CAPITOLO 2

Le equazioni differenziali

1. Un paio di esempi

A mo' di ripasso, un primo, facile esempio.

Esempio 1.1. Data una funzione $f(x)$, definita e continua su un intervallo $[a, b]$, determinare una funzione derivabile $y(x)$ la cui derivata sia $f(x)$. In simboli, trovare $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che

$$y'(x) = f(x)\,, \qquad \forall t \in [a, b]\,.$$

Chi ha un minimo di memoria dovrebbe essere in grado di rispondere alla domanda (che in realtà sono due: esiste una funzione y? E se esiste, come è fatta?) citando il "Teorema fondamentale del calcolo integrale": qualsiasi sia c in $[a, b]$, la funzione

$$y_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

è tale che $y'(x) = f(x)$ per ogni x. Pertanto, y esiste e – a patto di saper risolvere l'integrale (cosa che non è sempre possibile) – y ha anche un'espressione esplicita. Osserviamo che il Teorema fondamentale del calcolo ci fornisce non **una** funzione, bensì infinite. Se, oltre a chiedere $y'(x) = f(x)$, avessimo chiesto anche $y(a) = 0$ (ad esempio), allora l'**unica** soluzione del problema sarebbe stata

$$y(x) = y_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Lasciamo al lettore la dimostrazione dell'unicità (che segue ancora dal Teorema fondamentale del calcolo).

Non sempre le richieste sono così facili, però.

Esempio 1.2. In questo esempio vogliamo rispondere alla seguente domanda: con quale legge temporale si sono "diffusi" i telefoni cellulari in Italia? In altre parole: detta $y(x)$ la funzione che rappresenta la proporzione della popolazione italiana che possiede un telefono cellulare al tempo x, è possibile scrivere l'espressione esplicita di y? Ovviamente saranno necessarie alcune semplificazioni: dovremo cioè costruire un "modello matematico" che simuli la legge con la quale i telefoni cellulari si diffondono nella popolazione italiana; in altri termini, dare una descrizione matematica della competizione, e degli *status symbol*...

Per prima cosa, osserviamo che quello che ci interessa è capire come varia la proporzione, ovvero dare una legge che descriva la derivata $y'(x)$ della nostra funzione incognita $y(x)$. Iniziamo con l'osservare che, dovendo $y(x)$ rappresentare la proporzione degli italiani in possesso di un cellulare, dovrà essere $0 \leq y(x) \leq 1$ per ogni x. Successivamente – ed è qui che si "crea" il modello – supponiamo che la derivata di y sia proporzionale al prodotto $y(x)\,(1 - y(x))$. Perché? Perché la "variazione della proporzione della popolazione" è piccola in due casi: se poca gente possiede un telefono cellulare (il cui uso è ristretto ad una casta di privilegiati, che tendono a nascondere i loro gadget ipertecnologici), oppure se quasi tutti lo hanno già (ne rimangono privi soltanto abitanti di sperdute località alpine o appenniniche); analogamente, la variazione è massima quando più o meno metà della popolazione ha un cellulare ("Come, ancora non ce l'hai?", "Guarda, il mio fa anche le torte") ed il tam-tam (e l'invidia...) fanno sì che chi non lo abbia ancora si senta "obbligato" a comprarselo. Pertanto, stiamo supponendo che esista una costante k (che misura più o meno la "competizione") tale che

$$y'(x) = k\,y(x)\,(1 - y(x))\,.$$

Si osservi che, a causa della richiesta $0 \leq y(x) \leq 1$, si ha $y'(x) \geq 0$, ovvero la funzione y risulta essere crescente (il che è equivalente a chiedere che, una volta che si è acquistato un cellulare, non se ne faccia più a meno). Inoltre, la variazione è nulla sia se $y(x) = 0$ (se nessuno ha un cellulare, nessuno lo comprerà), sia se $y(x) = 1$ (se tutti hanno un cellulare, chi mai ne comprerà un secondo?[(1)]).

D'accordo: adesso abbiamo la "legge", ma la soluzione? È chiaro che il metodo dell'esempio precedente non funziona più: anche supponendo che la soluzione y sia continua (si noti che la vera legge y **non** è continua, dato che la variazione è discreta), si avrebbe, integrando,

$$y(x) = \int_0^x k\,y(t)\,(1 - y(t))\,dt\,,$$

ed è chiaro che, comparendo y sia a sinistra che a destra, l'integrale resta irresolubile[(2)]. D'altra parte, abbiamo due soluzioni evidenti: $y(x) \equiv 0$, e $y(x) \equiv 1$; ma le altre? Iniziamo con il supporre che mai, per nessun valore di x, si abbia $y(x) = 0$ o $y(x) = 1$ (studiamo, cioè, solo i casi interessanti, quando c'è "diffusione"). Sotto

---

[(1)] Come è chiaro a chiunque, qui il modello è carente...

[(2)] Lo studente attento – non impegnato cioè a spedire un SMS – avrà indubitabilmente osservato che l'eventuale soluzione y, qualora esistesse, sarebbe un punto fisso di "qualcosa"...

questa ipotesi, possiamo dividere per $y(x)\,(1-y(x))$, ed ottenere

$$\frac{y'(x)}{y(x)\,(1-y(x))} = k\,,$$

da cui, ricordando che $\frac{1}{s(1-s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}$ per ogni s,

$$\frac{y'(x)}{y(x)} + \frac{y'(x)}{1-y(x)} = k\,.$$

Essendo $0 \le y(x) \le 1$, si ha

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = [\ln(y(x))]'\,, \qquad \text{e} \qquad \frac{y'(x)}{1-y(x)} = -[\ln(1-y(x))]'\,,$$

da cui

$$\left[\ln\left(\frac{y(x)}{1-y(x)}\right)\right]' = [\ln(y(x))]' - [\ln(1-y(x))]' = \frac{y'(x)}{y(x)} + \frac{y'(x)}{1-y(x)} = k\,.$$

Dunque, il nostro apparentemente insolubile problema si è trasformato nell'analogo dell'esempio precedente: ci viene chiesto di trovare una funzione y tale che la derivata del logaritmo di $\frac{y(x)}{1-y(x)}$ sia uguale ad una costante k. Dal momento che la funzione $k\,x + c$ ha come derivata k (qualsiasi sia c), si ha

$$\ln\left(\frac{y(x)}{1-y(x)}\right) = k\,x + c\,,$$

da cui (ponendo $C = \mathrm{e}^c$)

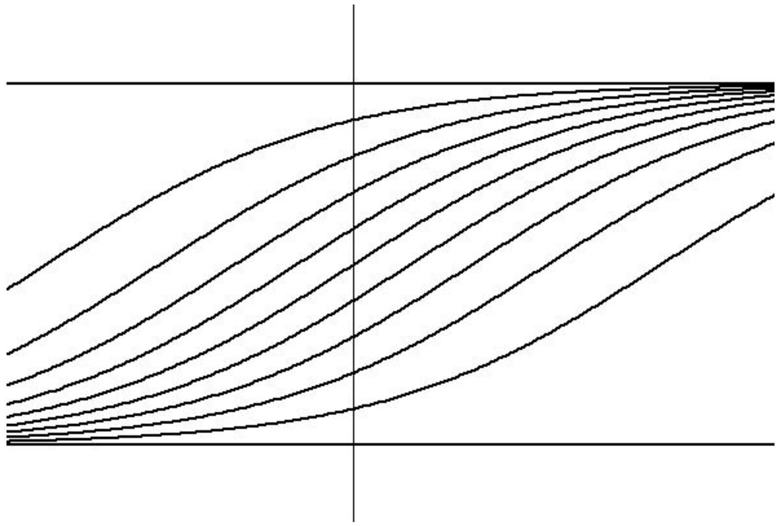
$$y_C(x) = \frac{C\,\mathrm{e}^{k\,x}}{1 + C\,\mathrm{e}^{k\,x}}\,,$$

con C costante arbitraria e positiva (essendo l'esponenziale di c). Dopo aver osservato che ancora una volta abbiamo infinite soluzioni possibili, dipendenti da un parametro C, ci chiediamo se la soluzione trovata sia "corretta", ovvero possa essere usata per rappresentare la proporzione di popolazione dotata di cellulare; ed in effetti, dato che (qualsiasi sia il valore di $C > 0$) $0 < y_C(x) < 1$ per ogni x, possiamo dichiararci soddisfatti. Resta da verificare che y sia crescente, ma questa è una conseguenza diretta dell'essere compresa tra 0 e 1 (perché?).

Infine, se vogliamo risolvere in maniera univoca il problema, dobbiamo anche assegnare una "condizione iniziale", vale a dire un valore y_0, che rappresenta la popolazione dotata di cellulare "agli esordi". Imponendo $y_C(0) = y_0$, si ricava il valore della costante C, e quindi la soluzione:

$$y(x) = \frac{y_0\,\mathrm{e}^{k\,x}}{(1-y_0) + y_0\,\mathrm{e}^{k\,x}}\,, \qquad 0 < y_0 < 1\,.$$

In figura, i grafici di $y(x)$ per $k = 1$ e alcuni valori di y_0.



Osserviamo di passaggio che, qualsiasi siano $y_0 > 0$ e $k > 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} y(x) = 1\,,$$

il che vuol dire che, a lungo andare, tutti avremo un cellulare...[3]

Esercizio 1.3. Scrivere l'espressione esplicita, e successivamente disegnare il grafico di $y(x)$, quando $y_0 < 0$, oppure $y_0 > 1$ (attenzione ai moduli!).

2. Definizione di equazione differenziale

Gli esempi appena presentati sono due "equazioni differenziali", ovvero due equazioni nelle quali non viene richiesto di determinare un numero (come nell'equazione $f(x) = 0$), bensì una **funzione**, soddisfacente una relazione che coinvolge, oltre alla funzione, anche una (o più) sue derivate.

Definizione 2.1. Sia n in $\mathbb{N}$. Un'equazione differenziale di ordine n è assegnata specificando una funzione $F : I \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$. Risolvere l'equazione differenziale vuol dire determinare un sottointervallo $J \subseteq I$ e una funzione $y : J \to \mathbb{R}$, derivabile n volte, e tale che

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \equiv 0\,, \qquad \forall x \in J\,.$$

Se la dipendenza dalla derivata di ordine massimo è esplicita, ovvero se esiste una funzioen $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che l'equazione si scriva

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))\,,$$

(3) Si noti che lo stesso modello matematico può essere usato per descrivere la diffusione di una malattia in una popolazione, in assenza di cure mediche: in questo caso sono assai meno gradevoli le considerazioni che derivano dall'essere 1 il limite della soluzione per x tendente all'infinito.

l'equazione differenziale si dice in forma **normale**.

Come abbiamo visto negli esempi, in generale un'equazione differenziale ha più di una soluzione: si arrivava a determinarne una assegnando il valore della soluzione in un punto. Nel caso di un'equazione di ordine n, i "gradi di libertà" sono esattamente n, e portano alla seguente definizione.

Definizione 2.2. Sia n un intero e si data

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))\,, \qquad x \in I\,,$$

un'equazione differenziale di ordine n in forma normale. Sia $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ un punto di $I \times \mathbb{R}^{n-1}$. Il **problema di Cauchy** relativo all'equazione differenziale data è il sistema

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))\,, & x \in I\,, \\ y(x_0) = y_0\,, \\ y'(x_0) = y_1\,, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\,. \end{cases}$$

La generalizzazione immediata della definizione di *una* equazione differenziale, è quella di **sistema** di m equazioni differenziali; con notazioni evidenti, si tratta di determinare m funzioni y_1, …, y_m (con la regolarità opportuna) tali che

$$\begin{cases} F_1(x, y_1(x)\,, \ldots\,, y_m(x), \ldots, y_1^{(n_1)}, \ldots, y_1^{(n_m)}) = 0\,, \\ F_2(x, y_1(x)\,, \ldots\,, y_m(x), \ldots, y_1^{(n_1)}, \ldots, y_1^{(n_m)}) = 0\,, \\ \ldots \\ F_m(x, y_1(x)\,, \ldots\,, y_m(x), \ldots, y_1^{(n_1)}, \ldots, y_1^{(n_m)}) = 0\,, \end{cases}$$

dove $(n_1, \ldots, n_m)$ è una m-upla di numeri interi e $(F_1, \ldots, F_m)$ sono m funzioni definite sul prodotto cartesiano di $I \times \mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_m}$. Risparmiamo al lettore la scrittura del problema di Cauchy corrispondente ad un sistema di m equazioni differenziali in forma normale (quante condizioni iniziali si devono assegnare?).

L'unico (per ora) motivo per giustificare l'introduzione dei sistemi di equazioni differenziali è il seguente: ogni equazione differenziale di ordine n in forma normale si può trasformare in un sistema di n equazioni del primo ordine. Se, infatti, abbiamo un'equazione della forma

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))\,,$$

possiamo definire $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y'(x)$ e così via fino a $y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$; l'equazione diventa allora il sistema

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x)\,, \\ y_2'(x) = y_3(x)\,, \\ \dots \\ y_n'(x) = f(x, y_1(x), \dots, y_n(x))\,. \end{cases}$$

Esercizio 2.3. Scrivere come sistema l'equazione

$$y^{(4)}(x) = \exp(\mathrm{sen}(y^{(3)}(x) + y''(x)\,\cos(y(x)))) - 1\,,$$

e successivamente trovare una soluzione dell'equazione.

3. Un teorema di esistenza e unicità

Negli esempi presentati nel primo paragrafo di questo capitolo siamo stati in grado di risolvere esplicitamente le equazioni differenziali: nel primo caso usando il Teorema fondamentale del calcolo, nel secondo abbiamo dovuto fare un po' di manipolazioni algebriche per arrivare alla soluzione. È chiaro che nel caso di un'equazione differenziale generale, come ad esempio

$$y'(x) = \exp(\mathrm{sen}(\mathrm{arc\,tg}(y(x) + x^2)))\,, \tag{3.1}$$

solo la fortuna può far sì che esista una soluzione esplicita (e anche in questo caso sarebbe necessaria una notevole abilità per trovarla). Possiamo però supplire alla mancanza di una soluzione esplicita con un risultato che ci garantisca l'esistenza e l'unicità della soluzione (lasciando così ad altri l'ingrato compito di trovarla).

Teorema 3.1 (Cauchy). *Sia $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ un rettangolo di $\mathbb{R}^2$, e sia $f : R \to \mathbb{R}$ soddisfacente le seguenti proprietà:*

(1) *f è continua su R;*
(2) *f è Lipschitziana nella seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima; ovvero, esiste una costante $L > 0$ tale che*

$$|f(x,y) - f(x,z)| \le L\,|y - z|\,, \qquad \forall (x,y)\,,\ (x,z) \in R\,.$$

Allora, detto

$$M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$$

(che esiste per (1) e per il Teorema di Weierstrass), esiste $\delta < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right)$, ed esiste un'unica funzione $y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to [y_0 - b, y_0 + b]$ di classe C^1 soluzione del

problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \,, \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \,, \\ \quad y(x_0) = y_0 \,. \end{cases} \tag{3.2}$$

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema viene svolta in due passi.

Passo 1. Trovare y di classe C^1 soluzione di (3.2) è equivalente a determinare una funzione **continua** y tale che

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \,, \qquad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \,. \tag{3.3}$$

Infatti, se y risolve (3.2), allora è soluzione di (3.3): è sufficiente applicare il Teorema fondamentale del calcolo integrale ai due membri dell'uguaglianza. Se, invece, y è una funzione continua che risolve (3.3), allora, per l'ipotesi (1) su f, $f(x, y(x))$ è una funzione continua. Sempre per il Teorema fondamentale del calcolo integrale segue allora che

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

è una funzione di classe C^1, la cui derivata è $f(x, y(x))$; d'altra parte, tale integrale è proprio $y(x)$, che risulta essere quindi di classe C^1 e soluzione di (3.2). Si noti che l'ipotesi (2) non è stata usata per determinare l'equivalenza tra i due problemi.

Passo 2. Esiste un'unica funzione continua che soddisfa (3.3). Sia $0 < \delta \leq a$ da fissarsi, e sia

$$X_\delta = \{y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R} \,,\ y \text{ continua} : \sup_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |y(x) - y_0| \leq b\} \,.$$

Iniziamo con l'osservare che (X_δ, d_∞) è uno spazio metrico completo. A tal fine sarà sufficiente dimostrare che X_δ è un sottospazio **chiuso** di $(C^0([x_0 - \delta, x_0 + \delta], \mathbb{R}), d_\infty)$, che è completo.

Sia allora $\{y_n\}$ contenuta in X_δ, convergente (nella distanza d_∞) a y. Dal momento che y_n converge uniformemente a y, e quindi puntualmente, dalla relazione (vera per ogni n)

$$y_0 - b \leq y_n(x) \leq y_0 + b \,, \qquad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \,,$$

segue

$$y_0 - b \leq y(x) \leq y_0 + b \,, \qquad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \,,$$

e quindi y appartiene a X_δ. Sia ora $T : X_\delta \to C^0([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$ definito da

$$T(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \,.$$

Che $T(y)(x)$ sia una funzione continua segue – ancora una volta – dal Teorema fondamentale del calcolo integrale. Dimostriamo ora che è possibile scegliere $0 < \delta \leq a$ in modo tale che T porti X_δ in se stesso. Deve pertanto essere

$$\sup_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]} |T(y)(x) - y_0| \leq b\,.$$

Ora

$$|T(y)(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|\,dt\right| \leq M\,|x - x_0| \leq M\,\delta\,.$$

Scegliendo pertanto $\delta \leq \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, si ottiene che T porta X_δ in sé. Per concludere la dimostrazione del teorema, resta allora da provare che è possibile scegliere $\delta \leq \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ tale che T sia una contrazione. A tal fine, siano y e z in X_δ; si ha

$$T(y)(x) - T(z)(x) = \int_{x_0}^{x} [f(t, y(t)) - f(t, z(t))]\,dt\,,$$

e quindi

$$|T(y)(x) - T(z)(x)| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, z(t))|\,dt\right|\,.$$

Ricordando la (2) (si noti che questa è l'unica volta in cui la si usa), si ha

$$|T(y)(x) - T(z)(x)| \leq L\,\left|\int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)|\,dt\right| \leq L \sup_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]} |y(t) - z(t)|\,\left|\int_{x_0}^{x} dt\right|\,.$$

Pertanto,

$$|T(y)(x) - T(z)(x)| \leq L\,|x - x_0|\,d_\infty(y, z) \leq L\,\delta\,d_\infty(y, z)\,.$$

Passando all'estremo superiore su x a sinistra, otteniamo

$$d_\infty(T(y), T(z)) \leq L\,\delta\,d_\infty(y, z)\,,$$

e quindi T risulta essere una contrazione scegliendo $\delta < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right)$. Per tali valori di δ, esiste un unico punto fisso di T – un'unica soluzione di (3.3) e quindi di (3.2).

$\blacksquare$

Osservazione 3.2. Lo stesso teorema (con la stessa dimostrazione), continua a valere per il problema di Cauchy relativo a sistemi di equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \ldots, y_m(x)) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), \ldots, y_m(x)) \\ \qquad\qquad \ldots \\ y_m'(x) = f_m(x, y_1(x), \ldots, y_m(x))\,, \end{cases}$$

nell'ipotesi che le funzioni $f_1, \ldots, f_m$ siano continue su un "rettangolo" di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, e lipschitziane nelle variabili $y_1, \ldots, y_m$, uniformemente rispetto ad x. Vale a dire, deve esistere $L \geq 0$ tale che

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_m) - f_i(x, z_1, \ldots, z_m)| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |y_k - z_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall i = 1, \ldots, m\,.$$

Dal momento che un'equazione di ordine n si può sempre trasformare in un sistema di n equazioni del primo ordine, è facile vedere che, data l'equazione

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))\,,$$

supponendo f continua su un "rettangolo" di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, e lipschitziana in $(y_1, \ldots, y_n)$, uniformemente rispetto ad x, si ha esistenza ed unicità della soluzione per il problema di Cauchy associato.

Osservazione 3.3. Si osservi che, essendo la funzione

$$f(x, y) = \exp(\mathrm{sen}(\mathrm{arc\,tg}(y + x^2)))$$

continua in (x, y) e Lipschitziana nella seconda variabile (uniformemente rispetto alla prima) su ogni rettangolo di $\mathbb{R}^2$ (perché?), l'equazione (3.1), una volta assegnata una condizione iniziale, ha una ed una sola soluzione.

Osserviamo esplicitamente che l'ipotesi di lipschitzianità per la funzione f è stata usata per scegliere δ in modo tale da poter applicare il teorema delle contrazioni, che fornisce sia l'esistenza che l'unicità della soluzione. Ai fini dell'esistenza, l'ipotesi di lipschitzianità della f non è necessaria, come stabilito dal seguente teorema.

Teorema 3.4 (Peano). *Sia $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ un rettangolo di $\mathbb{R}^2$, e sia $f : R \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, detto*

$$M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|,$$

esiste $\delta < \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, ed esiste una funzione $y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to [y_0 - b, y_0 + b]$ di classe C^1 soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x))\,, \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\,, \\ y(x_0) = y_0\,. \end{cases} \tag{3.4}$$

Il teorema precedente non fornisce l'unicità della soluzione, anche perché non potrebbe, come spiegato dal seguente esempio. . .

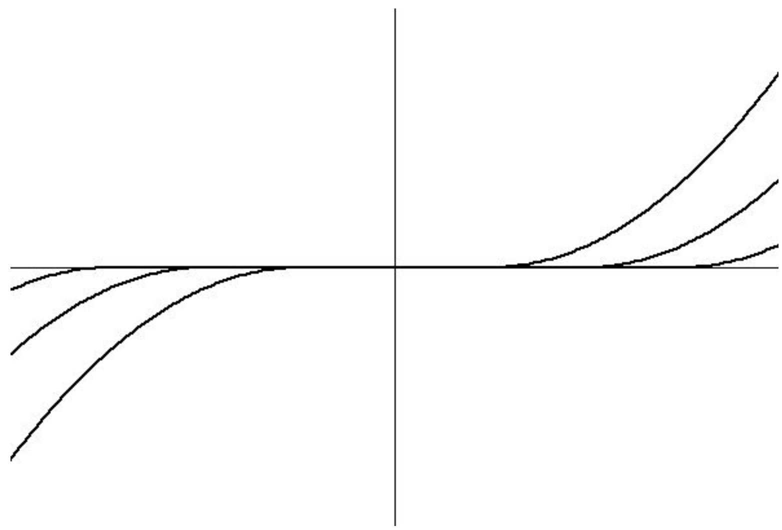
Esempio 3.5. Si consideri il problema di Cauchy

$$y'(x) = \sqrt{|y(x)|}\,, \qquad y(0) = 0\,. \tag{3.5}$$

Siano $a < 0 < b$ e sia

$$y_{a,b}(x) = \begin{cases} -\frac{(x-a)^2}{4} & \text{se } x \leq a, \\ 0 & \text{se } a < x < b, \\ \frac{(x-b)^2}{4} & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che, qualsiasi siano a e b, $y_{a,b}(x)$ è una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$ che risolve il problema di Cauchy. Pertanto, (3.5) ha infinite soluzioni. Si noti che la funzione $f(x,y) = \sqrt{|y|}$ non è lipschitziana rispetto a y in $y = 0$ (ovvero, nel valore iniziale del problema di Cauchy). In figura, alcune soluzioni, per differenti valori di a e b.



Esercizio 3.6. Trovare una soluzione di (3.5) che non sia della forma $y_{a,b}$ per qualche a, b.

Esercizio 3.7. Il teorema di esistenza e unicità appena dimostrato sfrutta il teorema delle contrazioni per costruire una soluzione del problema di Cauchy come punto fisso dell'operatore T. Consideriamo ora il problema di Cauchy

$$y'(x) = y(x)\,, \qquad y(0) = 1\,,$$

cha ha un'unica soluzione essendo $f(x,y) = y$ continua e lipschitziana. L'operatore T associato è

$$T(y)(x) = 1 + \int_0^x y(t)\,dt\,.$$

Ricordando la dimostrazione del teorema delle contrazioni, costruire la soluzione.

Risposta 3.7: Dal momento che il punto fisso è unico, possiamo far partire l'iterazione da una qualsiasi funzione. Ad esempio, prendiamo $y_0(x) \equiv 1$ e definiamo $y_1(x) = T(y_0)(x)$. Si ha

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x\,,$$

da cui

$$y_2(x) = T(y_1)(x) = 1 + \int_0^x y_1(t)\,dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}\,.$$

Proseguendo, si trova

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!}\,,$$

come si può facilmente verificare per induzione. Pertanto, ricordando lo sviluppo di Taylor di e^x, e facendo tendere n ad infinito, la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = e^x$ (che sia la soluzione lo si può verificare sostituendo). Verificare che la stessa soluzione si ottiene partendo da $y_0(x) = x$, da $y_0(x) = \frac{e^x}{2}$ e da $y_0(x) = \operatorname{sen}(x)$.

4. Equazioni differenziali lineari

Una volta dimostrato il teorema di esistenza e unicità di soluzioni per equazioni differenziali, affrontiamo lo studio di alcuni casi particolari per i quali è possibile dare una soluzione esplicita.

4.1. Equazioni a variabili separabili. Un primo caso abbastanza facile da risolvere riguarda le cosiddette equazioni *a variabili separabili*:

$$y'(x) = f(x)\,g(y(x))\,, \tag{4.1}$$

con g ed f funzioni continue. Come detto nel paragrafo precedente, la continuità di g e f implica l'esistenza di almeno una soluzione per il problema di Cauchy corrispondente. Se poi g è anche lipschitziana, la limitatezza di f implica l'esistenza di una sola soluzione. Osserviamo innanzitutto che un'equazione a variabili separabili ha delle soluzioni banali: se c è un numero reale tale che $g(c) = 0$, allora $y(x) \equiv c$ è soluzione dell'equazione. Se supponiamo che il problema di Cauchy associato all'equazione (4.1) abbia una ed una sola soluzione, allora sono possibili due casi: o il dato iniziale è uno zero di g (nel qual caso la soluzione è costante), oppure no, e in questo caso la soluzione non assumerà mai un valore che sia uno zero di g. In altre parole, se $g(y_0) \neq 0$, allora $g(y(x)) \neq 0$ per ogni x. Questo fatto ci permette di dare un metodo per la determinazione di una soluzione di (4.1). Se, infatti, $g(y(x)) \neq 0$ per ogni x, possiamo dividere per $g(y(x))$, ed ottenere l'equazione

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)\,.$$

Dette
$$G(x) = \int^x \frac{dt}{g(t)}\,, \qquad F(x) = \int^x f(t)\,dt\,,$$
integrando la relazione precedente si ottiene
$$G(y(x)) = F(x) + c\,,$$
con c costante arbitraria. Se G ha un'inversa esplicita, si possono scrivere le soluzioni di (4.1) nella forma
$$y'(x) = G^{-1}(F(x) + c)\,.$$
Assegnando l'eventuale condizione iniziale, si determina la costante c.

Esempio 4.1. Il problema di Cauchy
$$y'(x) = y(x)\,, \qquad y(0) = 1\,,$$
è a variabili separabili, con $f(x) \equiv 1$ e $g(y) = y$. Dividendo per $y(x)$ si ha
$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 1\,,$$
e, integrando,
$$\ln(|y(x)|) = x + c\,.$$
Assegnando la condizione iniziale si ottiene $c = 0$, e quindi $|y(x)| = \mathrm{e}^x$, da cui $y(x) = \mathrm{e}^x$ (la soluzione $y(x) = -\mathrm{e}^x$ va scartata perché non soddisfa la condizione iniziale).

Esercizio 4.2. Risolvere le seguenti equazioni a variabili separabili:
$$y'(x) = y^2(x)\,, \quad y'(x) = x\,\mathrm{e}^{y(x)}\,, \quad y'(x) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen}(y(x))\,, \quad y'(x) = \frac{x-1}{y(x)-1}\,.$$

4.2. Equazioni lineari non omogenee. Supponiamo ora che l'equazione sia della forma
$$y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)\,, \tag{4.2}$$
che non è a variabili separabili. Se a e b sono funzioni continue, la funzione $f(x, y) = a(x)\,y + b(x)$ è continua su $\mathbb{R}^2$, e lispschitziana in y uniformemente rispetto a x sui compatti di $\mathbb{R}^2$; pertanto, per il Teorema 3.1, il problema di Cauchy associato all'equazione ha una ed una sola soluzione qualsiasi sia il dato iniziale.

Per risolvere esplicitamente l'equazione, si considera inizialmente il cosiddetto *problema omogeneo*:
$$y'(x) = a(x)\,y(x)\,,$$

che, essendo a variabili separabili, ha come soluzione $y(x) = c\,\mathrm{e}^{A(x)}$, con c costante arbitraria e A una primitiva di a. Successivamente, si cerca una soluzione di (4.2) della forma

$$y(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}\,,$$

con C da determinare. Sostituendo, si trova

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} + C(x)\,a(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x) = C(x)\,a(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} + b(x)\,.$$

Semplificando, e moltiplicando per $\mathrm{e}^{-A(x)}$, si arriva a

$$C'(x) = b(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)}\,.$$

Quest'ultima equazione può essere integrata direttamente, ottenendo

$$C(x) = \int^x b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}\,dt + c\,,$$

con c costante arbitraria. Si ha pertanto una formula risolutiva per l'equazione (4.2): tutte le soluzioni sono della forma

$$y(x) = \left(c + \int^x b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}\,dt\right)\,\mathrm{e}^{A(x)}\,,$$

con c costante arbitraria e A una primitiva di a.

Esercizio 4.3. Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

$$(x\,\ln(x))\,y'(x) + y(x) = x\,(\ln(x) + 1)\,,$$

$$y'(x) = \cos(x)\,y(x) + x^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{sen}(x)}\,,$$

$$y'(x) = \mathrm{e}^x\,y(x) + \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\,cos(x)\,.$$

4.3. Equazioni lineari del secondo ordine. Consideriamo ora un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y''(x) + a\,y'(x) + b\,y(x) = 0\,, \qquad a, b \in \mathbb{R}\,. \tag{4.3}$$

Iniziamo con l'osservare che tale equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x)\,, \\ y_2'(x) = -a\,y_2(x) - b\,y_1(x)\,. \end{cases}$$

Dal momento che le funzioni $f_1(x, y_1, y_2) = y_2$ e $f_2(x, y_1, y_2) = -a\,y_2 - b\,y_1$ sono continue su $\mathbb{R}^3$ e lipschitziane rispetto alle variabili (y_1, y_2), il problema di Cauchy per l'equazione (4.3) ha una ed una sola soluzione (si veda l'Osservazione 3.2).

Essendo l'equazione del secondo ordine, ci aspettiamo che la soluzione generale dipenda da **due** costanti arbitrarie; essendo l'equazione lineare, se y_1 e y_2 sono due soluzioni, allora ogni loro combinazione lineare è ancora soluzione. Ci aspettiamo pertanto di trovare due soluzioni "indipendenti" del problema, che generino tutte le altre tramite combinazioni lineari.

Per trovare queste due soluzioni, supponiamo di sapere che ogni soluzione del problema sia una funzione analitica; ovvero, che esista una successione di coefficienti $\{c_k\}$ tale che

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_k}{k!} x^k .$$

Dal momento che la serie è una serie di potenze, convergerà uniformemente con tutte le sue derivate. È pertanto lecito derivare due volte, e ottenere

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{k!} k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_{k+1}}{k!} x^k ,$$

e quindi

$$y''(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_{k+1}}{k!} k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_{k+2}}{k!} x^k .$$

Sostituendo nell'equazione, si trova

$$y''(x) + a\, y'(x) + b\, y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_{k+2} + a\, c_{k+1} + b\, c_k}{k!} x^k \equiv 0 ,$$

e quindi la successione c_k deve essere tale che

$$c_{k+2} + a\, c_{k+1} + b\, c_k = 0 , \qquad \forall k \geq 0 .$$

È chiaro che la successione c_k è interamente determinata dai valori c_0 e c_1; non a caso, da due numeri reali arbitrari. Inoltre, il provvidenziale intervento del *deus ex machina* ci fornisce un'idea per capire come sia fatta la successione c_k; supponiamo infatti che c_k sia della forma $c_k = \alpha\, \lambda^k$. Sostituendo, si trova

$$c_{k+2} + a\, c_{k+1} + b\, c_k = \alpha\, \lambda^k \left(\lambda^2 + a\, \lambda + b\right) = 0 ,$$

e quindi λ deve essere una radice dell'equazione di secondo grado $\lambda^2 + a\, \lambda + b = 0$. In tal caso, si ha

$$y(x) = \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} x^k = \alpha\, e^{\lambda\, x} .$$

Ricapitolando: abbiamo supposto che ogni soluzione fosse una funzione analitica; sviluppandola in serie di potenze, ed usando l'equazione, abbiamo trovato che la soluzione deve essere della forma $y(x) = e^{\lambda\, x}$, dove λ è una delle due radici dell'equazione $\lambda^2 + a\, \lambda + b = 0$. Ovviamente, si poteva ottenere lo stesso risultato invocando con leggero anticipo il *deus ex machina*, scegliendo direttamente $y(x)$ della forma $e^{\lambda x}$, e sostituendo...

Apparentemente il problema è risolto: data un'equazione come la (4.3), si scrive il polinomio di secondo grado corrispondente, si calcolano le due radici, si prendono come soluzioni $e^{\lambda_1 x}$ ed $e^{\lambda_2 x}$, se ne fa una combinazione lineare, e - se si ha un problema di Cauchy - si assegnano le condizioni iniziali per determinare l'unica soluzione. Il ragionamento è corretto (e fornisce il metodo per trovare tutte le soluzioni) nel caso in cui le due radici dell'equazione $\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0$ siano reali e distinte. Ma che succede se coincidono? O se sono complesse coniugate? In un caso abbiamo una sola soluzione, nel secondo siamo usciti dall'insieme delle funzioni reali di variabile reale.

Affrontiamo il caso in cui le due radici siano reali e coincidenti. Sia ha allora che $\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0$ e $2\lambda + a = 0$ (verificare per credere!). Pertanto, oltre a $c_k = \lambda^k$, è possibile scegliere $c_k = k\,\lambda^k$ (anche in questo caso, è sufficiente sostituire), cosicché una seconda soluzione è data da

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k\,\lambda^k}{k!}\,x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\,x^k = \lambda\,x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\,x^k = \lambda\,x\,y_1(x)\,.$$

In altre parole, se $\lambda_1 = \lambda_2$, le due soluzioni sono $e^{\lambda_1 x}$ e $x\,e^{\lambda_1 x}$.

Se le due radici sono complesse coniugate, e quindi $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\,\beta$, si hanno come soluzioni $y_{1,2}(x) = e^{\lambda_{1,2}x}$. Ricordando la definizione di esponenziale complesso, sono pertanto soluzioni

$$y_{1,2}(x) = e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) \pm i\,\mathrm{sen}(\beta x)\right)\,.$$

Osserviamo ora che non solo una combinazione lineare a coefficienti reali di y_1 e y_2 è ancora soluzione dell'equazione, **ma anche** una combinazione lineare a coefficienti complessi; ad esempio, sono ancora soluzioni

$$\frac{y_1(x) + y_2(x)}{2} = e^{\alpha x}\,\cos(\beta x)\,, \qquad \frac{y_1(x) - y_2(x)}{2i} = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)\,.$$

Pertanto, nel caso in cui le radici siano complesse coniugate, ovvero $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\,\beta$, le due soluzioni sono $e^{\alpha x}\,\cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$.

Ricapitolando: per risolvere l'equazione (4.3) si devono trovare le radici del polinomio ottenuto sostituendo alla derivata k-sima di y la potenza k-sima di λ, e poi scegliere le due soluzioni a seconda del tipo di radici ottenute:

$$\begin{cases} \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} & y_1(x) = e^{\lambda_1 x}\,,\ y_2(x) = e^{\lambda_2 x}\,, \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} & y_1(x) = e^{\lambda x}\,,\ y_2(x) = x\,e^{\lambda x}\,, \\ \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\,\beta \in \mathbb{C} & y_1(x) = e^{\alpha x}\,\cos(\beta x)\,,\ y_2(x) = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)\,. \end{cases}$$

La soluzione generale sarà allora della forma $y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$, con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. Se invece di un'equazione abbiamo un problema di Cauchy, sarà possibile determinare le costanti assegnando le condizioni iniziali.

Esempio 4.4. Risolviamo il problema di Cauchy

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0\,, \qquad y(0) = 0\,, \qquad y'(0) = 1\,.$$

Il polinomio è $\lambda^2 - 4\lambda + 3$, che ha come radici $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$. Pertanto, la soluzione generale dell'equazione è:

$$y(x) = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\,\mathrm{e}^{3x}\,.$$

Assegnando le condizioni iniziali, si ha $c_1 + c_2 = 0$ e $c_1 + 3c_2 = 1$, da cui $c_1 = -\frac{1}{2}$ e $c_2 = \frac{1}{2}$. L'unica soluzione è allora

$$y(x) = \frac{\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^x}{2}\,.$$

Se, invece, abbiamo il problema

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0\,, \qquad y(0) = 0\,, \qquad y'(0) = 0\,,$$

le due radici sono reali e coincidenti: $\lambda = 1$. La soluzione generale è dunque della forma

$$y(x) = (c_1 + c_2\,x)\,\mathrm{e}^x\,.$$

Assegnando le condizioni iniziali, si trova $c_1 = 0$ e $c_1 + c_2 = 0$, da cui $c_1 = c_2 = 0$; pertanto, $y(x) \equiv 0$ è l'unica soluzione del problema (come era logico...).

Infine, supponiamo di avere il problema

$$y''(x) + y(x) = 0\,, \qquad y(0) = 0\,, \qquad y'(0) = 3\,.$$

Le radici del polinomio associato sono $\lambda = \pm i$, e quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = c_1\,\cos(x) + c_2\,\mathrm{sen}(x)\,.$$

Assegnando le condizioni iniziali, si trova $c_1 = 0$ e $c_2 = 3$, cosicché la soluzione è $y(x) = 3\mathrm{sen}(x)$.

Esercizio 4.5. Risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y'(x) = v(x) - y(x) \\ v'(x) = 4y(x) - v(x) \\ y(0) = 0\,, \quad v(0) = 1\,. \end{cases}$$