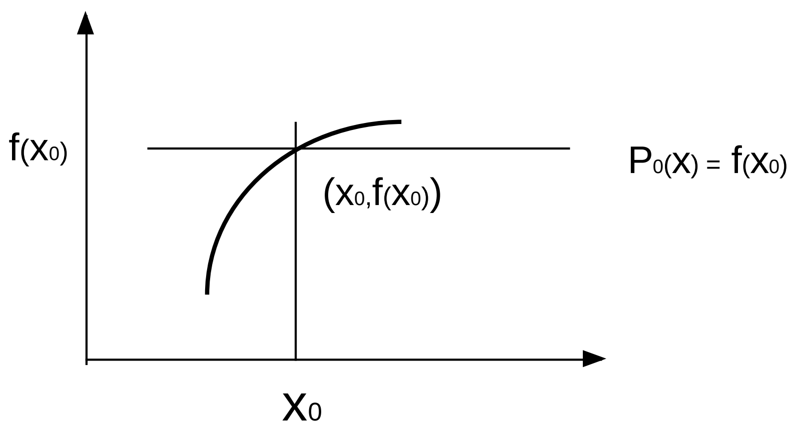

FIGURA 8. Una funzione regolare

Inoltre $a_0 = f(x_0)$.

Notate che potremmo ricordare la ricetta (2.2), dicendo che la differenza fra f e P_0 deve essere infinitesima in $x = x_0$. In formule

$$f(x) = f(x_0) + \omega_0(x - x_0)\,, \quad \lim_{x\to x_0} \omega_0(x - x_0) = 0\,. \tag{2.3}$$

La richiesta (2.2) o, se si preferisce la (2.3) ha la seguente caratteristica.

a) Prescrive un unico polinomio nel caso di f continua. (Perché unico?)
b) È inesaudibile nel caso della funzione di Heaviside.

Adesso riproponiamo il discorso a livello di polinomi di grado al più uno. Allora il grafico del polinomio è ancora quello di una retta ma questa volta non necessariamente

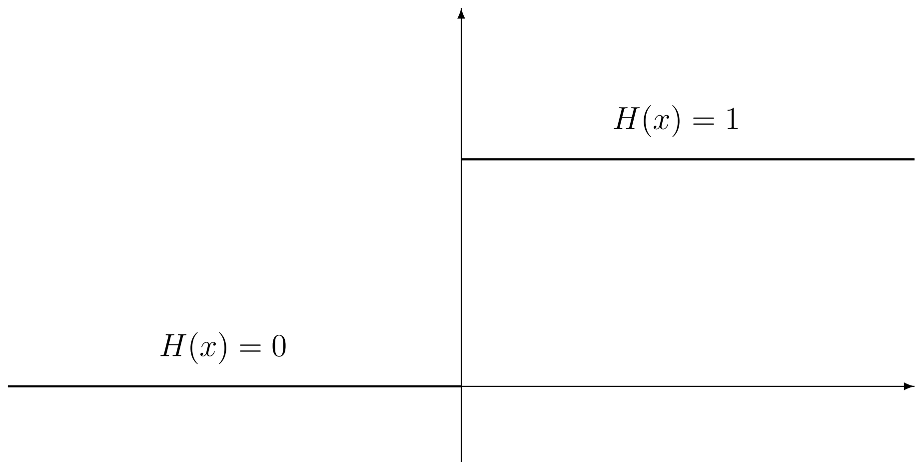

FIGURA 9. La funzione di Heaviside

orizzontale. Ovviamente, per essere sicuri di non peggiorare rispetto al passo di ordine zero, considereremo tutte e sole le rette del fascio passante per $(x_0, f(x_0))$. Quindi il polinomio deve avere la forma $P_1(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0)$. Se si sono studiate le derivate non si dovrebbero avere dubbi. "La migliore" scelta è data dalla retta tangente al grafico nel punto in questione, anzi **sarebbe** .... Stavolta siamo più prudenti e diremo..."a patto che questa retta tangente ci sia". Quindi ci aspettiamo un enunciato di questo tipo.

Se f è derivabile in x_0 esiste, **unico**, un polinomio di grado al più uno, $P_1(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0)$ tale che non solo

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - [f(x_0) + a_1(x - x_0)] \right) = 0 \tag{2.4}$$

(questa è ovvia, come si diceva, non è vero?) ma si abbia addirittura

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - [f(x_0) + a_1(x - x_0)]}{x - x_0} \right) = 0\,. \tag{2.5}$$

Inoltre il coefficiente a_1 è anch'esso determinato: $a_1 = f'(x_0)$. L'ultima osservazione segue, infatti, dalla definizione di derivabilità in quanto

$$x \neq x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - [f(x_0) + a_1(x - x_0)]}{x - x_0} = \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) - a_1\,. \tag{2.6}$$

Ora basta far tendere x ad x_0 per determinare a_1.

Osserviamo che la (2.5) si può anche scrivere nel modo seguente, leggermente più suggestivo:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \omega_1(x - x_0)\,, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{\omega_1(x - x_0)}{(x - x_0)} = 0\,. \tag{2.7}$$

Notate che stiamo creando una sorta di "gerarchia" nel modo di tendere a zero. Il modo dato da (2.4) è "più forte" del modo dato da (2.2). Al momento opportuno (vedere la Definizione 3.3), fisseremo questo importante concetto.

L'idea ora è di continuare questo procedimento finché sia possibile. Questo dipende da quanto è "regolare" f. Se, ad esempio, f è derivabile una volta ma non due, ci dovremo fermare ed il problema sul quale ci concentreremo sarà quello di trovare altri modi, complementari alla (2.5) per quantificare la differenza fra la funzione ed il polinomio che gli abbiamo associato.

Prima di passare ad enunciati formali è conveniente fissare alcune definizioni. Ci scusiamo per non avere ancora fatto le presentazioni.

Abbiamo appena incontrato il **polinomio di Taylor** di **ordine** zero e di ordine uno nel punto x_0.

Rispettivamente

$$P_0(x) = f(x_0) \quad \text{e} \quad P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Essi definiscono i corrispettivi **resti di Taylor** di ordine zero ed uno

$$R_0(x) = f(x) - P_0(x) \quad \text{e} \quad R_1(x) = f(x) - P_1(x)\,,$$

o più esplicitamente

$$R_0(x) = f(x) - f(x_0) \quad \text{e} \quad R_1(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]\,.$$

In questo linguaggio (2.2) e (2.5) si leggono rispettivamente come segue.

Se f è continua in x_0 allora esiste, **unico**, un polinomio di grado zero $P_0 = f(x_0)$ tale che

$$\lim_{x\to x_0} R_0(x) = 0\,. \tag{2.8}$$

Se f è derivabile in x_0 esiste, **unico**, un polinomio di grado al più uno $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ tale che

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{R_1(x)}{x - x_0}\right) = 0\,. \tag{2.9}$$

La formula di Taylor per il polinomio di ordine N e per il corrispondente resto valida per funzioni che sono derivabili N volte in un intorno di $x = x_0$ sono concettualmente semplici:

$$P_N(x) := \sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j\,, \quad R_N(x) = f(x) - P_N(x) \tag{2.10}$$

con le solite convenzioni sul significato da attribuire ai simboli quando $j = 0$. In questo caso $\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$ è un modo a dir poco demenziale di scrivere $f(x_0)$; (ci vorrebbe il punto esclamativo ma in questo contesto si temono fraintendimenti...).

Osservazioni 2.1. i) Osserviamo esplicitamente che, come al solito, "ordine" e "grado" devono essere drasticamente separati. Il polinomio di Taylor di **ordine uno** può tranquillamente essere di **grado zero**. Provare con una funzione costante per credere.

ii) Si usa dire che il polinomio ed il resto in questione di cui alla (2.10) sono **centrati** in $x = x_0$.

3. Il polinomio di Taylor

Passiamo al Teorema di Bernoulli attribuito a Taylor.

Teorema 3.1. *Teorema di Taylor.*

Sia I un intervallo del tipo $I = (a, b)$, $a < b$, sia $x_0 \in (a, b)$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile N volte in I. Posto

$$R_N(x) := f(x) - \sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j \,, \tag{3.1}$$

si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_N(x)}{(x - x_0)^N} = 0 \,. \tag{3.2}$$

Inoltre vale il seguente risultato di unicità del polinomio di Taylor.

Teorema 3.2. *Nelle ipotesi del teorema precedente sia P un polinomio di grado al più N, ($P(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j (x - x_0)^j$) tale che si abbia*

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^N} \right] = 0 \,. \tag{3.3}$$

Allora

$$P(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j \,. \tag{3.4}$$

Si noti che, per il principio di identità dei polinomi, (3.4) è equivalente alla seguente l'affermazione apparentemente più forte:

$$\forall j \in \{0, 1, \cdots, N\}, \quad a_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \,. \tag{3.5}$$

Pensiamo sia arrivato il momento di proporre una definizione formale.

Definizione 3.3. Fissato $k \in \mathbb{N}$ ed un certo intervallo I del punto $t = t_0$ diremo che la funzione $\omega = \omega(t)$ è un infinitesimo di ordine superiore a k per t che tende a t_0 se

$$\lim_{t \to t_0} \frac{w(t)}{(t - t_0)^k} = 0\,. \tag{3.6}$$

In questo linguaggio si possono leggere le (3.1) e (3.2) nel seguente modo

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \omega_N(x) \tag{3.7}$$

dove $\omega_N(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a N per x che tende a x_0.

Tale modo di descrivere la formula di Taylor viene chiamato "forma di Peano" per il resto di Taylor.

Esercizio 3.4. Dimostrare che se P e Q sono due arbitrari polinomi tali che

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad P(x) = Q(x)$$

allora per ogni intero j, il coefficiente di ordine j di P è uguale al corrispondente coefficiente di ordine j di Q. (Non si faccia a priori l'ipotesi che il grado dei due polinomi sia lo stesso).

Esercizio 3.5. Si consideri la funzione dell'Esercizio 3.2 del Capitolo 5. Usando i calcoli sviluppati di seguito, calcolare il polinomio di Taylor nel punto $x = 0$ associato ad h di ordine N.

Soluzione-commento-esercizio. Notate una sconcertante conseguenza. Qualunque sia l'**ordine** N, il polinomio di Taylor associato ad h ha sempre **grado** zero, in quanto è il polinomio identicamente nullo. Quanto vale allora il resto di ordine N?

Dimostrazione del Teorema 3.1. Per costruzione $R_N(x)$ tende a zero per x che tende ad x_0 e (3.2) da luogo ad una forma indeterminata. In effetti si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{d^j R_N(x)}{dx^j} = \lim_{x \to x_0} \frac{d^j(f(x) - P(x))}{dx^j} = \lim_{x \to x_0} \left(f^{(j)}(x) - P^{(j)}(x)\right) =$$

$$f^{(j)}(x_0) - P^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0) - \frac{f^{(j)}(x_0) j!}{j!} = 0 \quad , \quad j \in \{0, 1, \cdots, N\}\,.$$

Con il linguaggio appena introdotto diciamo che R_N è un infinitesimo di ordine superiore a N per x che tende a x_0. (Da ora in poi ometteremo la frase "per x che tende a x_0" sicuri di non creare fraintendimenti).

D'altronde anche la funzione $g(x) = (x - x_0)^N$ è infinitesima, ma solo di ordine superiore a $N-1$. Infatti essa ha solo $N-1$ derivate nulle in x_0:

$$\frac{d^j (x-x_0)^N}{dx^j} = 0\,, \quad j \in \{0, 1, \cdots, N-1\} \quad ; \quad \frac{d^N (x-x_0)^N}{dx^N} = N! \neq 0\,.$$

Vogliamo concludere che "il numeratore vince". Basta applicare il Teorema 3.5 del Capitolo 5 esattamente N volte.

Dimostrazione del Teorema 3.2. Dobbiamo dimostrare che vale (3.5). **Supponiamo** per qualche riga, che valga la seguente famiglia di enunciati:

$$\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)^j} \right] = 0\,, \quad , \quad j \in \{0, 1, \cdots, N\}\,. \tag{3.8}$$

Allora (3.8), applicata per $j = 0$ implica $\lim_{x\to x_0} [f(x) - P(x)] = 0$, ovvero $P(x_0) = f(x_0)$. Quest'ultima è equivalente alla relazione $a_0 = f(x_0)$.

"Chi ben comincia è a metà dell'opera". Quindi la dimostrazione vale per $j \in \{0, \cdots, [N/2] + 1\}$ ... stiamo scherzando[1].

Usiamo ora la (3.8) per $j = 1$. Applicando il Teorema 2.1 del Capitolo 5, si trova $P'(x_0) = f'(x_0)$ che è equivalente alla relazione $a_1 = f'(x_0)$. In generale si ha

$$0 = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\frac{d^j (f(x) - P(x))}{dx^j}}{\frac{d^j (x-x_0)^j}{dx^j}} \right) =$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(j)}(x) - P^{(j)}(x)}{j!} = \frac{f^{(j)}(x_0) - P^{(j)}(x_0)}{j!}\,, \quad j \in \{0, 1, \cdots, N\}\,.$$

Poiché $P^{(j)}(x_0) = (j!) a_j$, la dimostrazione sarà conclusa dopo aver controllato che (3.3) implica (3.8). Questo è vero, facile da verificare e viene lasciato per esercizio.

Suggerimento: $\frac{1}{(x-x_0)^j} = \frac{1}{(x-x_0)^N}(x - x_0)^{N-j}$ e per $j < N$, il termine $(x - x_0)^{N-j}$ è infinitesimo.

Va osservato a questo punto che la tradizione vuole che le notazioni su polinomio e resto di Taylor non siano totalmente omogenee al variare dei testi. In particolare ricorre il dilemma di cosa sia un "parametro". Questo concetto è sfuggente come un'anguilla. Si può sempre pensare che un parametro sia solo un modo scorretto di fare comparire una nuova incognita. Nel nostro caso tutti i ragionamenti avevano

[1] Anche perché, nel caso dell'induzione, non è chiaro cosa sia la "metà" di $\mathbb{N}$ (L.O.).

fissato x_0 una volta per tutte. Si può legittimamente obiettare che polinomio e resto dipendono anche da x_0. Molti autori preferiscono allora la notazione

$$R_N = R_N(x, x_0)$$

e analogamente dicasi per il polinomio associato.

In effetti la variabile "naturale" è "$x - x_0$". Dove possibile eviteremo l'uso di notazioni complicate ma non dubitate, se risulterà utile non esiteremo a inserire esplicitamente la dipendenza da x_0 e a rendere la notazione incomprensibile.

Esercizio 3.6. Trovare i polinomi di Taylor per $x_0 = 0$ e di ordine 1, 2 e 3 per le seguenti funzioni .

$$3x + x^2 \quad , \quad x^4 \quad , \quad 2x + \operatorname{sen}(x^4) \quad , \quad \operatorname{sen}(x) + x^4 \quad , \quad e^{x^2}(x^2 + x^4)\,,$$

$$\operatorname{sen}(x) \quad , \quad \cos(x) \quad , \quad \ln(1-x) \quad , \quad \operatorname{tg}(x) \quad , \quad \frac{1}{1-x} \quad , \quad \frac{1}{1+x}$$

$$\operatorname{sen}(x^2) \quad , \quad \cos(x^4) \quad , \quad \ln(1-x^2) \quad , \quad \operatorname{tg}(x^3) \quad , \quad \frac{1}{1-x^2} \quad , \quad \frac{x^4}{1-x^2}$$

Esercizio 3.7. Gli esercizi appena svolti dovrebbero aver insegnato che
i) il polinomio di Taylor di una somma di funzioni è uguale a . . .
ii) per calcolare il polinomio di Taylor di ordine N di un prodotto di due funzioni è sufficiente calcolare preliminarmente il polinomio di ordine N di ogni singola funzione e poi . . .

4. Il problema di una "stima" del resto: una piccola delusione.

Il "resto" deve essere piccolo (come dimostrano le esperienze al supermercato). Altrimenti che resto è? Ma quanto piccolo? Una richiesta apparentemente ragionevole ed anzi minimale sembra la seguente. Il resto deve essere più piccolo dell'oggetto di partenza. Nel nostro contesto ci chiediamo con malcelata sicumera: "supponiamo che f sia buonissima (definita e con un numero di derivate grande a piacere in tutto $\mathbb{R}$!), è vero che, magari a patto di scegliere N grande (un miliardo!), si abbia

$$|R_N(x)| < |f(x)|$$

almeno in un intorno di un fissato punto x_0"?

AH-AH-AH! Figuriamoci!

. . . Silenzio pedagogico. . .

O no? Ehm. NOOO! Quella stramaledetta funzione (3.5) che abbiamo incontrato prima! Ma come sarà fatta? (Disegnate il grafico se ancora non l'avete fatto!)

Purtroppo quell'esempio ha un esito catastrofico per le nostre aspettative ma non per la nostra teoria. Chi ha svolto gli esercizi relativi (che erano facoltativi non temete!) ricorderà che il polinomio di Taylor di ordine N centrato in $x_0 = 0$ è identicamente nullo per ogni $N \in \mathbb{N}$. E conseguentemente il resto soddisfa

$$R_N(x) \equiv f(x)\,, \quad \text{e quindi} \quad |R_N(x)| \equiv |f(x)| \quad \forall N \in \mathbb{N}\,.$$

Che questa sia una tragedia non c'è dubbio ma, come si dice a Roma, "morto un Papa ... se ne fa un altro.

La morale del precedente esempio è che la sola informazione implicita nel Teorema di Taylor, anche per ordini alti di N non è sufficiente a "quantificare" la bontà dell'approssimazione fatta. Quello che si cerca quindi è una **formula di rappresentazione** del resto che sia semplice ma allo stesso tempo consenta una **stima del resto**.

5. Il resto nella formula di Taylor

Prima di affrontare questo nuovo argomento, tiriamoci su il morale con qualche esempio di segno opposto.

Esempio 5.1. Dovrebbe essere evidente che se la funzione f di partenza (quella che vogliamo approssimare in un certo punto x_0) è proprio un polinomio di **grado** N, il polinomio di Taylor di **ordine** N, coincide con la funzione in ogni punto della retta reale e pertanto si ha un risultato "perfetto". Il corrispondente resto infatti è identicamente nullo.

Vediamo ora un esempio familiare e, in una certa misura, tipico di una classe interessante: le funzioni che battezzeremo analitiche.

Esercizio 5.2. Sia $f(x) = \frac{1}{1-x} \quad , \quad x \in (-1,1)$. Scrivere il polinomio di Taylor per $x_0 = 0$ di ordine due e cinquemila.

Soluzione bizzarra.

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \lim_{n\to+\infty} (1 + x + \cdots + x^n)\,.$$

"Allora" il polinomio di Taylor di ordine N deve essere $P_N(x) = \sum_{j=0}^N x^j$.

Questo argomento è "curioso" ed infatti serve solo a farvi incuriosire. Ci torneremo brevemente alla fine del presente capitolo e più a lungo in seguito.

Ritorniamo al discorso su una buona quantificazione del resto considerando un esempio particolarmente semplice ed istruttivo. Consideriamo la beneamata funzione esponenziale in un intorno dell'origine. Per definizione, il resto di ordine zero è

$$R_0(x) = f(x) - f(0) = e^x - 1$$

e gode della proprietà di essere un infinitesimo ovvero vale

$$\lim_{x \to 0} R_0(x) = 0\,.$$

Cerchiamo di ottenere una stima quantitativa. Ad esempio, supponiamo di voler conoscere (approssimativamente) il valore di e ovvero di $f(0)$. Invochiamo un altro "must" del presente corso, il teorema di Lagrange. Esiste un punto ξ compreso fra x e 0 tale che

$$f(x) - f(0) = x f'(\xi)\,,$$

quindi in particolare , scegliendo $x = 1$ deduciamo che esiste un $\xi \in (0,1)$ tale che

$$e - 1 = R_0(1) = f(1) - f(0) = f'(\xi) = e^\xi$$

e quindi, per la monotonia dell'esponenziale, otteniamo le disuguaglianze (tutte facili ma cercate di capire da dove vengono!)

$$1 = \min_{\xi \in [0,1]} e^\xi = e^0 \leq e - 1 = f(1) - f(0) \leq \max_{\xi \in [0,1]} e^\xi = e\,.$$

Concludiamo, per ora, che $e \geq 2$. (Si potrebbe concludere $e > 2$ ma non stiamo a sottilizzare: faremo di meglio!)

Il calcolo però si può iterare considerando il resto di ordine uno. A questo fine ci si serve di una rappresentazione per il resto di ordine superiore che viene detta **resto di Taylor nella forma di Lagrange**. Come immaginate, essa si basa sul Teorema di Lagrange (vedi Capitolo 4).

TEOREMA 5.3. *Sia $I = (a,b)$ un intervallo e sia f definita e derivabile $N+1$ volte in I. Fissati arbitrariamente due punti $x, x_0 \in I$, esiste un punto ξ appartenente al segmento che congiunge x_0 ed x, tale che valga la seguente formula*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1}\,. \tag{5.1}$$

Una maniera concisa, di scrivere (5.1) è di usare la definizione di polinomio di Taylor di ordine N. Allora si ha

$$f(x) = P_N(x) + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1}\,. \tag{5.2}$$

Esercizio 5.4. Continuiamo nella ricerca di una approssimazione del valore della costante di Nepero. Quindi $f(x) = e^x$. Si ha

$$R_1(x) = f(x) - f(0) - xf'(0)\,.$$

Usando (5.2) per $N = 1$, si ottiene

$$R_1(x) = f(x) - f(0) - xf'(0) = \frac{1}{2}f''(\xi)$$

e quindi, usando ancora la monotonia dell'esponenziale,

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\min_{\xi\in[0,1]} e^{\xi} \le R_1(1) = f(1) - f(0) - 1\cdot f'(0) \le \frac{1}{2}\max_{\xi\in[0,1]} e^{\xi} = \frac{e}{2}$$

e quindi

$$2.5 \le e \le 4\,.$$

Tale stima migliora notevolmente la precedente. Effettivamente, proseguendo si ottiene una successione di stime che molto rapidamente produce una approssimazione di e che batte quella riportata nel capitolo dove abbiamo trattato gli esponenziali. Sveleremo ora un piccolo segreto. Ricorderete che nell'introduzione del presente capitolo abbiamo esibito spettacolari approssimazioni della funzione esponenziale mediante polinomi di ordine basso. Avevamo detto "buoni polinomi". Ora siamo in grado di capire in che senso. Quelli erano proprio i polinomi di Taylor centrati in $x = 0$ relativi alla funzione esponenziale e dei vari ordini.

Esercizio 5.5. Stimare alla prima cifra decimale la costante di Nepero facendo uso del procedimento descritto.

Dimostrazione del Teorema 5.3. Fissiamo $x \in I$ con $x \neq x_0$ e dimostriamo (5.1) soltanto in questo caso. (Altrimenti vale lo stesso ma per altri e ovvi motivi). Ancora una volta useremo il Teorema di Cauchy (vedere il Teorema 2.13 del Capitolo 5). La scelta delle funzioni è astuta: ci si arriva dopo un certo numero di tentativi. Poniamo

$$F(z) = \sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(z)}{j!}(x-z)^j\,, \quad G(z) = (x-z)^{N+1}\,. \tag{5.3}$$

La variabile z deve essere scelta in maniera che F e G siano definite e inoltre G' non si annulli. Una buona scelta è $z \in J = [\alpha, \beta] \equiv [x, x_0]$ se $x < x_0$ e $J = [x_0, x]$ se $x > x_0$.

Infatti in questo caso le ipotesi del teorema di Cauchy sono soddisfatte. Quindi si ha che esiste $\xi \in (\alpha, \beta)$ tale che

$$\frac{F(x_0) - F(x)}{G(x_0) - G(x)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \,. \tag{5.4}$$

Restano da calcolare i vari contributi in (5.4). Si ha

$$F(x) = f(x)\,, \quad G(x) = 0\,, \quad F(x_0) = \sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$$

$$G(x_0) = (x - x_0)^{N+1}\,, \quad G'(z) = -(N+1)(x - z)^N \,.$$

Abbiamo lasciato a parte il calcolo di $F'(z)$ che è leggermente più complicato. Fidatevi un attimo. Si ha

$$F'(z) = \frac{f^{(N+1)}(z)}{N!}(x - z)^N \,. \tag{5.5}$$

Allora (usando nella propria mente il comando “cut and paste”) la formula (5.4) si legge nel seguente modo. Esiste ξ nell'intervallo di estremi x e x_0 tale che

$$\frac{\sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j - f(x)}{(x - x_0)^{N+1}} = \frac{\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{N!}(x - \xi)^N}{-(N+1)(x - \xi)^N} \,. \tag{5.6}$$

La formula (5.6) è quella che desideravamo. Ma ha bisogno di un trattamento estetico altrimenti è difficile rendersene conto. Facciamo le seguenti cose. Cambiamo segno ad ambo i membri, moltiplichiamo per $(x - x_0)^{N+1}$, semplifichiamo la quantità a destra dell'uguale (liberiamola dall'ingombro del termine $(x - \xi)^N$) e ricordiamo che $(N + 1) \times N! = (N + 1)!$. Allora (5.6) si riscrive nel modo seguente

$$f(x) - \left[\sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j \right] = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1} \,.$$

Infine ci si deve ricordare che fidarsi è bene ma non fidarsi è molto meglio. Verifichiamo allora (5.5).

$$F'(z) = \sum_{j=0}^{N} \left[\frac{f^{(j+1)}(z)}{j!}(x - z)^j \right] + \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{f^{(j)}(z)}{j!}(j - 1)(x - z)^{j-1} \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \left[\frac{f^{(j+1)}(z)}{j!}(x - z)^j \right] - \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{f^{(j)}(z)}{(j-1)!}(x - z)^{j-1} \right] =^{(k:=j-1)}$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \left[\frac{f^{(j+1)}(z)}{j!}(x - z)^j \right] - \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{f^{(k+1)}(z)}{k!}(x - z)^k \right] =^{(\text{“}j\text{” è “muto”})}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{f^{(k+1)}(z)}{k!}(x-z)^k \right] + \frac{f^{(N+1)}(z)}{N!}(x-z)^N - \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{f^{(k+1)}(z)}{k!}(x-z)^k \right] =$$

$$= \frac{f^{(N+1)}(z)}{N!}(x-z)^N \, .$$

Vediamo ora varie applicazioni della formula di Taylor.

Globale convessità. Cominciamo con una osservazione assai utile ed elegante. Supponiamo di avere una funzione f derivabile due volte in un certo intervallo $I = (a, b)$ eventualmente illimitato. Supponiamo che la derivata seconda di f sia non negativa in I (abbiamo visto nel Capitolo 4 che questa condizione può essere letta come la condizione di convessità di f). Infine supponiamo che esista un punto "stazionario" ovvero $x_0 \in I$ tale che $f'(x_0) = 0$. Allora $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in I$ ovvero x_0 è un punto di minimo assoluto per la funzione f.

Infatti, usando la formula di Taylor con il resto di Lagrange, si ha che per ogni $x \in I$, esiste un ξ (che dipende da x) tale che

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 \, .$$

Per ipotesi $f'(x_0) = 0$ e $f''(\xi) > 0$, per cui, per ogni $x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 \geq f(x_0) \, .$$

Naturalmente tale minimo assoluto non è necessariamente unico come si vede considerando una funzione costante. Ricordiamo pure che non necessariamente la positività della derivata seconda basta a concludere che la funzione abbia minimo come mostra $f(x) = e^x$.

Esercizio 5.6. Mostrare che tutte le seguenti funzioni definite su $\mathbb{R}$ hanno un minimo assoluto in $x = 0$.

$$f(x) = x^{2k} \, , \quad k \in \mathbb{N} \, , \quad f(x) = e^{x^2} \, , \dots \, .$$

Spesso non si ha a disposizione una informazione cosí potente come la globale convessità (o addirittura la non negatività della derivata seconda). Infatti le funzioni globalmente convesse sono "poche". Quelle "localmente" convesse invece sono molte. In particolare fra le funzioni dotate di derivate seconde in un fissato punto sono moltissime quelle per cui $c := f''(x_0) \neq 0$. Supponiamo allora che $f'(x_0) = 0$. Sappiamo già che se $c > 0$ il punto x_0 è di minimo relativo e se $c < 0$ è di massimo relativo. I metodi finora usati però non permettevano di concludere nel caso in cui $c = 0$. Taylor viene in soccorso.

Precisiamo che **dobbiamo** considerare ipotesi aggiuntive. Infatti, in caso contrario, tutte le situazioni possono verificarsi come mostrano gli esempi $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$ e $h(x) = -x^4$. Nel primo caso $x = 0$ non è estremo relativo, nel secondo $x = 0$ è massimo e nel terzo minimo (entrambi addirittura assoluti). In tutti questi casi $x = 0$ è stazionario e la la derivata seconda in zero è nulla.

Una possibilità è che si conoscano derivate di ordine superiore in $x = x_0$.

Assumiamo allora che f sia derivabile $N + 1$ volte con derivata $N + 1$-esima continua in I. Supponiamo inoltre che, nel punto $x - x_0$, siano nulle tutte le derivate dall'ordine **uno** fino all'ordine $N \geq 1$ mentre si ha $c_{N+1} := f^{(N+1)}(x_0) \neq 0$. Allora si può concludere. Più precisamente si ha la seguente casistica.

Casi possibili

Caso 1 N è pari. In questo caso $x = x_0$ non è di estremo relativo. Se $c_{N+1} > 0$, la funzione è crescente in un intorno di x_0 mentre, se $c_{N+1} < 0$, la funzione è decrescente in un intorno di x_0.

In particolare, per $N = 2$, scopriamo che se $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, il punto $x = x_0$ non è né di massimo né di minimo relativo.

Caso 2 N è dispari. In questo caso $x = x_0$ è di estremo relativo. Più precisamente, se $c_{N+1} > 0$, x_0 è di minimo relativo. Se invece $c_{N+1} > 0$, x_0 è di massimo relativo.

In particolare, per $N = 3$, scopriamo ad esempio che se $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$ e $f^{(4)}(x_0) > 0$, il punto $x = x_0$ è un punto di minimo relativo. Se invece $f^{(4)}(x_0) < 0$, il punto $x = x_0$ è un punto di massimo relativo.

Esercizio 5.7. Classificare il carattere (minimo, massimo, né l'uno né l'altro) del punto $x = 0$ per le seguenti funzioni. In alcuni casi si richiede implicitamente di definire sia la funzione che alcune delle sue derivate nell'origine.

$$f(x) = x^k\,, \quad k \in \mathbb{N}\,, \quad \frac{e^x - 1 - x}{x^2}\,,$$

Esercizio 5.8. Classificare il carattere del punto $x = 0$ per la funzione (3.2) del Capitolo 5. (FACOLTATIVO!)

Facciamo vedere che la casistica è corretta. Consideriamo quindi il caso in cui $f^{(N+1)}(x_0) \neq 0$. Per ipotesi, il polinomio di Taylor di ordine N coincide con $f(x_0)$.

Quindi

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + R_{N+1}(x) = f(x_0) + R_{N+1}(x) =$$

$$f(x_0) + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}$$

per un opportuno punto ξ appartenente all'intervallo che congiunge x e x_0.

In definitiva

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}\,. \tag{5.7}$$

Ricordiamo ora l'ipotesi che la derivata di ordine $N+1$ di f sia continua. Allora, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno $I_0 \subset I$ che contiene x_0, in cui $f^{(N+1)}(x)$ ha lo stesso segno di $f^{(N+1)}(x_0)$. Scegliamo dunque $x \in I_0$. Allora, per costruzione, anche ξ vi appartiene. Conseguentemente $f^{(N+1)}(\xi)$ ha lo stesso segno di $f^{(N+1)}(x_0)$. Se tale segno è il più, usando (5.7), vediamo che la differenza

$$f(x) - f(x_0)$$

ha lo stesso segno di $(x-x_0)^{N+1}$.

Pertanto, per N dispari si ha un massimo relativo e per N pari né l'uno né l'altro.

Il caso in cui $f^{(N+1)}(x_0) < 0$ segue allo stesso modo.

Esercizio 5.9. Calcolare massimi e minimi assoluti delle funzioni seguenti nell'intervallo $[-1,1]$. Dire inoltre se $x=0$ è un estremo relativo.

$$x^k\,, \quad k \in \mathbb{N} \quad , \quad e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \quad , \quad e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

Esercizio 5.10. Il precedente esercizio suggerisce che valga la seguente disuguaglianza in $[-1,1]$

$$e^x \geq 1 + x\,. \tag{5.8}$$

Caratterizzare il sottoinsieme più grande di $\mathbb{R}$ in cui vale la (5.8). Che disuguaglianza si può scrivere per

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \quad ?$$

6. Cenni sul concetto di funzione analitica

Questo argomento è decisamente prematuro. Si può saltare senza problemi. Magari ritornandovi sopra dopo aver studiato le serie. Al momento si tratta di un antipasto che potrebbe risultare indigesto.

Limitiamoci a studiare funzioni che in un certo intorno I abbiano un numero arbitrario di derivate. Queste funzioni meritano un nome per la loro notevole importanza e saranno chiamate, da ora in poi, funzioni "ciinfinito". La famiglia di tali funzioni sarà denotato con

$$C^\infty(I)\,. \tag{6.1}$$

Procedete pure, se vi sembra istruttivo, a dare la definizione formale. Si può inciampare. Si possono definire pure gli insiemi $C^k(I)$ per $k \in \mathbb{N}$ (si legge "cikappa di i").

Esercizio 6.1. Trovare $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ **non costante** che si annulla in infiniti punti. Per i più curiosi: esiste $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ **non costante** che si annulla nell'intervallo $[-1,1]$?

La risposta è interessante: essa stabilisce una divisione netta fra funzioni C^∞ e funzioni "analitiche".

Supponiamo allora di fissare $I = (a,b)$ e $x_0 \in I$. Possiamo scrivere allora la formula

$$P_N(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$$

e lo possiamo fare **per ogni** $N \in \mathbb{N}$.

La tentazione di scrivere il simbolo

$$P_\infty(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j \tag{6.2}$$

è quasi irresistibile. Ma che senso ha?

Il senso che vorremmo dargli è il seguente

$$P_\infty(x) = \lim_{N\to+\infty} \left[\sum_{j=0}^{N} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j\right] \tag{6.3}$$

Anche cosí bisogna lavorare per dargli un senso. Cominciamo ad analizzare alcuni casi particolari.

Se ad esempio la funzione f è essa stessa un polinomio di grado esattamente N, allora la formula non si presta ad equivoci. Tutti i termini $f^{(j)}(x_0)$ sono nulli da un certo indice j_0 in poi (precisamente da quale indice? Scriverlo in termini del grado del polinomio di partenza). Quindi in effetti in (6.3) il limite è "fittizio". Da un certo punto in poi tutti i termini della successione sono uguali: $P_k(x) = P_N(x)$ per ogni $k \geq N$! (Nel senso del punto esclamativo).

Ben più complicata ed interessante è la questione nel caso in cui esistano un numero infinito di derivate non nulle in x_0. Tratteremo questo argomento nel corso di Analisi I. Possiamo però dire subito che, anche nel caso di infiniti termini l'oggetto (6.3) è certamente definito in $x = x_0$. (E quanto vale allora?)

Ma, fissato $x \neq x_0$, la (6.3) definisce qualcosa soltanto se la corrispondente "serie converge".

Vanno distinti "essenzialmente" i seguenti casi.

Caso fortunato. Per ogni punto x di I, la serie converge ad un numero reale che coincide con il valore di f in x. Questo è in altre parole il caso in cui il resto di ordine N tende a zero per N che tende a $+\infty$.

Esempio tipico sono i polinomi con $I = \mathbb{R}$ e x_0 arbitrario, la funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$ con $I = (-1, 1)$ e $x_0 = 0$ ed altri ancora. Con opportune scelte di I ed x_0 vanno bene le funzioni trigonometriche, gli esponenziali e molte altre ancora.

Le funzioni che godono di questa bellissima ed elegante proprietà sono in una certa misura dei polinomi di "grado infinito". Saranno chiamate "**analitiche**".

Caso di massima disillusione. Per ogni punto $x \neq x_0$ di I, la serie converge ad un numero reale che **non coincide** con il valore di f in x. Questo è in altre parole il caso in cui il resto di ordine N si rifiuta di decrescere ed invece continua a coincidere con la funzione di partenza f ad ogni ordine. Abbiamo incontrato questo fenomeno nell'esempio (3.5).

Per distinguere questi due casi (che sono veramente molto diversi) si introduce il concetto di funzione analitica che, fatte alcune puntualizzazione, significa esattamente che siamo nel caso fortunato. Più precisamente la funzione f è analitica in I se
a) la sua **serie di Taylor** definita in (6.3) "converge" in ogni punto di I.
b) Per ogni $x \in I$, essa coincide con il valore della funzione di partenza.

La precedente illustrazione qualitativa mostra che non tutte le funzioni $C^\infty(I)$ sono analitiche in I. Una cosa che è bene ricordare.

I successivi sono esercizi di "fantasia". Molte nozioni sono puramente formali e non sono state definite ancora. Incoraggiamo lo svolgimento a chi si vuole divertire.

Ricordiamo che $i \times i = -1$ è la regola che bisogna usare.

Esercizio 6.2. (Esercizi di fantasia) Consideriamo $g : [-1,1] \to \mathbb{C}$, $h(x) = \arccos(x)$. $g(x) = -i\ln(x + i\sqrt{1-x^2})$.

Dimentichiamo i vari nonsense della precedente definizione e procediamo formalmente. Calcoliamo la derivata di g.

$$g'(x) = -i\frac{1 - i\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{x + i\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \left(-\frac{i}{\sqrt{1-x^2}}\right)\frac{-ix + \sqrt{1-x^2}}{i\left[-ix + \sqrt{1-x^2}\right]} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

D'altronde

$$h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Caspita! Allora (sempre procedendo formalmente) si ha

$$g'(x) - h'(x) = 0 \quad , x \in (-1,1)$$

e quindi

$$g(x) = h(x) + \text{costante}$$

Irresistibile curiosit: quanto vale la costante? Calcolando $g(1) - h(1)$ si ha

$$c = 0 - 0 = 0\,.$$

In definitiva per ogni $x \in (-1,1)$

$$-i\ln(x + i\sqrt{1-x^2}) = \arccos(x)$$

Adesso divertitevi a calcolare $g(0) - h(0)$. Si ottiene una formula curiosa.

Il precedente esercizio sembra folle ma invece è sensato e giusto. Naturalmente bisognerà smetterla di **proibire** ad esempio il calcolo di un logaritmo di un numero non reale. D'altronde chi conosce la formula di De Moivre è abituato a calcolare esponenziali complessi e allora non è molto lontano.

Un accenno su come si indovina la funzione g dell'esercizio precedente. La formula di De Moivre è la seguente

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta)\,.$$

Se si crede ad essa allora

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\mathrm{sen}(\theta)$$

e quindi

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \mathrm{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad ,$$

Bene ora risolvete per θ e il gioco è fatto. Per essere sicuri che abbiate capito il giusto algoritmo provate a cercare la funzione "g" analoga a quella dell'esercizio precedente quando $h = \mathrm{arcsen}(\theta)$.