CAPITOLO 3

CALCOLO DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI

Un esercizio preliminare per familiarizzarsi con insiemi definiti da disuguaglianze. *Disegnare* i seguenti insiemi di $\mathbf{R}^2$:

$$\{(x,y) : |x| + y^2 \geq 1\}; \quad \{(x,y) : |y| < \log(1+|x|)\}; \quad \{(x,y) : y^2 - x^2 \geq 4\};$$

$$\{(x,y) : |y| + |x| \leq 2\}; \quad \{(x,y) : x^4 + y^4 \leq 2\}; \quad \{(x,y) : |x-1| + |x| + |y+1| \leq 1\};$$

$$\{(x,y) : |y - x^2| \geq 1\}; \quad \{(x,y) : |y+x| - |x^2 - y^2| \leq 2\}; \quad \{(x,y) : \sin x \geq \cos y\};$$

$$\{(x,y) : |y + \sin x| \leq 5\}.$$

3-1 LIMITI E CONTINUITÀ

Richiamiamo alcuni concetti già noti.

$\mathbf{R}^n$ è l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali $x = (x_1, \ldots, x_n)$; i suoi elementi si dicono punti o vettori. È uno spazio vettoriale (di dimensione n) con le operazioni naturali di somma componente per componente, e prodotto per uno scalare (cioè un numero reale) componente per componente. La *base canonica* di $\mathbf{R}^n$ è la base formata dai vettori $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. $\mathbf{R}^n$ è uno spazio di Banach con la norma euclidea $|\cdot|$ (corrispondente alla metrica euclidea $d(x,y) = |x-y|$). Un intorno (sferico) di un punto è una sfera centrata in quel punto. Il prodotto scalare tra due vettori x, y è dato da $(x,y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. Valgono le formule $(x,x) = |x|^2 \geq 0$; $|(x,y)| \leq |x| \cdot |y|$ (disuguaglianza di Schwartz).

Una successione in $\mathbf{R}^n$ è un'applicazione da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{R}^n$; normalmente una successione si indica con x_k, ma le successioni di $\mathbf{R}^n$ presentano il problema dei doppi indici. Quando c'è rischio di confusione, useremo la notazione $\{x^{(k)}\}_{k\geq 1}$. Fare attenzione: $x^{(k)}$ è un elemento della successione, che scritto per esteso diventa $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$. $x_j^{(k)}$, $j = 1, \ldots, n$ si dicono le *componenti* della successione, e sono a loro volta n successioni di numeri reali.

La successione $x^{(k)}$ converge a x (si scrive: $x^{(k)} \to x$) se $\forall \epsilon\ \exists k_\epsilon$ tale che $|x^{(k)} - x| < \epsilon$ per $k \geq k_\epsilon$. Una successione converge se e solo se convergono le sue componenti. Una (sotto)successione estratta da $x^{(k)}$ è una successione $x^{(\phi(k))}$, dove $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ è una funzione strettamente crescente.

Un aperto di $\mathbf{R}^n$ è un insieme tale che se $x \in A$ allora esiste una sfera centrata in x contenuta in A; un chiuso è il complementare di un aperto, ossia un insieme C tale che se una successione di punti di C converge, allora il limite appartiene a C. Un insieme è limitato se è contenuto in una sfera. Un compatto è un insieme chiuso e limitato. Un punto x è aderente ad un insieme A se esiste una successione di punti di A convergente ad x; è un punto di accumulazione di A se esiste una successione di punti di A, *distinti da* x, convergente ad x.

Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $x^{(0)} \in \mathbf{R}^n$ un punto di accumulazione per A. Data $f : A \to \mathbf{R}$, si dice che $f \to L$ (f tende a L, o ha limite L) per $x \to x^{(0)}$ (per x che tende a $x^{(0)}$) se $\forall \epsilon\ \exists \delta$ tale che $0 < |x - x^{(0)}| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \epsilon$. Notare che il valore di f in $x^{(0)}$ non interviene in questa definizione. Sia ora $x_0 \in A$ un punto di accumulazione per A. f è continua in x_0 se il limite di f per $x \to x_0$ esiste ed è uguale a $f(x_0)$. Una funzione continua su un compatto di $\mathbf{R}^n$ a valori in $\mathbf{R}$ ammette massimo e minimo.

Una funzione su $\mathbf{R}^n$ è spesso data come una espressione, composizione di funzioni elementari note delle variabili $x_1, \ldots, x_n$. Può accadere che tale espressione non sia definita per tutti gli $x = (x_1, \ldots, x_n)$. L'*insieme di definizione* di una funzione definita esplicitamente è l'insieme dei punti $x \in \mathbf{R}^n$ per i quali tutte le funzioni utilizzate nella definizione sono definite e si possono comporre come indicato. Invece l'*insieme di continuità* di una funzione $f : A \to \mathbf{R}$ è l'insieme dei punti di A nei quali f è continua.

Notiamo infine che spesso le due variabili di $\mathbf{R}^2$ si indicano con (x, y) anziché con (x_1, x_2), e le tre variabili di $\mathbf{R}^3$ con (x, y, z).

Diamo qui alcune funzioni su $\mathbf{R}^2$ che saranno utilizzate nel resto del capitolo come base per vari esercizi.

$$F_1(x,y) = x^2 \log(x + y^2), \quad F_2 = x \log(x/y), \quad F_3 = \log(x/y) + \log(y/x),$$

$$F_4 = \sin(x/y) + \cos(y/x), \quad F_5 = \cos(xe^y) + x^5 y^4, \quad F_6 = \arctan(x/y)$$

$$F_7(x,y) = \log[\log x], \quad F_8 = \exp[x - \log^2 y], \quad F_9 = 1/\sin(x + y),$$

$$F_{10} = \sqrt{xy^2}, \quad F_{11} = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, \quad F_{12} = \sqrt{x^2 - y^2},$$

$$F_{13} = \sqrt{x \sin y}, \quad F_{14} = \sqrt{x\sqrt{y}}, \quad F_{15} = \tan(x^2 - y),$$

$$F_{16} = |x + y|, \quad F_{17} = |x + y| + |x + 2y + 1|, \quad F_{18} = \sqrt{|x - y^2| + 1};$$

$$f_0(x,y) = ax + by; \qquad f_1(x,y) = x^2 + xy + y^2; \qquad f_2(x,y) = x^n y^m, \quad n, m \in \mathbf{N}$$

$$f_3(x,y) = P(x,y) \quad \text{(polinomio in due variabili)}$$

$$f_4(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \text{ oppure } y = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_5(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

$$f_6(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

$$f_7(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

$$f_8(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^7-y^7+x^6 y}{x^6+y^6} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

$$f_9(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^4+2y^4)}{x^2+3y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

$$f_{10}(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

$$f_{11}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-y)}{x-y} & \text{se } x \neq y \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_{12}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+2y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

$$f_{13}(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2-1)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2-1} & \text{se } x^2+y^2 \neq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_{14}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2 \cdot \sin y^2}{2x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

$$f_{15}(x,y) = \log\frac{1+x}{1+y}$$

$$f_{16}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{|x|+|y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

$$f_{17}(x,y) = \begin{cases} xy\log(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

$$f_{18}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{2x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

$$f_{19}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sin^2 x+\sin^2 y} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

$$f_{20}(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{\log(x^2+1)+\log(y^2+1)}{\log^2(x^2+y^2)} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

$$f_{21}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2)\cdot\sin(y^2)}{2x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{in } (0,0)\end{cases}$$

$$f_{22}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3\log|y|+y^3\log|x|}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{in } (0,0)\end{cases}$$

$$f_{23}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(e^{(x^2)}-1)(e^{(y^2)}-1)}{|x|+|y|} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{in } (0,0)\end{cases}$$

$$f_{24}(x,y)=\begin{cases}(1-(x+y)^2)\cos\dfrac{1}{(x+y)^2-1} & \text{se } x+y\neq\pm1\\ 0 & \text{sulle rette } x+y=\pm1\end{cases}$$

$$f_{25}(x,y)=\begin{cases}(x^3-2y^3)\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{in } (0,0)\end{cases}$$

$$f_{26}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+2y^2}+\dfrac{\cos(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{in } (0,0)\end{cases}$$

$$f_{27}(x,y)=\begin{cases}[(x-1)^2+(y-1)^2]\cos\dfrac{1}{(x-1)^2+(y-1)^2} & \text{se } (x,y)\neq(1,1)\\ 0 & \text{in } (1,1)\end{cases}$$

$$f_{28}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\cos(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{in } (0,0)\end{cases}$$

$$f_{29}(x,y)=|x+y-1|+|x-1|+|xy|$$

$$f_{30}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x\cdot\sin y}{|\sin x|+|\sin y|} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{in } (0,0)\end{cases}$$

$$f_{31}(x,y)=\begin{cases}x & \text{se } \sqrt{x^2+y^2}\in\mathbf{N}\\ y & \text{se } \sqrt{x^2+y^2}\notin\mathbf{N}\end{cases}$$

$$f_{32}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^{|x|}-1}{x^2+y^2} & \text{se } x\neq0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

$$f_{33}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^3+2y^3}-\cos(x^3+2y^3)}{2x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{in } (0,0)\end{cases}$$

$$f_{34}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^8+y^4-xy^3+4x^5y-7x^3}{x^4+5y^4+x^2+2y^6} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{in } (0,0)\end{cases}$$

$$f_{35}(x,y)=\begin{cases}x\log\dfrac{x^2+2y^2}{2x^4+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{in } (0,0).\end{cases}$$

1. Osservazione Per lo studio di queste funzioni sarà utile ricordare le seguenti disuguaglianze: usando la notazione $r = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$|x^n y^m| \leq r^{n+m}; \qquad |x|^m + |y|^m \geq cr^m$$

per una opportuna costante $c > 0$.

ESERCIZI

1 Una successione converge se e solo se tutte le sue sottosuccessioni convergono allo stesso limite.

2 $x^{(k)} \to x$ se e solo se $|x^{(k)} - x| \to 0$, e se e solo se per ogni sfera di centro x la successione è contenuta definitivamente (cioè a partire da un certo indice in poi) in essa.

2 Diciamo che la successione $x^{(k)}$ è l'*unione* delle successioni $x^{(\phi(k))}$ e $x^{(\psi(k))}$ se l'unione delle immagini di ϕ, ψ è tutto $\mathbf{N}$. Mostrare che $x^{(k)}$ converge ad $x^{(0)}$ se e solo se $x^{(\phi(k))}$ e $x^{(\psi(k))}$ convergono entrambe a $x^{(0)}$.

3 Determinare gli insiemi di definizione delle funzioni F_1-F_{18}.

4 Determinare gli insiemi di definizione delle funzioni f_0-f_{35}.

5 Determinare se le funzioni f_0-f_{35} sono continue in $(0, 0)$.

6 Determinare gli insiemi di continuità delle funzioni f_0-f_{35}.

7 Dimostrare le disuguaglianze dell'Osservazione 1 [La prima è banale. La seconda: sia $\alpha \geq 0$; allora per ogni coppia di interi $n \geq k$ vale $1 + \alpha^n \geq \alpha^k$, infatti se $0 \leq \alpha \leq 1$ si ha sempre $1 \geq \alpha^k$, e se invece $\alpha \geq 1$ si ha $\alpha^n \geq \alpha^k$. Da questo segue che, per ogni $x, y \in \mathbf{R}$, $|x|^n + |y|^n \geq |x|^k |y|^{n-k}$ (se $y \neq 0$ prendere $\alpha = |x|/|y|$, altrimenti è ovvia). Infine

$$(|x| + |y|)^n = \sum \binom{n}{k} |x|^k |y|^{n-k} \leq C(|x|^n + |y|^n)$$

da cui segue subito la tesi].

8 Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $x \in A$. Allora f è continua in x se e solo se per ogni successione $x^{(k)}$ di punti di A si ha $\lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = f(x)$.

9 Una successione converge a x se e solo se da ogni sua sottosuccessione si può estrarre una sottosuccessione convergente a x.

3-2 DERIVAZIONE

1. Definizione Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto, $x^0 \in A$. f si dice *derivabile* rispetto a x_j $(j = 1, \ldots, n)$ in x^0 se esiste finito il limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + te_j) - f(x^0)}{t}.$$

Tale limite si indica con $D_j f(x^0)$ o $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)$ e si dice *derivata parziale* di f rispetto a x_j in x^0. La funzione si dice *derivabile* in x^0 se è derivabile rispetto a $x_1, \ldots, x_n$; allora il vettore

$$Df(x^0) = (D_1 f(x^0), \ldots, D_n f(x^0)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right)$$

si chiama *gradiente* di f in x^0. Una funzione derivabile in tutti i punti di un insieme A si dice *derivabile* in A; l'*insieme di derivabilità* di una funzione è l'insieme di tutti i punti in cui essa è derivabile.

Più in generale, se v è un vettore di modulo 1, f si dice *derivabile nella direzione* v in x^0 se esiste finito il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x^0+tv)-f(x^0)}{t}.$$

Tale limite si indica con $D_v f(x^0)$ o $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$ e si dice *derivata direzionale* di f nella direzione v in x^0.

2. Osservazione È chiaro che le derivate parziali sono un caso particolare delle derivate direzionali. Il loro calcolo è molto semplice: infatti la definizione si può scrivere anche così

$$D_j f(x^0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(x_1^0,\dots,x_{j-1}^0,x_j^0+t,x_{j+1}^0,\dots,x_n^0)-f(x^0)];$$

da qui si vede che derivare f rispetto a x_j vuol dire tenere ferme tutte le variabili tranne x_j, cioè considerarle come costanti, e derivare f come se fosse funzione della sola variabile x_j. Non è necessario fare molti esercizi per imparare a derivare in più variabili, se si sa derivare in una variabile (quindi, fatene moltissimi).

3. Osservazione Diversamente da quanto accade per le funzioni di una sola variabile, una funzione di più variabili può essere derivabile in un punto ma non continua. Ad esempio la funzione f_4 è derivabile in $(0,0)$, perché costante lungo gli assi; ma chiaramente non è continua perché ad esempio $f_4(x,x)=0$ per $x\neq 0$.

La situazione non migliora se si suppone che una funzione abbia tutte le derivate direzionali in un punto: potrebbe ancora essere discontinua in quel punto. Ad esempio

$$f_{36}(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\right)^2 & \text{se } (x,y)\neq 0 \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

non è continua in 0 perché la successione $(1/n,1/n^2)$ tende a 0 mentre

$$\lim_{n\to+\infty} f_{36}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^{-4}}{n^{-4}+n^{-4}}\right)^2 = \frac{1}{4} \neq f(0,0);$$

ma f_{36} è derivabile in tutte le direzioni in 0, infatti

$$D_v f_{36}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{tv_1^4v_2^2}{(t^2v_1^4+v_2^2)^2} = 0.$$

Un altro esempio, dovuto a Peano, è la funzione $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ che vale 1 se $x^2<y<2x^2$ e 0 altrimenti. Se si esamina il valore di f su una retta passante per l'origine, si vede che f è identicamente nulla per punti abbastanza vicini all'origine, quindi nell'origine tutte le derivate direzionali esistono e sono nulle. D'altra parte è chiaro che la funzione non è continua in $(0,0)$.

4. Osservazione Se una funzione è assegnata come composizione di funzioni elementari la sua derivabilità nella maggior parte dei punti segue semplicemente dal fatto che è composizione di funzioni derivabili; non c'è quindi alcuna verifica da fare. Ad esempio $f = x^2 - yx^5$ è derivabile su tutto $\mathbf{R}^2$ perché composizione di funzioni derivabili (notare che qui si stanno usando teoremi per funzioni di *una sola* variabile, in quanto si suppone ad es. che x sia costante e si vuole derivare rispetto a y, o viceversa). Una funzione come $g = |x + y|$ è più delicata: la funzione $|\cdot|$ che compare nella definizione di g *non è derivabile* in 0, quindi i punti $x + y = 0$ vanno studiati a parte. In tali casi per vedere se g è derivabile bisogna ritornare alla definizione, e fare il limite del rapporto incrementale. Ad esempio qui i punti da esaminare sono quelli della retta $x = -y$, cioè i punti del tipo $(\alpha, -\alpha)$:

$$\frac{1}{t}[f(\alpha + t, -\alpha) - f(\alpha, -\alpha)] = \frac{1}{t}[|t| - 0] = \frac{|t|}{t};$$

da qui si vede che il limite del rapporto incrementale rispetto a x non esiste, quindi g non è derivabile rispetto a x in $(\alpha, -\alpha)$ (e quindi non è derivabile in $(\alpha, -\alpha)$).

ESERCIZI

1 Determinare gli insiemi di derivabilità di F_1-F_{18}.

2 Calcolare le derivate parziali D_1F, D_2F in un generico punto (x, y) dell'insieme di derivabilità per le funzioni F_1-F_{18}.

3 Determinare gli insiemi di derivabilità di f_1-f_{36}.

4 Calcolare le derivate parziali D_1F, D_2F in un generico punto (x, y) dell'insieme di derivabilità per le funzioni f_1-f_{36}.

---

01 Siano $f, g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Se f e g hanno derivate direzionali in 0 nella direzione v, allora anche $f \cdot g$, $f + g$ hanno derivata direzionale in 0 nella direzione v, e si ha $D_v(fg) = f(0) \cdot D_v g(0) + g(0) \cdot D_v f(0)$, $D_v(f + g) = D_v f(0) + D_v g(0)$.

3-3 DIFFERENZIALE

Come visto nell'osservazione 3-2-3 le derivate parziali non danno una vera estensione a più variabili del concetto di derivata su $\mathbf{R}$. La vera estensione è il differenziale, per la cui definizione occorre richiamare un concetto di algebra lineare.

1. Definizione Sia V uno spazio vettoriale. Una *forma lineare* o *funzionale* su V è un'applicazione lineare L da V in $\mathbf{R}$ (cioè tale che $L(x + y) = L(x) + L(y)$, $L(\lambda x) = \lambda L(x)$). L'insieme di tutte le forme lineari su V si indica con V^*, ed è detto il *duale (algebrico)* di V. Se $L \in V^*$, il valore di L in v si può indicare sia (come di solito) con $L(v)$ che più semplicemente con Lv.

2. Osservazione V^* è uno spazio vettoriale. Consideriamo il caso particolarmente importante $V = \mathbf{R}^n$. Per definire una forma $L \in (\mathbf{R}^n)^*$ basta assegnarne il valore sugli n elementi di una base di $\mathbf{R}^n$, $v_1, \dots, v_n$; infatti ogni elemento $v \in \mathbf{R}^n$ si scrive $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ e quindi $L(v) = \lambda_1 L(v_1) + \cdots + \lambda_n L(v_n)$. In particolare si indicano con e_j^*, $j = 1, \dots, n$, i funzionali che sulla base canonica $e_1, \dots, e_n$ hanno i seguenti valori: $e_j^*(e_i) = 1$ se $i = j$, 0 altrimenti. $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ è una base (*canonica*) di $(\mathbf{R}^n)^*$; quindi vediamo che $(\mathbf{R}^n)^*$ ha dimensione n, e si può identificare con $\mathbf{R}^n$. Quindi per assegnare una forma lineare su $\mathbf{R}^n$ basta assegnare i suoi *coefficienti*, cioè i numeri λ_j dati dalla rappresentazione $L = \lambda_1 e_1^* + \cdots + \lambda_n e_n^*$. Allora la forma si scrive semplicemente come

$$L(h) = L(h_1, \dots, h_n) = \lambda_1 h_1 + \dots \lambda_n h_n + \tag{1}$$

(perché $e_j^*(h) = h_j$).

Conclusione *importante*: le forme lineari su $\mathbf{R}^n$ sono tutte e sole le espressioni del tipo (1). Nel seguito quando parleremo di forme lineari intenderemo sempre: su $\mathbf{R}^n$.

Sia A aperto di $\mathbf{R}^n$, $x^0 \in A$, $f : A \to \mathbf{R}$.

3. Definizione f si dice *differenziabile* in x^0 se esiste una forma lineare L tale che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x^0 + h) - f(x^0) - L(h)}{|h|} = 0. \tag{2}$$

Allora L si dice *differenziale* di f in x^0, e si indica con $df(x_0)$. Se f è differenziabile in ogni punto di A, f si dice *differenziabile* in A. L'*insieme di differenziabilità* di f è l'insieme di tutti i punti in cui f è differenziabile.

Talvolta è più comodo scrivere il limite della definizione di differenziale nella forma seguente:

$$\lim_{x \to x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - L(x - x^0)}{|x - x^0|} = 0.$$

4. Osservazione Notare che la forma $L = df(x^0)$ non è sempre la stessa, ma dipende dal punto x^0. Fare attenzione alla scrittura: $df(x^0)(h)$ è il differenziale di f in x^0 applicato al vettore h. Quando si scrive df, si intende una funzione che dipende dal punto $x \in A$, e per ogni x è una forma lineare in h:

$$df : A \to (\mathbf{R}^n)^*.$$

5. Osservazione Se f è differenziabile in x^0, allora è anche derivabile in x^0 in tutte le direzioni, infatti preso un vettore di modulo unitario v

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0) - L(tv)}{t} + L(v) = L(v).$$

Otteniamo così che $D_v f(x^0) = L(v) = df(x^0)(v)$. In particolare $D_j f(x^0) = L(e_j) = \lambda_j$, ossia i coefficienti del differenziale sono proprio le derivate parziali di f in x^0:

$$L(h) = df(x^0)(h) = D_1 f(x^0) h_1 + \cdots + D_n f(x^0) h_n. \tag{3}$$

Ne segue che: se vogliamo verificare che f è differenziabile in un punto, calcoliamo anzitutto le derivate parziali in quel punto, quindi prendiamo la forma L come in (3), e proviamo a fare il limite (2); se otteniamo 0, la funzione è differenziabile, se il limite non esiste (o non fa 0), non lo è.

Naturalmente, se qualcuna delle derivate parziali in un punto non esiste, la funzione non può essere differenziabile in quel punto.

Usando la notazione del prodotto scalare, si può scrivere anche $df(x^0)(h) = (Df(x^0), h) = Df(x^0) \cdot h$ dove Df è il gradiente di f.

6. Esempio Se f non è differenziabile in un punto, allora non è detto che le derivate direzionali si calcolino secondo la formula $D_v f(x^0) = D_1 f(x^0)v_1 + \cdots + D_n f(x^0)v_n$. Ad esempio la funzione $f = f_6$

$$f_6(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

è derivabile in tutte le direzioni in 0, e si ha $D_v f(0,0) = v_1^2 v_2$ per $v = (v_1, v_2)$ di modulo 1. In particolare $D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$. Quindi non vale la formula suesposta (e quindi f non è differenziabile, altrimenti la formula sarebbe valida). La funzione è anche continua in 0 perché $|f(x,y)| \leq |y|$.

7. Proposizione *Se f è differenziabile in x^0, allora è continua in x^0.*

DIM. Posto $\sigma(h) = [f(x^0+h) - f(x^0) - L(h)]/|h|$, per ipotesi $\sigma(h) \to 0$ per $h \to 0$. Inoltre, $L(h) \to 0$ per $h \to 0$ dato che $L(h) = \lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_n h_n$. Allora

$$f(x^0 + h) = f(x_0) + L(h) + |h| \cdot \sigma(h) \to f(x^0)$$

per $h \to 0$.

8. Teorema *(differenziale totale) Se f è derivabile in un intorno di x^0 e le derivate sono continue in x^0, allora f è differenziabile in x^0.*

DIM. Ci limitiamo a trattare il caso di una funzione di due variabili $f(x_1, x_2)$; il caso generale è completamente analogo. Se le derivate parziali esistono nell'intorno B di x^0, possiamo scrivere per $x \in B$

$$f(x) - f(x^0) = f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2) + f(x_1^0, x_2) - f(x_1^0, x_2^0).$$

Per il Teorema del valor medio abbiamo

$$f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2) = (x_1 - x_1^0) D_1 f(\xi, x_2)$$

$$f(x_1^0, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = (x_2 - x_2^0) D_2 f(x_1^0, \eta)$$

con ξ tra x_1 e x_1^0, η tra x_2 e x_2^0. Dobbiamo mostrare che f è differenziabile, quindi consideriamo la forma $L(h) = D_1 f(x^0)h_1 + D_2 f(x^0)h_2$ (unico candidato possibile come differenziale) e calcoliamo il limite della definizione. Possiamo scrivere, usando le identità precedenti,

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^0) - L(x - x^0) = &(x_1 - x_1^0)(D_1 f(\xi, x_2) - D_1 f(x_1^0, x_2^0)) \\ &+ (x_2 - x_2^0)(D_2 f(x_1^0, \eta) - D_2 f(x_1^0, x_2^0)) \end{aligned}$$

e quindi

$$\left| \frac{f(x) - f(x^0) - L(x - x^0)}{|x - x^0|} \right| \leq |D_1 f(\xi, x_2) - D_1 f(x_1^0, x_2^0)| + |D_2 f(x_1^0, \eta) - D_2 f(x_1^0, x_2^0)|$$

da cui la tesi passando al limite per $x \to x^0$ e usando la continuità delle derivate parziali.

9. Osservazione In particolare, se f è derivabile con derivate continue in un aperto A, allora f è differenziabile in A.

10. Osservazione Sia f differenziabile in x^0. Allora la funzione $\phi(x) = f(x^0) + df(x^0)(x - x^0)$ ha per grafico un piano passante per il punto $(x^0, f(x^0)) \in \mathbf{R}^{n+1}$, detto il *piano tangente* a f in x^0. Notare infatti che

$$\lim_{x \to x^0} \frac{f(x) - \phi(x)}{|x - x^0|} = 0.$$

11. Esempio Una funzione lineare $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ovviamente è derivabile in ogni punto, e il differenziale dL in ogni punto è esattamente uguale ad L, cioè non dipende dal punto [basta applicare la definizione, e si vede che il rapporto incrementale nella definizione di df è identicamente nullo per $f = L$]. Un caso speciale molto interessante è dato dalle funzioni $\pi_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ che ad ogni punto x associano la sua j-esima coordinata, ossia $\pi_j(x) = x_j$. Naturalmente π_j è lineare e quindi $d\pi_j$ in ogni punto x^0 è ancora la funzione che ad ogni vettore associa la sua coordinata j-esima:

$$d\pi_j(x^0)(h) = h_j$$

cioè, per ogni x^0, $d\pi_j(x^0) = e_j^*$ (si potrebbe anche scrivere $d\pi_j = \pi_j$, ma la prima π_j opera sulle x, la seconda sul vettore h, allora per evitare confusioni è meglio tenere le notazioni distinte).

Spesso la funzione π_j si indica semplicemente con x_j, e quindi si scrive $d\pi_j = dx_j = e_j^*$. Dato che gli e_j^* sono una base di $(\mathbf{R}^n)^*$, vediamo che $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ è una base di $(\mathbf{R}^n)^*$, e quindi ogni differenziale $df(x^0)$ si scrive come combinazione lineare:

$$df(x^0) = D_1 f(x^0) dx_1 + \cdots + D_n f(x^0) dx_n.$$

Ad esempio

$$d(x^2 y e^z) = 2xye^z dx + x^2 e^z dy + x^2 y e^z dz.$$

12. Esempio Non vale il viceversa del Teorema del differenziale totale: anzi può accadere che una funzione sia differenziabile in un punto senza essere derivabile in nessun altro punto. Per vederlo, osserviamo che una qualunque funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tale che

$$|f(x, y)| \leq x^2 + y^2$$

per tutti gli x, y è sicuramente differenziabile nell'origine con $df(0, 0) = 0$ (verificare!). Tuttavia il comportamento di f fuori dall'origine può essere pessimo. Ad esempio la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x, y \in \mathbf{Q} \\ -x^2 - y^2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è differenziabile in $(0, 0)$ per quanto appena detto, ma gli insiemi di continuità, derivabilità e differenziabilità di f coincidono tutti e tre con $\{(0, 0)\}$.

Ricordiamo che se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ è derivabile con derivata nulla in ogni punto, allora f è costante. Per estendere questa proprietà al caso di più variabili dobbiamo richiamare alcune semplici nozioni di topologia generale.

13. Definizione Uno spazio topologico si dice *connesso* se non è possibile scriverlo come unione di due aperti disgiunti non vuoti. Ciò equivale a dire che esso non si può scrivere come unione di due chiusi disgiunti non vuoti; ed equivale a dire anche che gli unici insiemi che sono allo stesso tempo aperti e chiusi sono $\emptyset$ e tutto lo spazio. Un sottoinsieme si dice connesso se è connesso come spazio topologico con la topologia indotta. Una *componente connessa* di uno spazio topologico è un sottoinsieme connesso non vuoto che non è contenuto in nessun insieme connesso più grande; due componenti connesse sono sempre disgiunte [altrimenti la loro unione sarebbe connessa e più grande]; le componenti connesse sono sempre insiemi chiusi, ma non sempre aperti; tuttavia, le componenti connesse di un sottoinsieme A di $\mathbf{R}^n$ sono sia aperte che chiuse in A. Ogni spazio si scrive in modo unico come unione (disgiunta) delle sue componenti connesse.

Ricordiamo anche che se $f : X \to Y$ è continua tra gli spazi topologici X, Y, allora per ogni chiuso $C \subseteq Y$ anche $f^{-1}(C)$ è chiuso. In particolare se $f : X \to \mathbf{R}$ e $c \in \mathbf{R}$, l'insieme $\{x \in X : f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\})$ è chiuso.

14. Proposizione *Siano A un aperto di $\mathbf{R}^n$, $f : A \to \mathbf{R}$ differenziabile. Se $df \equiv 0$, allora f è costante su ciascuna componente connessa di A.*

DIM. Se $B(x^0, r)$ è una sfera contenuta in A, allora f è costante su B (cioè f è *localmente costante*). Infatti, sia $x \in B$; detto $\phi(t) = x^0 + t(x - x^0)$ il segmento che va da x^0 a x, si ha

$$\frac{d}{dt}[f(\phi(t))] = Df(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = 0$$

(questa formula per derivate di funzioni composte sarà dimostrata in 3-5), quindi la funzione $f(\phi(t))$ è costante e $f(x) = f(x^0)$.

Sia ora A_1 una componente connessa di A, $x^0 \in A_1$, $c = f(x^0)$, e consideriamo l'insieme $A_2 = \{x \in A_1 : f(x) = c\}$. A_2 chiaramente è chiuso in A_1 dato che f è continua, ma è anche aperto in A_1, perchè se $y \in A_2$ per quanto visto prima f è costante su ogni sfera $B(y, r) \subseteq A_1$, quindi $f = f(y) = c$ su $B(y, r)$, quindi $B(y, r) \subseteq A_2$. Essendo A_1 connesso, ne segue $A_2 = A_1$.

ESERCIZI

1 Verificare le affermazioni dell'osservazione 2.

2 Siano f, g differenziabili in x^0. Dimostrare che $f+g$, $f \cdot g$ sono differenziabili in x^0, e si ha: $d(f+g)(x^0) = df(x^0) + dg(x^0)$, $d(fg)(x^0) = f(x^0) \cdot dg(x^0) + g(x^0) \cdot df(x^0)$.

3 Una funzione costante è differenziabile con differenziale nullo.

4 Determinare gli insiemi di differenziabilità di F_1-F_{18}, f_0-f_{36}.

5 Verificare l'affermazione dell'oss.10.

6 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è derivabile se e solo se è differenziabile. Scrivere il differenziale di f usando la derivata di f.

7 Sia A aperto limitato non vuoto di $\mathbf{R}^n$, sia $f : \overline{A} \to \mathbf{R}$ continua su $\overline{A}$, differenziabile su A e *costante* su ∂A. Allora esiste $x^0 \in A$ in cui il differenziale di f si annulla (Teorema di Rolle in $\mathbf{R}^n$).

9 Sia $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una forma lineare. Calcolare il differenziale dL di L.

10 Calcolare il differenziale e il gradiente della *forma quadratica* $f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

---

01 Siano $f, g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, f differenziabile in 0, $f(0) = 0$, g continua in 0. Allora fg è differenziabile in 0, e si ha $d(fg)(0) = g(0) \cdot df(0)$.

02 Siano $f_1, \ldots, f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabili, e sia $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definita come $g(x) = f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n)$. Allora g è differenziabile e $dg(x)(h) = \sum f_j'(x_j)h_j$.

03 Siano $f, g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ differenziabili in 0 e $g(0) \neq 0$. Dimostrare che f/g è differenziabile in 0 e calcolarne il differenziale.

3-4 DERIVATE SUCCESSIVE, FORMULA DI TAYLOR

Se una funzione f è derivabile su un insieme, le sue derivate $D_j f(x)$ sono n funzioni, che possono essere a loro volta derivabili. Quindi si possono calcolare le derivate seconde di f: $D_i D_j f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, le derivate terze e così via. Si dice ordine di una derivata il numero totale di derivate fatte rispetto alle singole variabili. Una notazione comoda è la seguente: se $v = (v_1, \ldots, v_n)$ è un vettore e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ è un *multiindice*, ossia una n-upla di interi ≥ 0, si scrive

$$v^\alpha = v_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot v_n^{\alpha_n}$$

e con D^α indicheremo la derivata

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

ossia α_1 volte rispetto a x_1, ..., α_n volte rispetto a x_n; in totale D^α è una derivata di ordine $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ ($|\alpha|$ si dice *lunghezza* del multiindice α).

1. Osservazione In generale, anche se le derivate seconde di f esistono, non è detto che $D_i D_j f = D_j D_i f$, ossia le derivate miste possono dipendere dall'ordine di derivazione. Ad esempio, se $f = f_{37}$ è la funzione

$$f_{37}(x, y) = \begin{cases} y^2 \arctan \dfrac{x}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

si ha $D_1 D_2 f(0,0) = 0$, $D_2 D_1 f(0,0) = 1$.

2. Teorema *(di Schwartz) Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ aperto, $(x^0, y^0) \in A$, $f : A \to \mathbf{R}$. Supponiamo che le derivate prime e le derivate parziali miste $D_1 D_2 f$, $D_2 D_1 f$ esistano in un intorno di (x^0, y^0) e siano continue in (x^0, y^0). Allora*

$$D_1 D_2 f(x^0, y^0) = D_2 D_1 f(x^0, y^0).$$

DIM. Poniamo

$$w(h, k) = \frac{1}{hk}[f(x^0 + h, y^0 + k) - f(x^0, y^0 + k) - f(x^0 + h, y^0) + f(x^0, y^0)];$$

è chiaro che la funzione w è ben definita se $|h|, |k| < r$ con r sufficientemente piccolo. Osserviamo ora che ponendo

$$\phi(h, k) = f(x^0 + h, y^0 + k) - f(x^0, y^0 + k)$$

e applicando due volte il Teorema del valor medio, si ha

$$\begin{aligned} w(h,k) &= \frac{1}{hk}[\phi(h,k)-\phi(h,0)] = \frac{1}{hk}kD_2\phi(h,\eta) \\ &= \frac{1}{h}[D_2f(x^0+h,y^0+\eta)-D_2f(x^0,y^0+\eta)] = D_1D_2f(x^0+\xi,y^0+\eta) \end{aligned}$$

per ξ compreso tra 0 e h, e η compreso tra 0 e k. Invece, ponendo

$$\psi(h,k) = f(x^0+h,y^0+k) - f(x^0+h,y^0)$$

e procedendo in modo simile si ha

$$\begin{aligned} w(h,k) &= \frac{1}{hk}[\psi(h,k)-\psi(0,k)] = \frac{1}{hk}hD_1\psi(\xi',k) \\ &= \frac{1}{k}[D_1f(x^0+\xi',y^0+k)-D_1f(x^0+\xi',y^0)] = D_2D_1f(x^0+\xi',y^0+\eta') \end{aligned}$$

per ξ' compreso tra 0 e h, e η' compreso tra 0 e k. Quindi abbiamo

$$D_1D_2f(x^0+\xi,y^0+\eta) = D_2D_1f(x^0+\xi',y^0+\eta');$$

se ora facciamo tendere (h,k) a $(0,0)$, anche ξ,ξ',η,η' tendono a 0 e per la continuità delle derivate miste otteniamo la tesi.

3. Osservazione Applicando il teorema precedente si dimostra subito che le derivate parziali miste D_iD_jf e D_jD_if di una funzione di n variabili sono uguali in un punto se esistono in un intorno e sono continue nel punto. Analogamente si dimostra che se una funzione f è in $C^k(A)$ (A aperto), ossia possiede tutte le derivate fino all'ordine k e queste sono continue in A, allora le derivate miste di ordine minore o uguale a k non dipendono dall'ordine di derivazione.

Diamo qui qualche cenno sulla *formula di Taylor* per funzioni di più variabili. Sia $f \in C^k(A)$, $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto, $x^0 \in A$, $B(x^0,2r) \subseteq A$. Fissiamo $w \in \mathbf{R}^n$ e definiamo la funzione di una sola variabile

$$F(t) = f(x^0+tw).$$

La funzione F è di classe C^k, $F : [-r,r] \to \mathbf{R}$. Per la formula di Taylor in una variabile abbiamo

$$F(t) = \sum_{j=0}^{k} F^{(j)}(0)\frac{t^j}{j!} + R_k(t);$$

ricordiamo che la somma a secondo membro, indicata con $P_k(t)$, si chiama *polinomio di Taylor* in 0 di F, ed è l'unico polinomio di grado k con la proprietà $F^{(j)}(0) = P_k^{(j)}(0)$ per $j = 1,\dots,k$, ossia che approssima la funzione F all'ordine k in 0. Dunque il *resto di Taylor* $R_k(t) = F(t) - P_k(t)$ (anch'esso evidentemente di classe C^k) verifica $R^{(j)}(0) = 0$ per $j = 0,\dots,k$. Per stimare il resto basta osservare che

$$R_k^{(k)}(t) = F^{(k)}(t) - F^{(k)}(0)$$

e integrare k volte tra 0 e t; si ottiene facilmente

$$|R_k(t)| \le |t|^k \cdot \sup_{|s|\le t} |F^{(k)}(s) - F^{(k)}(0)|. \tag{1}$$

In particolare si ottiene che $R_k(t)/t^k \to 0$ per $t \to 0$, dato che F è di classe C^k.

Torniamo adesso alla funzione $f(x)$. Calcolando le derivate di F in 0, si vede facilmente che (ricordiamo che per un multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ si ha $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$, e se $w = (w_1, \dots, w_n)$ è un vettore, $w^\alpha = w_1^{\alpha_1} \cdots w_n^{\alpha_n}$)

$$F(0) = f(x^0),$$

$$F'(0) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x^0) w_i \equiv \sum_{|\alpha|=1} D^\alpha f(x^0) w^\alpha,$$

$$F''(0) = \sum_{i,j=1}^{n} D_i D_j f(x^0) w_i w_j = 2! \sum_{|\alpha|=2} D^\alpha f(x^0) \frac{w^\alpha}{\alpha!}$$

mentre la derivata di ordine k è data da

$$F^{(k)}(0) = \sum_{h_1,\dots,h_k=1}^{n} D_{h_1} \cdots D_{h_k} f(x^0) w_{h_1} \cdots w_{h_k} = k! \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha f(x^0) \frac{w^\alpha}{\alpha!}.$$

La comparsa del fattore $k!/\alpha!$ nell'espressione con i multiindici è dovuta al fatto che scrivendo una derivata nella forma D^α non è possibile distinguere l'ordine di derivazione; ad esempio D_1D_2 e D_2D_1 si scrivono entrambi D^α con $\alpha = (1,1)$. Raggruppando tutte le derivate miste uguali (lo sono per il Teorema di Schwartz) si ottiene il suddetto fattore.

Sostituiamo adesso le formule trovate nella formula di Taylor per $F(t)$; si ottiene (ponendo $t = |x - x^0|$, $w = (x - x^0)/|x - x^0|$, quindi $x^0 + tw = x$ e $F(t) = f(x)$):

$$f(x) = F(|x - x^0|) = \sum_{|\alpha| \le k} D^\alpha f(x^0) \frac{(x - x^0)^\alpha}{\alpha!} + R_k(x^0, x).$$

Notiamo che il resto $R_k(x^0, x) = f(x) - P_k(x^0, x)$ è di classe C^k in x. Per stimarlo usiamo la (1); dato che

$$F^{(k)}(t) - F^{(k)}(0) = k! \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha f(x) - D^\alpha f(x^0)| \frac{w^\alpha}{\alpha!}$$

e le derivate di f di ordine k sono uniformemente continue, si ottiene subito

$$\frac{R_k(x^0, x)}{|x - x^0|^k} \to 0 \quad \text{per} \quad x \to x^0.$$

Se $f \in C^{k+1}(A)$ vale la formula del *resto di Lagrange*

$$R_k(t) = F^{(k+1)}(\xi) \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$$

per un certo ξ tra 0 e t (dipendente da t), da cui

$$R_k(x^0, x) = \sum_{|\alpha|=k+1} D^\alpha f(y) \frac{(x-x^0)^\alpha}{\alpha!}$$

con y appartenente al segmento che unisce x^0 e x. Ricordiamo anche l'espressione più precisa del resto in *forma integrale*

$$R_k(t) = \frac{t^{k+1}}{k!} \int_0^1 (1-s)^k F^{(k+1)}(ts) ds,$$

da cui

$$R_k(x^0, x) = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \int_0^1 (1-s)^k D^\alpha f(x^0 + s(x-x^0)) \cdot (x-x^0)^\alpha ds.$$

Nel seguito useremo le formule precedenti nei casi particolarmente importanti $k = 1, 2$:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{j=1}^n D_j f(x^0)(x_j - x_j^0) + R_1(x^0, x) = f(x^0) + (Df(x^0), x - x^0) + R_1(x^0, x),$$

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x^0) + (Df(x^0), x - x^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D_i D_j f(x^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + R_2(x^0, x), \\ =& f(x^0) + (Df(x^0), x - x^0) + \frac{1}{2} \big(Hf(x^0)(x - x^0), x - x^0 \big) + R_2(x^0, x). \end{aligned}$$

Nell'ultima espressione si è fatto uso della *matrice Hessiana* di f, ossia la matrice delle derivate seconde $Hf(x^0) = [D_i D_j f(x^0)]$.

ESERCIZI

1 Verificare l'osservazione 1.

2 Verificare l'osservazione 3.

3 Sviluppare in formula di Taylor le seguenti funzioni: e^{x+y} fino all'ordine 3, $\log(1+x\sin y^2)$ fino all'ordine 4, $x^3 \sin y + y \log(1+x)$ fino all'ordine 4.

4 Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbf{R}$ derivabile su A con derivate nulle. Dimostrare che f è *localmente costante*, ossia per ogni punto $x \in A$ esiste un intorno di x contenuto in A su cui f è costante. Se inoltre A è *connesso*, cioè non è unione di due aperti non vuoti disgiunti, allora f è costante su A.

---

01 Vale la seguente versione del Teorema di Schwartz: se $D_1 f$, $D_2 f$ esistono in un intorno di (x^0, y^0) e sono differenziabili in (x^0, y^0), allora $D_1 D_2 f(x^0, y^0) = D_2 D_1 f(x^0, y^0)$.

02 Calcolare tutte le derivate quarte di $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

3-5 FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

Abbiamo già ricordato che una funzione $f : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subseteq \mathbf{R}^n$, è equivalente ad una m-upla di funzioni $f = (f_1, \cdots, f_m)$. f è continua se e solo se lo sono $f_1, \ldots, f_m$. Inoltre f si dice derivabile (differenziabile) in un punto o in un insieme se lo sono le sue componenti $f_1, \ldots, f_m$. È facile vedere che f è differenziabile in x^0 se e solo se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ tale che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x^0 + h) - f(x^0) - L(h)}{|h|} = 0;$$

L si chiama come di consueto il *differenziale* di f in x^0 e si indica con $df(x^0)$; esso è rappresentato da una matrice $m \times n$, detta la *matrice Jacobiana* di f e indicata con $Df(x^0)$. Notiamo che il differenziale df è la m-upla dei differenziali $df_1, \ldots, df_m$; Df è una matrice le cui righe sono $Df_1, \ldots, Df_m$:

$$Df(x^0) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x^0) & \ldots & D_n f_1(x^0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D_1 f_m(x^0) & \ldots & D_n f_m(x^0) \end{pmatrix} = [D_j f_i(x^0)].$$

Vale il seguente teorema sul differenziale delle funzioni composte.

1. Teorema *Siano A aperto di $\mathbf{R}^n$, B aperto di $\mathbf{R}^m$, C aperto di $\mathbf{R}^k$. Siano $f : A \to B$, $g : B \to C$, e sia f differenziabile in $x^0 \in A$, g differenziabile in $f(x^0)$. Allora $g \circ f : A \to C$ è differenziabile in x^0, e si ha*

$$d(g \circ f)(x^0) = dg(f(x^0)) \circ df(x^0)$$

mentre tra le matrici Jacobiane vale la relazione

$$D(g \circ f)(x^0) = Dg(f(x^0)) \cdot Df(x^0).$$

DIM. Scriviamo per brevità $F = g \circ f$, $y^0 = f(x^0)$, $L = df(x^0)$, $M = dg(y^0)$. Sappiamo per ipotesi che le quantità

$$\sigma(h) = \frac{f(x^0 + h) - f(x^0) - L(h)}{|h|}, \qquad \rho(k) = \frac{g(y^0 + k) - g(y^0) - M(k)}{|k|}$$

sono infinitesime per $h \to 0$ e per $k \to 0$. Dobbiamo invece dimostrare che la quantità

$$\omega(h) = \frac{F(x^0 + h) - F(x^0) - ML(h)}{|h|}$$

è infinitesima per $h \to 0$. Notiamo che $\rho(k)$ è definita solo per $k \neq 0$; ma se la estendiamo ponendo $\rho(0) = 0$, allora ρ è una funzione continua definita in tutto un intorno di 0. Si ha inoltre, in tale intorno,

$$g(y^0 + k) - g(y^0) = M(k) + |k|\rho(k), \tag{1}$$

mentre dalla definizione di $\sigma(h)$ si ha

$$f(x^0 + h) - f(x^0) = L(h) + |h|\sigma(h). \tag{2}$$

Scegliamo ora $k = f(x^0 + h) - f(x^0)$; si può scrivere

$$F(x^0 + h) - F(x^0) = g(f(x^0 + h)) - g(y^0) = g(y^0 + k) - g(y^0) = M(k) + |k|\rho(k)$$

per la (1), quindi

$$\omega(h) = \frac{M(k) + |k|\rho(k) - ML(h)}{|h|} = \frac{M[L(h) + |h|\sigma(h)] + |k|\rho(k) - ML(h)}{|h|}$$

per la (2); semplificando si ottiene

$$\omega(h) = M[\sigma(h)] + \frac{|k|}{|h|}\rho(k).$$

Basta ora osservare che il rapporto $\frac{|k|}{|h|}$ è limitato in quanto, ancora da (2),

$$|k| \leq |L(h)| + |h| \cdot |\sigma(h)|,$$

e quindi mandando $h \to 0$ (e quindi $k \to 0$ perché f è continua in x^0) si ha la tesi.

2. Esempio Se $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, si ha applicando il Teorema 1

$$\frac{d}{dt}F(\phi(t)) = DF(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = \sum_{j=1}^{n} D_j F(\phi(t))\phi_j'(t).$$

Con una notazione più antica, meno precisa ma più facile da ricordare e da usare,

$$\frac{d}{dt}F(\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)) = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{d\phi_1}{dt} + \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{d\phi_n}{dt}.$$

Ad esempio ($x, y \in \mathbf{R}^n$)

$$\frac{d}{dt}F(x + ty) = DF(x + ty) \cdot y = \sum_{j=1}^{n} D_j F(x + ty) y_j.$$

Analogamente, se $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^n$, $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, quindi $F \circ \phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$D(F \circ \phi)(x) = DF(\phi(x)) \cdot D\phi(x)$$

ossia, per $i = 1, 2$

$$D_i(F \circ \phi)(x) = \sum_{j=1}^{n} D_j F(\phi(x)) D_i \phi_j(x).$$

Con la notazione tradizionale, $F = f(y_1, \ldots, y_n)$, $F \circ \phi = F(\phi_1(x_1, x_2), \ldots, \phi_n(x_1, x_2))$ e

$$\frac{\partial (F \circ \phi)}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y_n}\frac{\partial \phi_n}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial (F \circ \phi)}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y_n}\frac{\partial \phi_n}{\partial x_2}.$$

3. Esempio (Coordinate polari in $\mathbf{R}^2$). Consideriamo l'applicazione $\Phi : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$\begin{cases} x = \Phi_1(\rho,\theta) = \rho\cos\theta \\ y = \Phi_2(\rho,\theta) = \rho\sin\theta. \end{cases}$$

Data una funzione $f(x,y)$ su $\mathbf{R}^2$, *scrivere f in coordinate polari* vuol dire considerare la funzione

$$\widetilde{f}(\rho,\theta) = f\circ\Phi = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

La matrice Jacobiana di Φ è

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Quindi si hanno le formule

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}\rho\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\rho\cos\theta$$

(in forma sintetica, $D_{\rho,\theta}\widetilde{f} = D_{x,y}f\cdot D\Phi$). Notare che la funzione Φ non è iniettiva. Se chiamiamo $I = \{(x,y) : x \le 0\}$ il semiasse delle x negative, e restringiamo Φ nel modo seguente:

$$\Phi :]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\to \mathbf{R}^2\setminus I$$

allora Φ è invertibile e si può esprimere Φ^{-1} come

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{per } x>0, \\ \pi/2 - \arctan(x/y) & \text{per } y>0, \\ -\pi/2 - \arctan(x/y) & \text{per } y<0. \end{cases}$$

La funzione θ è continua su $\mathbf{R}^2\setminus I$, ed è esattamente l'angolo del vettore (x,y) con il semiasse delle x positive, misurato in radianti in senso antiorario.

ESERCIZI

1 Verificare il Teorema 1 nel caso seguente: $f :]a,b[\to A$ differenziabile in t_0, $A\subseteq\mathbf{R}^n$, $g : A\to\mathbf{R}$ differenziabile in $f(t_0)$. Si chiede cioè di dimostrare che $g\circ f$ è differenziabile in t_0 e si ha

$$(g\circ f)'(t_0) = \sum_{j=1}^n D_j g(f(t_0))f'(t_0).$$

2 Calcolare $\frac{\partial(F\circ\phi)}{\partial x}$, $\frac{\partial(F\circ\phi)}{\partial y}$, dove $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ e $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ sono date da

$$F(x,y) = x^2-y^2, \quad f_1(x,y) = \sin(x+y), \quad f_2(x,y) = \cos(x-y);$$

$$F(x,y) = xe^y, \quad f_1(x,y) = x^2 + y, \quad f_2(x,y) = y^2 + x;$$
$$F(x,y) = x - \log y, \quad f_1(x,y) = y^n, \quad f_2(x,y) = x^m.$$

3 Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$; dimostrare che f è differenziabile in x^0 se e solo se lo sono $f_1, \dots, f_m$. In tal caso dimostrare che si ha $df(x^0) = (df_1(x^0), \dots, df_m(x^0))$ e la matrice che rappresenta $df(x^0) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ ha come j-esima riga $Df_j(x^0)$, il gradiente di f_j in x^0.

4 Siano $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ di classe C^1, e poniamo $F_1(x,y) = f(f(x) - g(y))$, $F_2(x,y) = g(g(x) - f(y))$. Scrivere la matrice Jacobiana di $F = (F_1, F_2)$.

---

01 Trovare tutte le funzioni C^1 su $\mathbf{R}^2$ tali che
$$x\frac{\partial u}{\partial y} = y\frac{\partial u}{\partial x}.$$
[Scriviamo u in coordinate polari, l'equazione diventa
$$\rho\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y} = \rho\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y};$$
ricordando le formule dell'esempio 3 otteniamo
$$\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\theta} = -\rho\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$$
cioè $\widetilde{u} = \widetilde{u}(\rho)$ non dipende da θ.]

02 Trovare tutte le funzioni $u(x,y)$ C^1 su $\mathbf{R}^2$ tali che
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$
[Fissato y, la funzione $u(x,y)$ è costante in x; indicando con $\alpha(y)$ tale valore costante, abbiamo che $u(x,y)$ è una qualunque funzione $\alpha(y)$ della sola y.]

03 Trovare tutte le soluzioni C^1 $u(x,y)$ dell'equazione
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0.$$
[Sia $v(x,y) = D_y u$; l'equazione data ci dice che $D_x v = 0$, quindi v è una funzione della sola y: abbiamo cioè $D_y u = \alpha(y)$. Se adesso $A(y)$ è una qualunque primitiva di $\alpha(y)$, abbiamo $D_y u = D_y A$, ossia $D_y(u - A) = 0$. Quindi $u - A$ è una funzione della sola x, $B(x)$; otteniamo allora che u deve avere necessariamente la forma $u(x,y) = A(y) + B(x)$, e d'altra parte è chiaro che una tale u risolve l'equazione proposta.]

04 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione delle onde
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$
[Eseguiamo il cambiamento di variabile $(x,y) \to (\xi,\eta)$ dato da $\xi = ct - x$, $\eta = ct + x$. Abbiamo allora
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial\xi} + c\frac{\partial u}{\partial\eta},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta},$$
da cui
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(c\frac{\partial u}{\partial\xi} + c\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) &= \frac{\partial}{\partial\xi}\left(c\frac{\partial u}{\partial\xi} + c\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(c\frac{\partial u}{\partial\xi} + c\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\cdot\frac{\partial\eta}{\partial t}\\ &= c^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\right],\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) &= \frac{\partial}{\partial\xi}\left(-\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(-\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta},\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot c^2 \equiv 4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Nelle nuove coordinate l'equazione è diventata

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

che abbiamo risolto nell'esercizio precedente. Abbiamo così $u(\xi, \eta) = A(\xi) + B(\eta)$ da cui

$$u(x, y) = A(ct + x) + B(ct - y).]$$

05 Sia $u(x, y)$ soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

e sia $v(\rho, \theta) = u(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$. Mostrare che v soddisfa l'equazione

$$v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} v_\rho + \frac{1}{\rho^2} v_{\theta\theta} = 0.$$

Trovare tutte le soluzioni che dipendono solo da θ e quelle che dipendono solo da ρ. [$v(\theta) = a\theta + b$; invece $v(\rho)$ deve verificare $v_{\rho\rho} + v_\rho/\rho = 0$ cioè $(\rho v_\rho)_\rho = 0$ quindi $v_\rho = a/\rho$ quindi $v(\rho) = a \log \rho + b$. Le uniche soluzioni definite su tutto $\mathbf{R}^2$ sono le costanti.]

06 Sia $u(x, y)$ soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

e sia $v(\rho, \theta) = u(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$. Mostrare che v soddisfa l'equazione

$$\frac{4}{\rho^2} \sin\theta \cos\theta \; v_\theta + (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \left[v_{\rho\rho} - \frac{1}{\rho} u_\rho - \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} \right] = 0.$$

Trovare tutte le soluzioni che dipendono solo da θ e quelle che dipendono solo da ρ. [$v(\rho)$: si deve avere $v_{\rho\rho} = v_\rho/\rho$ quindi $v(\rho) = a\rho^2/2 + b$, che sono definite su tutto $\mathbf{R}^2$; $v(\theta)$: si ha $4 \sin\theta \cos\theta v_\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) v_{\theta\theta}$ da cui $v_{\theta\theta}/v_\theta = 4 \sin\theta \cos\theta / (cos^2\theta - \sin^2\theta)$ che integrata dà $v_\theta = a/\cos(2\theta)$ da cui

$$v(\theta) = \frac{a}{2} \log \left| \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} \right| + b$$

che però non è definita dappertutto.]

3-6 MASSIMI E MINIMI

Sia A un aperto di $\mathbf{R}^n$, $f : A \to \mathbf{R}$.

1. Definizione Un punto $x^0 \in A$ si dice di *massimo (minimo) locale* per f se esiste un intorno di x^0 tale che per ogni punto x di tale intorno si ha $f(x) \leq f(x^0)$ $(f(x) \geq f(x^0))$.

2. Proposizione *Sia f derivabile in x^0 punto di minimo o massimo locale per f. Allora $Df(x^0) = 0$, ossia tutte le derivate di f in x^0 si annullano.*

DIM. Dimostriamo che $D_1 f(x^0) = 0$: la funzione $\phi(t) = f(t, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ di una sola variabile è derivabile in $t = x_1^0$ ed ha un minimo (massimo) locale, quindi $\phi'(x_1^0) = 0$ cioè $D_1 f(x^0) = 0$. Analogamente per le altre derivate.

Non è vero in generale il viceversa: tutte le derivate possono annullarsi in un punto che non è né di massimo né di minimo.

Un punto in cui tutte le derivate si annullano si dice *punto stazionario*.

Supponiamo ora che $f \in C^2(A)$, e sia $x^0 \in A$ un punto stazionario. La formula di Taylor al secondo ordine si scrive allora

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} D_i D_j f(x^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + R_2(|x - x^0|).$$

Usando la notazione $H = Hf(x^0) = [D_i D_j f(x^0)]$ (matrice Hessiana ossia matrice delle derivate seconde) si può scrivere

$$f(x) = f(x^0) + \frac{1}{2}(H(x - x^0), x - x^0) + R_2(|x - x^0|).$$

Ricordiamo che data una matrice $H = [h_{ij}]$ *simmetrica* (ossia $h_{ij} = h_{ji}$), la *forma quadratica* associata ad H è la funzione su $\mathbf{R}^n$

$$(Hv, v) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} v_i v_j.$$

Notare che l'Hessiana di una funzione di classe C^2 è simmetrica per il Teorema di Schwartz. La matrice H, o la forma (Hv, v), si dice *definita positiva* se $(Hv, v) > 0$ $\forall v$, *semidefinita positiva* se $(Hv, v) \geq 0$ $\forall v$ (e analogamente (semi)definita negativa). Detti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori di H, reali perché H è simmetrica, si ha che H è definita positiva se e solo se $\lambda_i > 0$ $\forall i$, e semidefinita positiva se e solo se $\lambda_i \geq 0$ $\forall i$ (analogamente per le forme negative). Vediamo quindi che se H è definita positiva si ha $(Hv, v) \geq \lambda |v|^2$ per ogni v, con $\lambda > 0$ uguale al più piccolo autovalore (per vederlo, basta scrivere v in una base ortogonale in cui H è diagonale, che esiste perché H è simmetrica. Vedi anche es.01).

3. Proposizione *Sia $f \in C^2(A)$, $A \subseteq \mathbf{R}^n$ aperto, $x^0 \in A$, e supponiamo che $Df(x^0) = 0$.*
(a) Se x^0 è un minimo (massimo) locale per f, allora $Hf(x^0)$ è semidefinita positiva (negativa).
(b) Se $Hf(x^0)$ è definita positiva (negativa), allora x^0 è un minimo (massimo) locale per f.

DIM. Dalla formula di Taylor si ha, prendendo $x = x^0 + tv$ con v vettore fissato

$$\frac{1}{t^2}[f(x^0 + tv) - f(x^0)] = \frac{1}{2}(Hv, v) + \frac{1}{t^2} R_2(t|v|).$$

Ricordiamo inoltre che $\sigma(t) = R_2(t|v|)/(t|v|)^2$ tende a zero per $t \to 0$. Ora, se x^0 è un punto di minimo l'espressione sopra scritta è sempre non negativa, quindi facendo tendere $t \to 0$ si ottiene $(Hv, v) \geq 0$. Viceversa, se $(Hv, v) > 0$ e quindi $(Hv, v) \geq c|v|^2$, si ha

$$\frac{1}{2}(Hv, v) + \frac{1}{t^2} R_2(t|v|) \geq |v|^2 \left(\frac{c}{2} + \sigma(t|v|) \right);$$

dato che σ tende a 0 per $t \to 0$ vediamo che questa quantità è positiva per t abbastanza piccolo, quindi

$$f(x^0 + tv) - f(x^0) \geq 0$$

per t abbastanza piccolo, cioè x^0 è un punto di minimo. Il caso del massimo è identico.

4. Osservazione Se la matrice Hessiana ha sia un autovalore > 0, sia un autovalore < 0, allora sicuramente il punto non è né di massimo né di minimo, come segue dal punto (a). Se in un punto il differenziale si annulla ma il punto non è né di massimo né di minimo, allora esso si dice un *punto sella.*

5. Esempio Consideriamo in dettaglio il caso di funzioni di due variabili. La matrice Hessiana H allora è una matrice 2×2; per studiarne il segno non c'è bisogno di calcolare esplicitamente gli autovalori. Come è noto dalla teoria delle matrici, se si cambia base la traccia (=somma degli elementi sulla diagonale) e il determinante delle matrici non cambiano; essendo l'Hessiana simmetrica (Teorema di Schwartz) esiste una base in cui essa è diagonale, e sulla diagonale troviamo esattamente i suoi autovalori λ_1, λ_2; vediamo così che $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} H$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det H$. Seguono subito le regole:
1) $\det H > 0$, $\operatorname{tr} H > 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ minimo;
2) $\det H > 0$, $\operatorname{tr} H < 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ massimo;
3) $\det H < 0 \Rightarrow \lambda_1$ e λ_2 hanno segno opposto $\Rightarrow$ punto sella;
4) $\det H = 0 \Rightarrow$ un autovalore è nullo $\Rightarrow$ non si può stabilire il carattere del punto.
Naturalmente, nel caso 4) può darsi che il punto sia di massimo, minimo, o un punto sella; semplicemente i metodi dati qui non consentono di stabilirne il carattere. Infatti qui esaminiamo solo i termini della funzione fino al secondo ordine; quando questi si annullano, bisogna passare allo studio dei termini di ordine superiore, che però necessita di metodi più complicati. Vedi a questo proposito l'esempio 6. Per completare l'elenco delle conseguenze della Proposizione 3, abbiamo anche che se un punto è un
1) minimo $\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \Rightarrow \det H \geq 0$, $\operatorname{tr} H \geq 0$;
2) massimo $\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \leq 0 \Rightarrow \det H \geq 0$, $\operatorname{tr} H \leq 0$.
Possiamo infine riassumere quanto visto in una regola per trovare i massimi e i minimi di una funzione f definita su un insieme $A \subseteq \mathbf{R}^2$, *interni* all'insieme A:

Cercare anzitutto i punti in cui $Df(x^0) = 0$; quindi passare allo studio di $Hf(x^0)$. Se $\det H = 0$, non si può dire nulla. Quando $\det H < 0$, si ha un punto sella. Quando $\det H > 0$, si ha un massimo se $\operatorname{tr} H < 0$, un minimo se $\operatorname{tr} H > 0$ (notare che in questo caso il segno della traccia di H è lo stesso dell'elemento in alto a sinistra $D_1D_1f(x^0)$, dato che $D_1D_1f(x^0), D_2D_2f(x^0)$ devono avere lo stesso segno).

Per i punti non interni all'insieme A, la regola non vale; si devono usare altri metodi, tra cui il metodo dei *moltiplicatori di Lagrange* (paragrafo 9).

6. Esempio Studiamo le tre funzioni $f(x,y) = x^4 + y^4$, $g(x,y) = -x^4 - y^4$, $h(x,y) = x^4 - y^4$ nel punto $(0,0)$. Il differenziale si annulla in $(0,0)$ per tutte e tre; ma la matrice Hessiana è identicamente nulla per tutte e tre, quindi i nostri metodi non ci permettono di stabilire il carattere del punto. Anche se è evidente che f ha un minimo, g un massimo e h un punto sella.

7. Esempio (Minima distanza tra due rette). Date due rette in $\mathbf{R}^n$, descritte in forma parametrica

$$X(t) = At + B, \qquad Y(t) = Ct + D$$

(A, B, C, D vettori fissati di $\mathbf{R}^n$, $A \neq 0$, $C \neq 0$), vogliamo calcolare la loro distanza. Quindi vogliamo calcolare il minimo della funzione di due variabili

$$f(s,t) = |Y(s) - X(t)|^2 = |Cs - At + D - B|^2.$$

Abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 2C \cdot (Cs - At + D - B),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -2A \cdot (Cs - At + D - B),$$

quindi imponendo la condizione $Df = 0$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} |C|^2 s - A \cdot Ct = B \cdot C - D \cdot C \\ -A \cdot Cs + |A|^2 t = A \cdot D - A \cdot B; \end{cases}$$

notiamo che il determinante del sistema è

$$\Delta = |A|^2 |C|^2 - (A \cdot C)^2.$$

L'Hessiana di f è costante (non dipende da s, t) e vale

$$Hf = 2 \begin{pmatrix} |C|^2 & -A \cdot C \\ -A \cdot C & |A|^2 \end{pmatrix}.$$

Si hanno allora due casi:
1) Rette parallele, ossia A, C paralleli, il che equivale a $A \cdot C = |A| \cdot |C|$: il determinante del sistema si annulla, quindi esso ha infinite soluzioni. Per ogni $s \in \mathbf{R}$ si può prendere $t = [A \cdot D - A \cdot B - A \cdot Cs]/|A|^2$ e si ottengono così delle coppie (s, t) a cui corrispondono punti di minima distanza

$$\min_{\mathbf{R}} f = \frac{1}{|A|^2} [|A|^2 \cdot |B - D|^2 - |A \cdot (B - D)|^2].$$

2) Rette non parallele, qundi $\Delta \neq 0$: allora il sistema ha un'unica soluzione

$$s_0 = \frac{(D - B)[A(A \cdot C) - C|A|^2]}{|A|^2 |C|^2 - (A \cdot C)^2}, \qquad t_0 = \frac{(D - B)[A|C|^2 - C(A \cdot C)]}{|A|^2 |C|^2 - (A \cdot C)^2},$$

e a (s_0, t_0) corrispondono i due punti delle rette di minima distanza. Per trovare il valore della distanza cioè $\min f$ basta sostituire s_0, t_0 nella definizione di $f(s, t)$.

ESERCIZI

1 Per le seguenti funzioni, trovare i punti stazionari (ossia nei quali $Df = 0$), e dire se essi sono punti di massimo, minimo, sella, o se non è possibile stabilirne il carattere dall'esame dell'Hessiana:

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = x(x+y)e^{x-y}\\
&f(x,y) = \cos x + \cos y + \cos(x+y)\\
&f(x,y) = y^2 - x^3\\
&f(x,y) = \cos(x+y) + \cos(x-y)\\
&f(x,y) = y^2 + x^2 y + x^4\\
&f(x,y) = (x-2)^4 + (x-y)^4\\
&f(x,y) = x^2 + xy^3 + 1\\
&f(x,y) = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\\
&f(x,y) = (x+y)^2 - (x + 5y + xy)\\
&f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}\\
&f(x,y) = xy^2(a-x-y)^2\\
&f(x,y) = (6-x-y)x^2y^3\\
&f(x,y) = (5x+7y-25)\exp\{-(x^2+xy+y^2)\}\\
&f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy.
\end{aligned}$$

2 Stesso esercizio per le funzioni

$$\begin{aligned}
&f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + yz\\
&f(x,y,z) = (x+z)^2 - x(y+3z) + y^3\\
&f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^2 - xy - xz
\end{aligned}$$

3 Dividere un numero $\alpha \geq 0$ in tre parti positive il cui prodotto sia massimo [parti uguali].

4 Trovare la massima area di un triangolo di semiperimetro fissato s [triangolo equilatero].

5 Trovare le coordinate dei punti della parabola $2y - x^2 = 0$ la cui distanza dal punto $(4,1)$ è massima o minima [$(2,2)$].

6 Trovare le coordinate dei punti della circonferenza $(x-6)^2 + (y-1)^2 = 25$ la cui distanza dal punto $(0,7)$ è massima o minima [$(3,-3)$; $(9,5)$].

---

01 Se H è simmetrica e $(Hv,v) > 0$ per tutti i v, allora esiste una costante $c > 0$ tale che $(Hv,v) \geq c|v|^2$ per ogni v. [L'insieme $S = \{|v| = 1\}$ è compatto; la forma ha dunque un minimo su S che deve essere positivo.]

02 Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ continua tale che $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$ (questo vuol dire che per ogni M esiste R tale che se $|x| > R$ allora $f(x) > M$). Dimostrare che f ammette un minimo.

3-7 TEOREMI DELLA FUNZIONE INVERSA E DEL DINI

Il Teorema della funzione inversa è uno dei teoremi fondamentali dell'Analisi. Per dimostrarlo ci serviremo dei due lemmi seguenti.

1. Lemma *(Teorema del valor medio) Sia $g : A \to \mathbf{R}$, A aperto di $\mathbf{R}^n$, di classe C^1, e siano $x, y \in A$ tali che il segmento $[x,y]$ che unisce i punti x, y sia contenuto in A. Allora esiste $\xi \in [x,y]$ tale che*

$$g(x) - g(y) = Dg(\xi)(x-y).$$

DIM. Definiamo la funzione $\phi(t)$ come segue: $\phi(t) = g(x + t(y - x))$ (cioè restringiamo g alla retta che unisce x e y). La funzione ϕ è definita e C^1 su $[0, 1]$, quindi per il Teorema del valor medio

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(s)$$

per qualche $s \in]0, 1[$; ponendo $\xi = x + s(y - x)$ e osservando che $\phi'(t) = Dg(x + t(y - x))(y - x)$, si ha la tesi.

2. Lemma *Se i coefficienti di una matrice A quadrata $n \times n$ sono tutti in modulo minori di ϵ, vale la disuguaglianza $|Av| \le n\epsilon|v|$ per tutti i $v \in \mathbf{R}^n$.*

DIM. Posto $w = Av$, si ha $w_1 = \sum_{j=1}^n a_{1j} v_j$, quindi per la disug. di Schwartz

$$|w_1| \le \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}^2 \right)^{1/2} \cdot |v| \le \sqrt{n}\epsilon|v|.$$

Analogamente per le altre componenti di w. In conclusione

$$|w|^2 = |w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2 \le n \cdot n\epsilon^2|v|^2$$

da cui la tesi.

È ben noto che un'applicazione lineare $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ è invertibile se e solo se il determinante della sua matrice è diverso da 0. Il teorema seguente è l'estensione di questa proprietà ad una funzione regolare qualunque; al posto del determinante di L bisogna studiare il determinante della matrice Jacobiana dell'applicazione.

3. Teorema *(Teorema della funzione inversa, o di invertibilità locale) Sia A un aperto di $\mathbf{R}^n$ contenente x_0, sia $F : A \to \mathbf{R}^n$ una funzione di classe C^1, e supponiamo che*

$$\det DF(x_0) \neq 0.$$

Allora esistono un aperto U con $x_0 \in U \subseteq A$ e un aperto V in $\mathbf{R}^n$ tali che $F : U \to V$ è biunivoca, e F^{-1} è di classe C^1.

DIM. La matrice $L = DF(x_0)$ è invertibile per ipotesi. Se poniamo $\widetilde{F}(x) = L^{-1}F(x)$, la funzione $\widetilde{F}$ verifica le stesse ipotesi di F e in più $D\widetilde{F}(x_0)$ è l'identità. Dato che se la tesi vale per $\widetilde{F}$ vale anche per F, vediamo che basta provare il teorema nel caso $DF(x_0) = I$.

Invertire F vuol dire: fissato y, risolvere l'equazione $F(x) = y$. Essa si può anche scrivere nella forma $x + y - F(x) = x$, e il vantaggio è che se poniamo $G(x) = x + y - F(x)$ ora il nostro problema è diventato: trovare un punto fisso per G. A tale scopo useremo il Teorema delle contrazioni, cioè mostreremo che G è una contrazione su un opportuno spazio metrico completo.

La funzione $G : A \to \mathbf{R}^n$ è di classe C^1, e $DG(x_0) = I - I = 0$ (y è un vettore costante). Quindi dato $\epsilon > 0$, se $r = r(\epsilon)$ è abbastanza piccolo i coefficienti della matrice $DG(x)$ (che sono funzioni continue) sono minori in modulo di ϵ/n per $x \in \overline{B(x_0, r)}$. Prendiamo $x, x' \in \overline{B(x_0, r)}$ qualunque e applichiamo il Teorema del valor medio alla prima componente di G: sarà per un certo $\xi^1 \in B(x_0, r)$

$$G_1(x) - G_1(x') = DG_1(\xi^1)(x - x')$$

e il vettore $DG_1(\xi)$ ha tutte le componenti minori di ϵ/n in modulo. Analogamente per $j = 2, \ldots, n$

$$G_j(x) - G_j(x') = DG_j(\xi^j)(x - x').$$

Chiamando A la matrice di righe $DG_j(\xi^j)$ e applicando il Lemma 2 con $v = x - x'$ abbiamo

$$|G(x) - G(x')| \le \epsilon|x - x'|. \tag{1}$$

Se scegliamo $\epsilon = 1/2$, abbiamo che $G : \overline{B(x_0, r)} \to \mathbf{R}^n$ ($r = r(1/2)$) è una contrazione. Per poter applicare il Teorema delle contrazioni bisogna ora dimostrare che G porta un opportuno spazio metrico completo X in sé. Tale spazio sarà la sfera chiusa $X = \overline{B(x_0, r)} = \{x : d(x_0, x) \leq r\}$; vediamo che $G(X) \subseteq X$ purché il punto y disti da $y_0 = F(x_0)$ meno di $r/2$. Infatti, se $x \in X$,

$$|G(x) - x_0| \leq |G(x) - G(x_0)| + |G(x_0) - x_0| \leq \frac{1}{2}r + |y - F(x_0)| = \frac{1}{2}r + |y - y_0|$$

(dove abbiamo usato la (1) con $\epsilon = 1/2$ e la definizione di G) e quindi se $y \in B(y_0, r/2)$ si ha $G(x) \in X$. Per il Teorema delle contrazioni, otteniamo che esiste un unico punto fisso $x \in X$ per G. Abbiamo quindi dimostrato: per ogni $y \in B(y_0, r/2)$ esiste un unico $x \in \overline{B(x_0, r)}$ con $F(x) = y$. Possiamo prendere $V = B(y_0, r/2)$, e $U = F^{-1}(V)$.

Resta da dimostrare che F^{-1} è di classe C^1. Notiamo che la (1) dà, per ogni $x, x' \in U$,

$$|x - x' - F(x) + F(x')| \leq \frac{1}{2}|x - x'|$$

da cui

$$|x - x'| - |F(x) - F(x')| \leq \frac{1}{2}|x - x'|$$

e infine, per ogni $x, x' \in U$

$$|x - x'| \leq 2|F(x) - F(x')|$$

che si può anche scrivere ($y = F(x)$, $y' = F(x')$): per ogni $y, y' \in V$

$$|F^{-1}(y) - F^{-1}(y')| \leq 2|y - y'| \tag{2}$$

da cui segue che F^{-1} è continua (ed anzi lipschitziana di costante 2).

Fissato ora $x \in U$, mostriamo che F^{-1} è differenziabile in $y = F(x)$ e il suo differenziale è l'inversa di $M = DF(x)$, ossia $D(F^{-1})(y) = (DF(x))^{-1} = M^{-1}$. Anzitutto, M è invertibile: infatti sappiamo che la quantità (vettoriale)

$$\sigma(x' - x) = \frac{F(x') - F(x) - M(x' - x)}{|x' - x|}$$

tende a zero per $x' \to x$; quindi

$$\frac{|M(x' - x)|}{|x' - x|} \geq \frac{|F(x') - F(x)|}{|x' - x|} - |\sigma(x' - x)| \geq \frac{1}{2} - |\sigma(x' - x)|$$

per la disuguaglianza sopra dimostrata, e prendendo $x' = x + tv$ e facendo tendere t a zero otteniamo $|Mv|/|v| \geq 1/2$ per ogni v, quindi M è iniettiva e invertibile. Per la definizione di σ possiamo scrivere

$$M^{-1}[F(x') - F(x)] = x' - x + |x' - x| \cdot M^{-1}\sigma(x' - x)$$

e posto $y' = F(x)$, $y = F(x)$

$$M^{-1}[y' - y] = F^{-1}(y') - F^{-1}(y) + |x' - x| \cdot M^{-1}\sigma(x' - x)$$

da cui

$$\frac{|F^{-1}(y') - F^{-1}(y) - M^{-1}(y' - y)|}{|y' - y|} \leq \frac{|x' - x|}{|y' - y|}|M^{-1}\sigma(x' - x)|.$$

Per concludere basta mostrare che la quantità a secondo membro tende a 0 per $y' \to y$ ($\Leftrightarrow x' \to x$). Ma vediamo che $M^{-1}\sigma(x' - x)$ tende a zero ($\sigma \to 0$, e M^{-1} è lineare quindi continua), mentre per la (2)

$$\frac{|x' - x|}{|y' - y|} \leq 2.$$

Nella precedente dimostrazione si prova che F^{-1} è differenziabile in ogni punto di V, e che $D(F^{-1}) = (DF)^{-1}$, mentre nella tesi si afferma che F^{-1} è C^1. Come si effettua quest'ultimo passaggio della dimostrazione?

Si noti che la formula $D(F^{-1})(F(x_0)) = (DF(x_0))^{-1}$ si può dimostrare facilmente anche derivando l'identità $F \circ F^{-1} = I$ e usando la regola di derivazione per funzioni composte (Teorema 3-5-1). Notare in particolare che se F è C^1 con $\det DF(x_0) = 0$, la funzione F può anche essere invertibile in un intorno di x_0, ma l'inversa F^{-1} sicuramente non è C^1 [altrimenti $DF \cdot D(F^{-1}) = I$, quindi DF sarebbe una matrice invertibile]. Per esempio $f(x) = x^3$ è biunivoca da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ e C^1, $Df(0)$ ossia $f'(0)$ è uguale a 0, e l'inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ non è differenziabile in $x = 0$.

Una funzione che verifichi la tesi del teorema precedente si dice *localmente invertibile* in x_0.

Il Teorema dell'applicazione inversa consente di risolvere il seguente problema: risolvere il sistema

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ F_2(x_1, \dots, x_n) = y_2 \\ \quad \dots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) = y_n \end{cases}$$

ossia calcolare $x_1, \dots, x_n$ in funzione di $y_1, \dots, y_n$. Naturalmente, non si intende dire che sia possibile calcolare esplicitamente i valori di x dati quelli di y; il teorema ci dice solo che, se $\det DF \neq 0$ in un punto, allora per ogni valore di y c'è uno e un solo valore di x che risolve il sistema (vicino al punto considerato).

Nelle applicazioni si incontra spesso un problema simile, che tuttavia non si può ricondurre immediatamente al precedente: si ha un sistema di equazioni

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \quad \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$$

e si vuole sapere se è possibile ricavare le $y_1, \dots, y_m$ in funzione delle $x_1, \dots, x_n$; dato che le equazioni sono m e anche le incognite sono m, questo dovrebbe essere possibile. Nel caso speciale in cui le f_j sono funzioni lineari, la teoria dei sistemi lineari ci dice che il sistema si può risolvere a patto che il minore $m \times m$ formato dalle ultime m colonne del sistema abbia determinante non nullo. Il teorema seguente estende questo risultato al caso di un sistema in cui le funzioni f_j sono funzioni regolari qualsiasi; la matrice da esaminare per sapere se il problema si può risolvere è, come al solito, la matrice Jacobiana di $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Useremo qui la seguente notazione: abbiamo una funzione $f(x, y)$ che dipende dalle variabili $x = (x_1, \dots, x_n)$ e dalle $y = (y_1, \dots, y_m)$; la matrice Jacobiana di f è come al solito Df; con $D_x f$, $D_y f$ si indicano invece le prime n colonne e le ultime m colonne, cioè le matrici delle derivate di f rispetto alle x e rispetto alle y.

4. Teorema *(Teorema del Dini) Sia $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ una funzione, di classe C^1 su un aperto A contenente il punto (x_0, y_0). Supponiamo che $f(x_0, y_0) = 0$ e che*

$$\det D_y f(x_0, y_0) \neq 0.$$

Allora esistono un aperto $U \subseteq \mathbf{R}^n$ contenente x_0 e un aperto $V \subseteq \mathbf{R}^m$ contenente y_0, e una funzione $g : U \to V$ di classe C^1, con la proprietà che per ogni $(x, y) \in U \times V$ si ha

$$f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = g(x).$$

DIM. Semplice conseguenza del Teorema dell'applicazione inversa. Definiamo $F : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ come $F(x,y) = (x, f(x,y))$; si ha

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_x f(x,y) & D_y f(x,y) \end{pmatrix}$$

e quindi $\det DF(x,y) = \det D_y f(x,y)$; in particolare $\det DF(x_0,y_0) \neq 0$. Possiamo allora applicare il Teorema 3 ottenendo che esistono un aperto W contenente $F(x_0,y_0) = (x_0, f(x_0,y_0))$ e un aperto che possiamo prendere della forma $U \times V$, contenente (x_0,y_0), tali che $F : U \times V \to W$ è biunivoca con inversa C^1. Ora, è chiaro che le prime n componenti di $F^{-1}(x,y)$ sono $(x_1,\ldots,x_n)$; quindi F^{-1} è della forma $F^{-1}(x,y) = (x, k(x,y))$ dove $k : W \to V$ è C^1. Si ha inoltre

$$(x,y) \xrightarrow{F^{-1}} (x, k(x,y)) \xrightarrow{F} (x, f(x, k(x,y)))$$

e dato che $F \circ F^{-1}$ è l'identità, si deve avere $f(x, k(x,y)) = y$. Notiamo che $(x_0, 0) \in W$, quindi eventualmente restringendo U abbiamo $(x,0) \in W$ per $x \in U$; allora possiamo porre per $x \in U$ $g(x) = k(x,0)$, e chiaramente $f(x, g(x)) = 0$.

È chiaro che [cambiando nome alle variabili] nel Teorema è irrilevante ricavare le prime m variabili oppure un qualunque gruppo di m variabili rispetto alle altre. Naturalmente in questo caso l'ipotesi dovrà essere: è diverso da 0 il determinante formato dalle m colonne di Df corrispondenti alle variabili da ricavare.

5. Osservazione Usando il Teorema del Dini è facile dare una risposta al problema più generale di ricavare $y_1,\ldots,y_m$ nel sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n; y_1,\ldots,y_m) = z_1 \\ f_2(x_1,\ldots,x_n; y_1,\ldots,y_m) = z_2 \\ \qquad \cdots \\ f_m(x_1,\ldots,x_n; y_1,\ldots,y_m) = z_m \end{cases}$$

o più brevemente $f(x;y) = z$. Scrivendo l'equazione nella forma $F(x,y,z) = 0$ dove $F(x,y,z) = f(x;y) - z$, è chiaro che le soluzioni si possono scrivere nella forma $y = \phi(x,z)$ in un intorno di un punto purché $D_y F \equiv D_y f$ abbia determinante diverso da 0 in quel punto. Chiaramente questa è una generalizzazione della regola di Cramer per i sistemi lineari (se nel sistema precedente f è lineare, il sistema si può risolvere in y non appena il determinante dei coefficienti delle ultime m colonne è diverso da 0).

6. Esempio Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ data da $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Vogliamo risolvere l'equazione $f(x,y) = 0$ rispetto a y. Il Teorema del Dini ci dice che questo è possibile in un intorno di un punto (x_0,y_0) con $f(x_0,y_0) = 0$, se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \equiv 2y_0 \neq 0$. Verifichiamo che cosa vuol dire questo geometricamente. Sappiamo bene che $f(x,y) = 0$ individua i punti della circonferenza di centro l'origine e raggio 1. Vogliamo descrivere questi punti con una relazione del tipo $y = \phi(x)$ (ossia "ricavare y rispetto a x"): ora è chiaro che questo non si può fare vicino ai due punti della circonferenza che hanno ordinata $y_0 = 0$, in quanto vicino a tali punti per ogni valore di x ci sono *due* valori di y che risolvono l'equazione: non si può "ricavare" y. Negli altri punti della circonferenza, invece, se ci restringiamo ad un intorno abbastanza piccolo, questo si può fare (anche esplicitamente: $y = \sqrt{1-x^2}$ per i punti della semicirconferenza superiore e $y = -\sqrt{1-x^2}$ per la semicirconferenza inferiore). Si noti però che $Df(x,y) = (2x, 2y)$

non si annulla mai; anche nei due punti suddetti, in cui $\partial f/\partial y = 0$, si ha pur sempre $\partial f/\partial x \neq 0$; quindi si può applicare Dini all'altra variabile e ricavare x in funzione di y (come è evidente geometricamente).

7. Esempio Più in generale: sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ di classe C^1 che verifica le ipotesi del Teorema del Dini in (x_0, y_0):

$$f(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno U di x_0 e uno V di y_0 tali che per $(x, y) \in U \times V$ i punti in cui $f(x, y) = 0$ si possono scrivere nella forma $y = \phi(x)$, con $\phi : U \to V$ funzione C^1:

$$f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \phi(x).$$

Si usa dire che la funzione ϕ *è definita implicitamente dalla funzione* f, e in effetti non possiamo calcolare ϕ esplicitamente, ma sappiamo solo che essa soddisfa l'identità $f(x, \phi(x)) = 0$. Quanto fa la derivata $\phi'(x)$? Derivando $f(x, \phi(x)) = 0$ rispetto a x si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))\phi'(x) = 0$$

e ricavando $\phi'(x)$ (dato che per ipotesi $\partial f/\partial y$ non si annulla in (x_0, y_0), non si annulla neppure in un intorno di tale punto) si ottiene

$$\phi'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))};$$

notare che questa relazione ci consente di calcolare effettivamente $\phi'(x)$ in un punto (x, y) in cui f si annulla (cioè un punto della forma $(x, \phi(x))$).

Analogamente, se $f(x, y, z)$ è C^1, $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, allora per (x, y) vicino a (x_0, y_0) è definita una funzione $z = \phi(x, y)$ con la proprietà che, per i punti (x, y, z) in un intorno di (x_0, y_0, z_0),

$$f(x, y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \phi(x, y).$$

Vale dunque l'identità $f(x, y, \phi(x, y)) = 0$; derivandola rispetto a x e y si ottiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, \phi(x, y))}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, \phi(x, y))}, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, \phi(x, y))}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, \phi(x, y))};$$

Formule più complesse valgono per funzioni di più variabili definite implicitamente, e si ricavano con lo stesso procedimento.

ESERCIZI

1 Un'applicazione lineare da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$ è continua.

2 $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ lineare invertibile manda aperti in aperti [L^{-1} è continua].

3 Se $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ è lineare, $DL(x_0) = L$ per ogni x_0 [dalla definizione].

4 Sia $y = \phi(x)$ definita implicitamente da $f(x, y) = 0$, dove

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy.$$

Calcolare $\phi'(1)$, osservando che $f(1, 1) = 0$, e dopo aver verificato che le ipotesi del Teorema del Dini sono soddisfatte in tale punto. Analogamente, data $y = \phi(x)$ definita da $f(x, y) = 0$ con

$$f(x, y) = e^{x+y} - x^{10} - e,$$

calcolare $\phi'(0)$ (osservando che $f(0, 1) = 0$).

5 Siano $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ di classe C^1 e supponiamo che si annullino in (x_0, y_0, z_0). Supponiamo che la Jacobiana di F, G rispetto a y, z

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{pmatrix} D_2F & D_3F \\ D_2G & D_3G \end{pmatrix}$$

abbia determinante non nullo nel punto. Allora per il Teorema del Dini sono definite implicitamente due funzioni $y = \phi(x)$, $z = \psi(x)$ equivalenti al sistema $F = 0, G = 0$. Calcolare ϕ', ψ'.

---

01 Vale ancora il Teorema del valor medio per $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$? [No. Basta prendere una curva $\phi : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$ tale che $\phi'(t) \neq 0$ ma $\phi(0) = \phi(1)$, ad esempio $\phi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$].

02 Dimostrare la seguente forma del Teorema del valor medio. Sia $g : A \to \mathbf{R}^m$, A aperto di $\mathbf{R}^n$, $[x, y]$ segmento contenuto in A. Fissiamo $v \in \mathbf{R}^m$. Allora esiste $\xi \in [x, y]$ tale che $v \cdot (f(x) - f(y)) = v \cdot df(\xi)(x - y)$].

03 Sia $B = B(0, 1) \subseteq \mathbf{R}^n$, $f : B \to \mathbf{R}$ tale che $D_v f(x) = 0$ per ogni x in B e per ogni direzione v. Allora f è costante.

04 Siano f, g come nel Teorema 4. Allora vale la relazione

$$Dg(x) = -[D_y f(x, g(x))]^{-1} D_x f(x, g(x)).$$

05 Determinare in quali punti di $\mathbf{R}^2$ sono localmente invertibili le funzioni $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ date da

$$F(x, y) = (x + y, x^2 + y^2), \qquad F(x, y) = (xy, x^2 + y^2)$$

$$F(x, y) = (xe^y, ye^x), \qquad F(x, y) = (x + \cos y, y + \cos x).$$

3-8 CURVE E SUPERFICI

1. Definizione Una *curva* (in *forma parametrica*) in $\mathbf{R}^n$ è un'applicazione continua $\phi \equiv (\phi_1, \ldots, \phi_n) : I \to \mathbf{R}^n$ da un intervallo $I \subseteq \mathbf{R}^n$ a valori in $\mathbf{R}^n$. $\phi_1, \ldots, \phi_n$ si dicono *componenti* della curva, mentre l'immagine di ϕ si dice *sostegno* della curva; spesso il sostegno di ϕ si indica ancora con ϕ. La curva si dice *regolare* se ϕ è C^1 in I e $\phi' \neq 0$ in $\mathring{I}$. Si dice *semplice* se per $t \neq s$, $t, s \in \mathring{I}$, si ha $\phi(t) \neq \phi(s)$. Se $I = [a, b]$, $\phi(a)$ e $\phi(b)$ si dicono *punto iniziale* e *punto finale* della curva (*estremi*), e se coincidono la curva si dice *chiusa*.

2. Esempi

a) La funzione $\phi(t) \equiv (0, 0)$ è continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}^2$, quindi è una curva; ma la sua immagine è il solo punto $(0, 0)$. Se invece imponiamo che ϕ sia regolare, allora otteniamo una curva nel senso intuitivo del termine.

b) $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ data da $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ descrive la circonferenza unitaria con centro nell'origine. Curva regolare, non semplice; diventa regolare, semplice, chiusa se la restringiamo a $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$.

c) $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $\phi(t) = At + B$ con A, B vettori fissati di $\mathbf{R}^n$, rappresenta una retta in forma parametrica in $\mathbf{R}^n$, passante per B e parallela al vettore A. Curva regolare e semplice.

d) $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$, $\phi(t) = (\cos(3t), \sin(3t))$ è chiusa, regolare, non semplice (trifoglio).

e) $\phi : [-1, 1] \to \mathbf{R}^2$, $\phi(t) = (t^2, t^3)$ è C^1, semplice, ma non è regolare (perché?). Per $t = 0$ si ha una *cuspide* (parabola semicubica).

f) $\phi : [-1, 1] \to \mathbf{R}^2$, $\phi(t) = (t^2, t^2)$. Si tratta del segmento che unisce $(0, 0)$ con $(1, 1)$, percorso due volte. Non regolare (perché?), non semplice, chiusa.

g) $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $\phi(t) = (r \cos t, r \sin t, kt)$. Regolare, semplice (elica cilindrica di raggio r e passo k).

h) $\phi : [-1, 1] \to \mathbf{R}^2$, $\phi(t) = (|t|, t)$. Non regolare (perché non è C^1), semplice.

i) $\phi : [-2, 2] \to \mathbf{R}^2$, $\phi(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$, $(t \neq -1)$. C^1, regolare, semplice (attenzione!), detta folium di Cartesio.

j) Si può costruire una curva continua $\phi : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$ la cui immagine è tutto il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ (Peano). Vediamo quindi che è necessaria qualche ipotesi in più per essere sicuri che una curva abbia un aspetto "normale"; l'ipotesi $\phi \in C^1$ serve proprio a questo.

Se $\phi : I \to \mathbf{R}^2$, e una delle componenti è l'identità, allora la curva è il grafico cartesiano di una funzione. Ad esempio se $\phi(t) = (t, \phi_2(t))$, allora (il sostegno di) ϕ è il grafico di $\phi_2 : I \to \mathbf{R}$. In questo caso diremo che la curva è *rappresentata in forma cartesiana*. Ad esempio la funzione $f(x) = x^2$ ha come grafico una parabola; diremo che essa è rappresentata in forma cartesiana come $y = x^2$. In forma parametrica essa è data dalla curva $\phi(t) = (t, t^2)$. Notiamo che una curva C^1in forma cartesiana è sempre semplice e regolare.

Si osservi che due curve possono avere lo stesso sostegno ma essere formalmente diverse: ad es. $\phi : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$ ha lo stesso sostegno di $\psi : [0, 2] \to \mathbf{R}^2$ data da $\psi(t) = \phi(t/2)$.

3. Definizione Dati I, J intervalli di $\mathbf{R}$, un *cambiamento di parametro* è un'applicazione $\tau : I \to J$ di classe C^1, biunivoca, con inversa C^1. Ne segue in particolare che τ' non si annulla mai, quindi o $\tau' > 0$, e allora si dice che τ *conserva il verso*, o $\tau' < 0$ e si dice che *inverte il verso*. Due curve $\phi : I \to \mathbf{R}^n$, $\psi : J \to \mathbf{R}^n$ tali che $\phi(t) = \psi(\tau(t))$ si dicono *equivalenti* se $\tau' > 0$.

4. Esempio Se $\phi : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ è una curva regolare semplice e $t_0 \in]a, b[$, allora per t vicino a t_0 è sempre possibile esprimerla in forma cartesiana. Infatti essendo $\phi'(t_0) \neq 0$ dev'essere ad esempio $\phi_1'(t_0) \neq 0$, quindi $\phi_1'(t) \neq 0$ per t in un intorno $I_\epsilon =]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ di t_0. Ne segue che $\phi_1 : I_\epsilon \to \mathbf{R}$ è invertibile (strettamente crescente o decrescente). Allora $\tau(t) = \phi_1^{-1}(t)$ è un cambiamento di parametro, e la curva ϕ è equivalente alla curva

$$\phi(\tau(t)) = (t, \phi_2(\phi_1^{-1}(t))).$$

Abbiamo cioè rappresentato ϕ in forma cartesiana come $y = \phi_2(\phi_1^{-1}(x))$, in un intorno di t_0. (Se invece $\phi_2'(t_0) \neq 0$, allora potremo rappresentare ϕ nella forma cartesiana $x = g(y) = \phi_1(\phi_2^{-1}(y))$).

5. Esempio Spesso per definire una curva si utilizza la *forma polare*, ossia la curva è descritta in coordinate polari, assegnando per ogni valore dell'angolo θ il corrispondente valore del raggio vettore $\rho(\theta)$. Si tratta sempre di un caso particolare della forma parametrica, in cui si prende come parametro l'angolo θ e si ha $\phi(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$.

Un modo molto comune di definire una curva, oltre alla forma parametrica, che ha come casi particolari le forme cartesiana e polare, è l'espressione in *forma implicita*: ossia come luogo di zeri di una funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Ad esempio se $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, l'equazione $f(x, y) = 0$ descrive chiaramente la circonferenza unitaria di centro l'origine, ossia l'insieme $C = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$.

Ma in generale il luogo di zeri $C = \{f(x, y) = 0\}$ di una funzione non è una curva; ad esempio se f è la funzione nulla allora C è tutto $\mathbf{R}^2$, se $f = x^2 + y^2 + 1$ allora C è l'insieme vuoto, se $f = x^2 + y^2$ allora C è il solo punto $(0, 0)$. Il Teorema del Dini dà una condizione sufficiente perché C sia localmente una curva. Infatti, se f è C^1, $(x_0, y_0) \in C$ ossia $f(x_0, y_0) = 0$, e inoltre $Df(x_0, y_0) \neq 0$, ad esempio $\partial f/\partial y \neq 0$, allora in un intorno di (x_0, y_0) l'insieme $C = \{f = 0\}$ si può rappresentare come $y = \phi(x)$, ossia è una curva in forma cartesiana di classe C^1, quindi in particolare è semplice e regolare (argomento simile se $D_1 f \neq 0$).

In conclusione, data $f(x, y)$ di classe C^1 in un intorno di (x_0, y_0) in cui $f(x_0, y_0) = 0$ ma $Df(x_0, y_0) \neq 0$, diremo che $f = 0$ definisce una *curva in forma implicita* in un intorno di tale punto.

6. Esempio (Minicorso di geometria differenziale delle curve in tre dimensioni). Sia $\phi :]-1, 1[\to \mathbf{R}^3$ una curva regolare di classe C^3. Un parametro privilegiato è la *lunghezza d'arco* $s(t) = \int_0^t |\phi'(\sigma)| d\sigma$; vedremo successivamente che $s(t)$ esprime la lunghezza dell'arco di curva tra $\phi(0)$ e $\phi(t)$. Si ha $s'(t) > 0$, quindi $s(t)$ conserva il verso; ponendo $\widetilde{\phi}(\sigma) = \phi(s^{-1}(\sigma))$ otteniamo una curva equivalente a ϕ con lo stesso verso. Notiamo che da $\widetilde{\phi}(s(t)) = \phi(t)$ segue $\widetilde{\phi}'(s(t)) \cdot s'(t) = \phi'(t)$, e dato che $s'(t) = |\phi'(t)|$ otteniamo $|\widetilde{\phi}'(s(t))| = 1$ cioè $|\widetilde{\phi}'(s)| = 1$. In altri termini se ϕ è parametrizzata secondo la lunghezza d'arco, il modulo di ϕ' è costantemente uguale ad uno. Nel seguito supporremo che ϕ sia una curva C^3 (regolare, semplice) parametrizzata con la lunghezza d'arco.

Derivando $|\phi'(s)|^2 = 1$ si ha $\phi''(s) \cdot \phi'(s) = 0$, ossia i vettori $\phi''(s)$ e $\phi'(s)$ sono ortogonali. Possiamo ora ruotare e traslare gli assi di $\mathbf{R}^3$ (il che non cambia la forma della curva) portando l'origine nel punto $\phi(0)$, l'asse x parallelo a $\phi'(0)$ e l'asse y parallelo a $\phi''(0)$. Abbiamo così $\phi(0) = 0$, $\phi_2'(0) = \phi_3'(0) = \phi_1''(0) = \phi_3''(0) = 0$. Se sviluppiamo le componenti di ϕ in polinomio di Taylor, le prime due al secondo ordine e la terza al terzo ordine, otteniamo

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= \phi_1'(0)s + R_2(s), \\ \phi_2(s) &= \frac{1}{2}\phi_2''(0)s^2 + R_2(s), \\ \phi_3(s) &= \frac{1}{6}\phi_3'''(0)s^3 + R_3(s). \end{aligned}$$

Infine notiamo che $\phi_1'(0) = |\phi'(0)| = 1$, poniamo $\kappa = \phi_2''(0)$ e otteniamo il seguente risultato: in un opportuno sistema di riferimento, e con la scelta del parametro d'arco, una curva regolare semplice C^3 si scrive localmente come

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= s + R_2(s), \\ \phi_2(s) &= \frac{1}{2}\kappa s^2 + R_2(s), \\ \phi_3(s) &= \frac{1}{6}\phi_3'''(0)s^3 + R_3(s). \end{aligned}$$

La quantità $\kappa = \phi_2''(0)$ si dice *curvatura* di ϕ in 0. Se la curvatura è diversa da 0, la quantità $\tau = \phi_3'''(0)/\kappa$ si dice *torsione* di ϕ in 0.

Quanto detto per le curve si generalizza facilmente alle superfici. Una *superficie in forma parametrica* in $\mathbf{R}^n$ è un'applicazione $\phi : A \to \mathbf{R}^n$, A aperto di $\mathbf{R}^\ell$, $\ell < n$. Come nel caso delle curve regolari, dobbiamo imporre delle condizioni su ϕ perché l'immagine di ϕ sia una vera superficie nel senso intuitivo del termine (ad es. se le funzioni $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sono identicamente nulle, l'immagine di ϕ è $\{(0,0)\}$).

7. Definizione Una *superficie regolare* di dimensione ℓ in $\mathbf{R}^n$ ($\ell < n$), in forma parametrica, è un'applicazione $\phi : \overline{A} \to \mathbf{R}^\ell$, A aperto di $\mathbf{R}^\ell$, di classe $C^1(\overline{A})$, tale che la matrice jacobiana $D\phi$ ha rango ℓ in ogni punto di A. [Nota: $C^1(\overline{A})$ vuol dire continua su $\overline{A}$, e con derivate prime su A che si estendono a funzioni continue su $\overline{A}$]. La superficie si dice *semplice* se $\phi : A \to \mathbf{R}^n$ è iniettiva.

Ricordiamo che una matrice ha rango ℓ se esiste un minore quadrato di lato ℓ con determinante non nullo, mentre tutti i minori con dimensione maggiore di ℓ hanno determinante nullo. Nel caso precedente $D\phi$ è una matrice $n \times \ell$, quindi il suo rango è il massimo possibile.

8. Osservazione 1) Una curva regolare $\phi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ è una superficie regolare di dimensione 1.

2) Una superficie in *forma cartesiana* è il grafico di una funzione C^1 $f : \overline{A} \to \mathbf{R}^m$, A aperto di $\mathbf{R}^\ell$. Se poniamo $n = \ell + m$, tale superficie si può vedere come una superficie in forma parametrica $\phi : \overline{A} \to \mathbf{R}^n$ dove

$$\phi(t_1, \ldots, t_\ell) = (t_1, \ldots, t_\ell, f_1(t), \ldots, f_m(t)) \tag{1}$$

ossia $\phi(t) = (t, f(t))$, quindi la forma cartesiana è un caso particolare di quella parametrica. Notiamo che il rango di ϕ è sempre ℓ, perché non può essere maggiore di ℓ e inoltre

$$D\phi = \begin{pmatrix} I \\ Df \end{pmatrix}$$

e il minore $\ell \times \ell$ delle prime ℓ righe ha determinante 1, quindi la superficie è automaticamente una superficie regolare; chiaramente, essa è anche semplice.

9. Definizione Anche una superficie si può descrivere in forma implicita. Diremo che una superficie S in $\mathbf{R}^n$ è espressa *in forma implicita* in un intorno di un suo punto x_0 se esiste una funzione $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, di classe C^1, con $DF(x_0)$ di rango massimo cioè m [$\Rightarrow DF$ ha rango m in un intorno di x_0] e in tale intorno si ha $S = \{x : F(x) = 0\}$.

Notiamo subito che grazie al Teorema del Dini si può sempre passare dalla forma implicita a quella cartesiana: infatti dall'ipotesi segue subito che possiamo spezzare le variabili in due gruppi (y, z) di ℓ e $m = n-\ell$ variabili tali che $D_zF(x_0)$ ha determinante diverso da 0; e quindi esiste una funzione $z = h(y)$ di classe C^1 tale che S si può descrivere come $z = h(y)$ in un intorno di x_0. In particolare, una superficie descritta in forma implicita è sempre regolare semplice, e la dimensione di S è ℓ, ossia $n-$ rango di DF.

10. Osservazione Sia S una superficie regolare semplice di dimensione ℓ descritta in forma parametrica come $\phi : \overline{A} \to \mathbf{R}^n$, $A \subseteq \mathbf{R}^\ell$ aperto, $x_0 = \phi(t_0)$ un suo punto con $t_0 \in A$. Anche in questo caso è possibile esprimere S in un intorno di x_0 in forma cartesiana, ossia si possono spezzare le variabili x in due gruppi y, z di ℓ e $m = n - \ell$ variabili, e costruire una funzione $h : \mathbf{R}^\ell \to \mathbf{R}^m$ di classe C^1 tale che in un intorno di x_0 S è descritta dall'equazione $z = h(y)$. La semplice dimostrazione è identica al caso delle curve: dato che $D\phi(t_0)$ ha rango massimo ℓ, possiamo trovare ℓ righe il cui determinante è diverso da 0, ad esempio le prime ℓ. Scriviamo allora $\psi = (\phi_1, \dots, \phi_\ell)$ e $\chi = (\phi_{\ell+1}, \dots, \psi_n)$ ossia $\phi = (\psi, \chi)$. Allora l'applicazione ψ da $\mathbf{R}^\ell$ in $\mathbf{R}^\ell$ è localmente invertibile per il Teorema dell'applicazione inversa, e se poniamo $h = \chi \circ \psi^{-1}$ vediamo subito che S si può descrivere come $z = h(y)$.

11. Osservazione Nella definizione di superficie in forma parametrica, notiamo che non è essenziale prendere ϕ a valori in $\mathbf{R}^n$; avremmo potuto considerare una qualunque $\phi : A \to S$ definita su un aperto $A \subseteq \mathbf{R}^\ell$ a valori in uno spazio topologico S, che sia un omeomorfismo. In altri termini si può studiare la "superficie" S dimenticando l'esistenza dei "punti circostanti" di $\mathbf{R}^n$; la "dimensione" di S è ancora ℓ, per studiare una funzione $f : S \to \mathbf{R}$ ci si riconduce allo studio della funzione composta $f \circ \phi : A \to \mathbf{R}$, e così via. Quest'idea, opportunamente sviluppata, è alla base del concetto di varietà astratta studiato in Geometria Differenziale. Le superfici da noi considerate sono un caso particolare, quello delle varietà *immerse* in $\mathbf{R}^n$ (ma neanche troppo particolare, infatti un teorema di Milnor afferma che ogni varietà differenziabile di dimensione ℓ si può vedere come una varietà immersa in $\mathbf{R}^{2\ell+1}$).

ESERCIZI

01 Sia C la curva in $\mathbf{R}^3$ intersezione dei cilindri $\{y^2 + z^2 = r^2\}$, $\{x^2 + z^2 = R^2\}$ $(r, R > 0)$. Per quali r, R essa è regolare? [C è definita in forma implicita da $\{F = 0\}$, dove $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ è $F(x, y, z) = (y^2 + z^2 - r^2, x^2 + z^2 - R^2)$. Si ha

$$DF = \begin{pmatrix} 0 & 2y & 2z \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 tranne che in $(0, 0, z)$, $(0, y, 0)$, $(x, 0, 0)$. I punti del secondo e terzo tipo non appartengono a C. I primi appartengono a C solo se $r = R$. Quindi se $r \neq R$, C è una curva regolare. Se $r = R$ i punti

$(0,0,\pm R)$ sono singolari: le curve $(t, \pm t, \pm\sqrt{R^2-t^2})$ sono contenute in C e passano per tutti e due i punti, quindi sicuramente in nessun intorno di tali punti è possibile descrivere C come una curva regolare.]

02 Data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, una *curva di livello* di f è un insieme del tipo $\{f(x,y) = k\}$, per qualche costante k. Dire per quali valori di k sono regolari le curve di livello di $f(x,y) = (x^2-1)^2 + (y^2+1)^2$.

03 Un *toro* in $\mathbf{R}^3$ è la superficie definita in forma implicita da

$$(\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2.$$

Per quali valori di r, R si ha una superficie regolare di dimensione 2?

04 Sia $C \subseteq \mathbf{R}^4$ la superficie in forma implicita

$$C = \{(x,y,u,v) : (x-u)^2 + (y-v)^2 = 1\}.$$

Dire se C è regolare e di che dimensione. Stessa domanda per

$$C = \{(x,y,u,v) : (x-u)^2 + (y-v)^2 = 1, y = 0\}$$

$$C = \{(x,y,u,v) : (x-u)^2 + (y-v)^2 = 1, x^2+y^2 = k^2\}$$

$$C = \{(x,y,u,v) : (x-u)^2 + (y-v)^2 = 1, x^2+y^2 = k^2, v = 0\}.$$

05 Sia S superficie regolare di dimensione ℓ in $\mathbf{R}^n$, descritta in un intorno di un suo punto x_0 in forma implicita o in forma parametrica. Dimostrare che esiste un'applicazione G da un intorno di x_0 a valori in $\mathbf{R}^n$, localmente invertibile, tale che $G(S)$ è il piano coordinato $y_{\ell+1} = \ldots = y_n = 0$. Ossia, cambiando coordinate è possibile *spianare* localmente una superficie regolare.
[Usiamo la notazione $x = (x', x'')$ per indicare che abbiamo spezzato le variabili in due gruppi di ℓ e $m = n - \ell$ variabili. Dopo aver espresso localmente la S in forma cartesiana come $x'' = h(x')$, è sufficiente porre $G(x) = (x', x' - h(x''))$.]

3-9 MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

Affrontiamo ora in generale il problema di calcolare i punti di massimo e minimo di $f : K \to \mathbf{R}$ dove K è un chiuso di $\mathbf{R}^n$. I massimi o minimi interni a K sono da cercare tra i punti stazionari, ossia in cui $Df = 0$, e si studiano con i metodi del paragrafo 3-6. I restanti punti devono essere sulla frontiera ∂K. Molto spesso ∂K è una superficie regolare di dimensione $n-1$, e in tal caso si può proseguire lo studio.

Come si trovano i massimi e i minimi di $f(x)$ se x è vincolato ad una superficie regolare S di dimensione $\ell < n$? Se S è data in forma parametrica, quindi come immagine di una funzione $\phi : \mathbf{R}^\ell \to \mathbf{R}^n$, $\phi = \phi(t_1, \ldots, t_\ell)$, è sufficiente sostituire $\phi(t)$ in f e studiare la funzione di ℓ variabili $f \circ \phi = f(\phi(t_1, \ldots, t_\ell))$ con i metodi di 3-6. In particolare se S è data in forma cartesiana, cioè come grafico di $h : \mathbf{R}^\ell \to \mathbf{R}^m$ $(\ell + m = n)$ la funzione da studiare diventa $f(x_1, \ldots, x_\ell, h_1(x), \ldots, h_m(x)) = \widetilde{f}(x_1, \ldots, x_\ell)$.

Se invece S è data in forma implicita, è necessario introdurre un nuovo metodo, detto dei moltiplicatori di Lagrange. Per descrivere questo metodo, introduciamo alcuni semplici concetti di geometria differenziale.

Sia S una superficie regolare semplice di dimensione ℓ in $\mathbf{R}^n$, descritta in forma parametrica da $\phi : \overline{A} \to \mathbf{R}^n$, A aperto di $\mathbf{R}^\ell$. Consideriamo una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ di classe C^1 che giace in S, precisamente $\gamma \subseteq \phi(A)$ (evitiamo che la curva tocchi il bordo di S). Allora possiamo trovare una curva $\widetilde{\gamma} : [a,b] \to A$, di classe C^1, tale che $\gamma = \phi \circ \widetilde{\gamma}$ [basta osservare che il rango di $D\phi$ è ℓ, quindi esistono ℓ righe con determinante non nullo, ad esempio le prime ℓ, quindi la funzione $\psi = (\phi_1, \ldots, \phi_\ell)$ è localmente invertibile, inoltre se

$x \in S$ si ha $\phi \circ \psi^{-1}(x) = x$; quindi basta scegliere $\widetilde{\gamma} = \psi^{-1} \circ \gamma$]. Possiamo dire che le curve C^1 che giacciono in S sono esattamente quelle della forma $\phi \circ \widetilde{\gamma}$ con $\widetilde{\gamma}$ curva C^1 in A.

1. Definizione Sia S una superficie regolare, $x_0 \in S$. Diremo che v è un *vettore tangente* a S in x_0 se esiste una curva $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to S$ di classe C^1 tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma'(0) = v$. L'insieme T di tutti i vettori tangenti a S in x_0 si chiama *spazio tangente* a S in x_0. Lo *spazio normale* a S in x_0 è lo spazio $T^\perp$, e i suoi elementi sono detti *vettori normali* a S in x_0.

2. Osservazione Si usa il termine *spazio* tangente perché T è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a quella della superficie. Infatti, rappresentiamo S in forma parametrica come $\phi : \overline{A} \to \mathbf{R}^n$, $A \subseteq \mathbf{R}^\ell$ aperto, $D\phi$ di rango ℓ, e sia $x_0 = \phi(t_0)$ un punto di S con $t_0 \in A$. Allora vediamo subito che $T = \operatorname{Img} D\phi(t_0)$, cioè lo spazio tangente è esattamente l'immagine dell'applicazione lineare $D\phi(t_0)$, che ha dimensione ℓ per ipotesi. [Sia $M = \operatorname{Img} D\phi(t_0)$. Se $v \in T$ e γ è la curva corrispondente, questa si scrive come $\phi \circ \widetilde{\gamma}$ quindi $v = \gamma'(0) = D\phi(t_0) \cdot \widetilde{\gamma}'(0)$ e quindi $v \in M$. Se $v \in M$, si ha $v = D\phi(t_0)w$ per un certo vettore w, allora scegliamo come $\widetilde{\gamma}$ la retta passante per t_0 nella direzione w ossia $\widetilde{\gamma}(s) = t_0 + sw$ e poniamo $\gamma = \phi \circ \widetilde{\gamma}$, da cui $\gamma'(0) = v$ ossia $v \in T$].

Quindi se S è una superficie regolare semplice di dimensione ℓ, il suo spazio tangente T in x_0 ha dimensione ℓ mentre lo spazio normale $T^\perp$ ha dimensione $m = n - \ell$.

Vediamo adesso come cambia l'espressione dello spazio tangente se la superficie è espressa in forma implicita.

Richiamiamo qualche semplice nozione di algebra lineare. Sia $A : \mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ lineare di rango m. In questo caso il rango di A è il massimo possibile, quindi A è suriettiva. Il sottospazio $T = \ker A = \{v : Av = 0\}$ ha dimensione ℓ, mentre il sottospazio $T^\perp = \{w : w \cdot v = 0 \quad \forall v \in T\}$ ha dimensione m. Chiaramente T è caratterizzato come segue: se $A = [a_{ij}]$,

$$v \in T \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = 0, \quad i = 1, \dots m. \tag{1}$$

D'altra parte, la (1) si può leggere come segue: dette $A_1, \dots, A_m$ le righe della matrice di A, ossia $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, si ha $A_i \in T^\perp$ per $i = 1, \dots, m$. Poiché A ha rango m, gli $A_1, \dots, A_m$ generano uno spazio di dimensione m, quindi generano tutto $T^\perp$. Allora $T^\perp$ si può caratterizzare come segue: $w \in T^\perp$ se e solo se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ con $w = \sum_{i=1}^m \lambda_i A_i$, ossia

$$w \in T^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m : \quad w_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Supponiamo ora che la superficie (regolare semplice) S di dimensione ℓ sia descritta nell'intorno di un suo punto x_0 in forma implicita dall'equazione $\{F = 0\}$, dove $F : \mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^m \equiv \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ è una funzione di classe C^1 e DF ha rango m. Allora vediamo subito che lo spazio tangente a S in x_0 è esattamente lo spazio $T = \ker DF(x_0)$ [posto $M = \ker DF(x_0)$, M è uno spazio vettoriale di dimensione $\ell = n - m$; inoltre se $v \in T$, detta γ la curva corrispondente, si ha $F(\gamma(s)) = 0$ da cui $DF \cdot \gamma' = 0$ e in particolare $v \in M$; quindi $T \subseteq M$, ma T è uno spazio vettoriale di dimensione $\ell \Rightarrow T = M$].

Pertanto, i vettori tangenti a S in x_0 sono tutti i $v \in \mathbf{R}^n$ tali che $DF_1(x_0) \cdot v = \ldots = DF_m(x_0) \cdot v = 0$, ossia

$$v \in T \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) v_j = 0, \quad i = 1, \ldots m$$

e quelli normali sono tutti i $w \in \mathbf{R}^n$ della forma $w = \lambda_1 DF_1(x_0) + \cdots + \lambda_m DF_m(x_0)$, ossia

$$w \in T^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m : \quad w_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Verificare, per esercizio, le definizioni precedenti nel caso di una curva in $\mathbf{R}^2$ definita in forma implicita $f(x, y) = 0$ (ad esempio scrivere spazio tangente e normale per $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$).

Possiamo finalmente dare una risposta al problema iniziale.

3. Definizione Siano F, S come sopra, e sia $f : U \times V \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^1. Si dice che $x_0 \in S$ è un punto di *massimo* (*minimo*) *per* f *su* S, o *vincolato ad* S, se per ogni $x \in S$ appartenente ad un opportuno intorno di x_0 vale $f(x_0) \geq f(x)$ (risp. $f(x_0) \leq f(x)$). La superficie S è detta anche *vincolo* del problema di massimo.

4. Teorema *(Teorema dei moltiplicatori di Lagrange) Se f ha massimo o minimo su S in x_0, allora $Df(x_0)$ è normale ad S in x_0; ossia esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tali che*

$$Df(x_0) = \lambda_1 DF_1(x_0) + \cdots + \lambda_m DF_m(x_0)$$

(ossia $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) = 0$, $j = 1, \ldots, n$).

DIM. Sia v tangente a S in x_0, e $\gamma :]-\epsilon, +\epsilon[\to S$ la curva corrispondente. Allora $f(\gamma(t))$ ha massimo (minimo) in $t = 0$, quindi

$$0 = Df(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = Df(x_0) \cdot v.$$

Vediamo così che $Df(x_0)$ è ortogonale ad un qualunque vettore tangente v, da cui la tesi.

I numeri λ_j la cui esistenza è dimostrata nel teorema sono per l'appunto i *moltiplicatori di Lagrange.*

5. Osservazione Un modo facile per ricordare il metodo è il seguente: per trovare gli estremi di $f(x)$ vincolati a $\{F(x) = 0\}$, si considera la funzione $G(x, \lambda) = f(x) - \lambda \cdot F(x)$; il teorema precedente si può rienunciare dicendo che se f ha un massimo (minimo) vincolato a S allora $DG = 0$ in tale punto (derivate rispetto a x e λ). Infatti scrivendo $D_x G = 0$ si ottengono le relazioni del teorema, e scrivendo $D_\lambda G = 0$ si riottiene il vincolo $F = 0$.

6. Esempio Cerchiamo massimo e minimo di $f(x, y) = xy$ sulla circonferenza $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$. Poniamo $F = x^2 + y^2 - 1$; si ha $m = 1$ (un solo vincolo) e il sistema da risolvere è $Df = \lambda DF$ ossia

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \\ F = 0 \end{cases}$$

di tre equazioni nelle tre incognite x, y, λ. Quindi

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui le soluzioni

$$\lambda = -\frac{1}{2}, \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

e

$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

I primi sono punti di minimo, i secondi di massimo.

7. Esempio Determinare il parallelepipedo di massimo volume con superficie totale c assegnata. Se $x, y, z \geq 0$ sono i lati, dobbiamo studiare la funzione $V = xyz$ con la condizione $S = 2(xy + yz + xz) = c$; notiamo anche che possiamo supporre $x, y, z \neq 0$ in quanto se un lato si annulla certamente non abbiamo un massimo. Prendiamo $f = xyz$, $F = S - c$ e abbiamo $Df = \lambda DF$ ossia

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial F}{\partial z} \\ F = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} yz = 2\lambda(y + z) \\ xz = 2\lambda(x + z) \\ xy = 2\lambda(x + y) \\ xy + yz + xz = c/2 \end{cases}$$

da cui ($x, y, z \neq 0$)

$$\frac{y + z}{yz} = \frac{x + z}{xz} = \frac{x + y}{xy}$$

e

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

che dà $x = y = z = \sqrt{c}/6$ (cubo).

ESERCIZI

1 Trovare massimi e minimi di $f(x) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{x_j}$ sul sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$

$$A = \{x : x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n,\ x_1 + \cdots + x_n = 1\}.$$

[A è chiuso e limitato, quindi f ha massimo e minimo. Inoltre $0 \leq f \leq 1$ su A essendo $0 \leq x_j \leq 1$, e si ha $f < 1$ tranne che nei punti $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Quindi i punti di massimo sono $e_1, \ldots, e_n$. Troviamo i minimi: basta studiare f sull'insieme

$$A_1 = \{x : x_j > 0,\ j = 1, \ldots, n,\ x_1 + \cdots + x_n = 1\}$$

il quale è una superficie regolare di dimensione $n - 1$. Lagrange $\Rightarrow$

$$\begin{cases} f(x)(1 + \log x_j) = \lambda, & j = 1, \ldots, n \\ x_1 + \cdots + x_n = 1 \end{cases}$$

da cui $x_1 = \ldots = x_n = 1/n$; il minimo si ha in $(1/n, \ldots, 1/n)$.]

2 Dati $a \in \mathbf{R}^n$ e $f(x) = a \cdot x$, determinare il massimo di f sull'insieme $C = \{|x|^2 = 1\} \subseteq \mathbf{R}^n$. Se poi A è una matrice $n \times n$ simmetrica e definita positiva, determinare il massimo di f sull'insieme $C_1 = \{Ax \cdot x = 1\} \subseteq \mathbf{R}^n$.

3 Minimo di $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ su $\{x_1 x_2 \cdots x_n = k\}$, $k \geq 0$ [limitarsi agli $x_j \geq 0$, dove si ha un solo minimo; gli altri minimi si ottengono da questo in modo semplice; quanti sono?] Che si può dire del massimo? Usare il risultato sul minimo per dimostrare la nota disuguaglianza: media aritmetica di n numeri positivi $\geq$ media geometrica.

5 Massimi di $f(x) = (x_1 + \cdots + x_n)^2$ su $\{x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ [ce ne sono 2]. Quanti sono i minimi?

6 Calcolare la distanza di $a \in \mathbf{R}^3$ dal piano di $\mathbf{R}^3$ dato da $b \cdot x + b_0 = 0$.

7 Determinare il punto dell'insieme $\{x : a \cdot x = \alpha, b \cdot x = \beta\}$ più vicino all'origine.

8 Determinare il punto più vicino e quello più lontano dall'origine di $\mathbf{R}^2$ sulla curva data implicitamente da $2x^4 + y^4 - xy = 0$.

9 Trovare il minimo delle seguenti funzioni sugli insiemi indicati a fianco:

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{su} \quad \{x + 2y - 3z = 5\},$$

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + t^2 \quad \text{su} \quad \{x - 3y - z = 1\} \cap \{x + 3y - t = 2\},$$

$$x^2 + y^2 + 2z^2 \quad \text{su} \quad \{x + y = 1\} \cap \{2x + y - z = 2\},$$

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 + t^2 \quad \text{su} \quad \{x - y - t = 4\}.$$

3-10 LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Richiamiamo brevemente le definizioni sulle curve che utilizzeremo in questo paragrafo.

1. Definizione Una *curva* in $\mathbf{R}^n$ è un'applicazione continua $\phi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$. L'insieme $\gamma = \phi([a, b])$ (l'immagine di ϕ) si chiama *sostegno* della curva; $\phi(a), \phi(b)$ sono i suoi *estremi*, il primo si dice *punto iniziale* e il secondo *punto finale*. La curva si dice *chiusa* se punto iniziale e punto finale coincidono.

2. Definizione Data una *suddivisione* di $[a, b]$, cioè un insieme finito di punti $\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ con $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b$, la lunghezza della poligonale inscritta nella curva ϕ di vertici $\phi(t_0)$, …, $\phi(t_m)$ è data da

$$L_\pi(\phi) = \sum_{k=1}^{m} |\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})|.$$

La *lunghezza* della curva ϕ è il numero

$$L(\phi) = \sup\{L_\pi(\phi)\ :\ \pi \text{ suddivisione di } [a,b]\}.$$

Se $L(\phi) < +\infty$, la curva si dice *rettificabile*.

3. Teorema *Una curva $\phi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ di classe C^1 è rettificabile, e si ha*

$$L(\phi) = \int_a^b |\phi'(t)|dt.$$

DIM. Sia $\pi = \{t_0, \ldots, t_m\}$ una qualunque suddivisione di $[a,b]$. Si ha

$$|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})| = \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi'(t)dt \right| \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\phi'(t)|dt$$

da cui sommando per $k = 1, \ldots, m$,

$$L_\pi(\phi) \leq \int_a^b |\phi'(t)|dt.$$

Prendendo il sup al variare di π si ottiene

$$L(\phi) \leq \int_a^b |\phi'(t)|dt.$$

Dimostriamo ora la disuguaglianza inversa. La funzione ϕ' è uniformemente continua, quindi per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|s - t| < \delta$ si ha $|\phi'(s) - \phi'(t)| < \epsilon$. Se prendiamo una suddivisione di $[a,b]$ tale che $|t_k - t_{k-1}| < \delta$ per tutti i k, si ha, per ogni $s \in [t_{k-1}, t_k]$,

$$\begin{aligned}\phi(t_k) - \phi(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi'(t)dt &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\phi'(s) + (\phi'(t) - \phi'(s))]dt \\ &= \phi'(s)(t_k - t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\phi'(t) - \phi'(s))dt.\end{aligned}$$

Ne segue

$$|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})| \geq |\phi'(s)|(t_k - t_{k-1}) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\phi'(t) - \phi'(s)|dt \geq |\phi'(s)|(t_k - t_{k-1}) - \epsilon(t_k - t_{k-1}).$$

Dividiamo per $t_k - t_{k-1}$ e integriamo in s da t_{k-1} a t_k: otteniamo

$$|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})| \geq \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\phi'(s)|ds - \epsilon(t_k - t_{k-1})$$

e sommando su k otteniamo

$$L_\pi(\phi) \geq \int_a^b |\phi'(s)|ds - \epsilon(b-a)$$

da cui anche

$$L(\phi) \geq \int_a^b |\phi'(s)|ds - \epsilon(b-a).$$

Per l'arbitrarietà di ϵ, si ottiene

$$L(\phi) \geq \int_a^b |\phi'(s)|ds.$$

4. Osservazione Notiamo che il teorema vale ovviamente anche per le curve C^1 a tratti, cioè continue e tali che $[a, b]$ si può spezzare in un numero finito di intervalli su ognuno dei quali ϕ è di classe C^1.

5. Esempio Calcoliamo la lunghezza della curva $\phi : [0, 1] \to \mathbf{R}^3$ data da $\phi_1(t) = x(t) = t^2/\sqrt{2}$, $\phi_2(t) = y(t) = t^3/3$, $\phi_3(t) = z(t) = 1 - t$. Si ha

$$L = \int_0^1 \sqrt{2t^2 + t^4 + 1}\, dt = \int_0^1 (1 + t^2) dt = \frac{4}{3}.$$

6. Esempio Se una curva $\phi : [a, b] \to \mathbf{R}^2$ è grafico di una funzione $y = f(x)$, quindi $\phi(t) = (t, f(t))$, si ha

$$L = \int_a^b |\phi'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx.$$

Se una curva è rappresentata in coordinate polari come $\rho = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$, allora scrivendola in forma parametrica $\phi(\theta)$ si ha $\phi_1(\theta) = f(\theta) \cos\theta$, $\phi_2(\theta) = f(\theta) \sin\theta$, quindi

$$L = \int_\alpha^\beta |\phi'(\theta)| d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{|f(\theta)|^2 + |f'(\theta)|^2} d\theta.$$

ESERCIZI

1 Calcolare la lunghezza dei seguenti archi di curva.

1) $9y^2 = 4x^3$, $0 \le x \le 3$ $[14/3]$
2) $y = 2\sqrt{3x}$, $0 \le x \le 1$ $[1 + (3 \log 3)/2]$
3) $y^2 = 2x - x^2$, $0 \le x \le 1$ $[\pi/2]$
4) $y = \log \sin x$, $\pi/3 \le x \le \pi/2$ $[(\log 3)/2]$
5) $y = 1 - \log \cos x$, $0 \le x \le \pi/4$ $[\log(\sqrt{2} + 1)]$
6) arco di catenaria: $\phi(x) = (x, \cosh x)$, $x \in [0, a]$
7) arco di parabola: $\phi(x) = (x, x^2)$, $x \in [0, a]$
8) arco di elica cilindrica $(r > 0, k > 0)$: $\phi(t) = (r \cos t, r \sin t, kt)$, $t \in [0, a]$
9) arco di cicloide $(k > 0)$: $\phi(t) = (k(t - \sin t), k(1 - \cos t))$, $t \in [0, a]$
10) spirale di Archimede $(k > 0)$: $\rho = k\theta$, $\theta \in [0, a]$
11) spirale logaritmica: $\rho = e^{-\theta}$, $\theta \in [\alpha, \beta]$ oppure $\theta \in [0, +\infty[$
12) cardioide $(k > 0)$: $\rho = k(1 + \cos\theta)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

---

01 Una curva in $\mathbf{R}^2$ che sia grafico di una funzione monotona è rettificabile.
[Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ monotona, ad esempio crescente, la curva è $\phi(t) = (t, f(t))$; sia $\pi = \{t_0, \dots, t_m\}$ una suddivisione di $[a, b]$, si ha

$$|\phi(t_k) - \phi(t_{k-1})| = \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + (f(t_k) - f(t_{k-1}))^2} \le t_k - t_{k-1} + f(t_k) - f(t_{k-1})$$

e pertanto

$$L_\pi(\phi) \le b - a + f(b) - f(a) < +\infty.]$$

3-11 1-FORME

In questo paragrafo, Ω è un aperto di $\mathbf{R}^n$. Se $f : \Omega \to \mathbf{R}$ è di classe C^1, abbiamo visto che il differenziale è un'applicazione $df : \Omega \to (\mathbf{R}^n)^*$, che scritta nella base $dx_1, \dots, dx_n$ (che in ogni punto di Ω è la base duale $e_1^*, \dots, e_n^*$), diventa

$$df = D_1 f dx_1 + \cdots + D_n f dx_n.$$

1. Definizione In generale, un'applicazione $\omega : \Omega \to (\mathbf{R}^n)^*$ si dice *1-forma* o *forma differenziale di grado 1*; si può sempre scrivere nella base

$$\omega(x) = \omega_1(x)dx_1 + \cdots + \omega_n(x)dx_n$$

per opportune funzioni $\omega_j(x) : \Omega \to \mathbf{R}$ dette i *coefficienti* della forma. La forma si dice *continua*, $C^k(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$ se lo sono i suoi coefficienti. Nel caso particolare che ω sia proprio il differenziale di una certa funzione C^1 da Ω in $\mathbf{R}$, la forma si dice *esatta* e la funzione si chiama *primitiva* della forma su Ω.

2. Definizione È chiaro che non tutte le 1-forme sono esatte: infatti se $\omega = df$ con $f \in C^2(\Omega)$ allora $\omega_j(x) = D_j f(x)$, quindi per il Teorema di Schwartz $D_i\omega_j = D_iD_jf = D_jD_if = D_j\omega_i$. Introduciamo allora la definizione: una forma $\omega \in C^1(\Omega)$ si dice *chiusa* se $D_i\omega_j = D_j\omega_i$ su Ω per ogni i, j.

Dunque, una forma C^1 esatta è necessariamente anche chiusa per il Teorema di Schwartz. Vale il viceversa? Questa domanda apparentemente semplice è in effetti molto profonda. La risposta dipende dalle proprietà topologiche dell'aperto Ω, cioè su alcuni aperti ogni forma chiusa è esatta, su altri no. Sapere di quanto le forme chiuse sono più delle forme esatte, dà informazioni sulla forma dell'aperto (precisamente, lo spazio quoziente chiuse/esatte ha per dimensione il "numero dei buchi" di Ω). Quindi le 1-forme sono un ponte di collegamento fra l'analisi e la geometria.

3. Esempio Consideriamo la forma

$$\omega(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}dx - \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

di classe C^2 su $\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus 0$. È facile verificare che ω è chiusa $[D_2\omega_1 = D_1\omega_2 = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2]$. Ma ω non è esatta. Infatti, supponiamo per assurdo che $\omega = df$, con $f : \Omega \to \mathbf{R}$ di classe C^1. La funzione $f_1(x, y) = \arctan(y/x)$ è definita sul semipiano $A = \{x > 0\}$, e si verifica subito che $df_1 = \omega$; notare che f_1 esprime su A l'angolo θ del vettore (x, y) col semiasse delle x positive (senso antiorario, in radianti). La funzione $f_2(x, y) = \pi/2 - \arctan(x/y)$ è definita sul semipiano $B = \{y > 0\}$, e si ha $df_2 = \omega$; anche f_2 esprime su B l'angolo θ. La funzione $f_3 = -\pi/2 - \arctan(x/y)$ è definita sul semipiano $C = \{y < 0\}$, e si ha $df_3 = \omega$; anche f_3 esprime su C l'angolo θ. Dunque vediamo che $d(f - \theta) = 0$ su $A \cup B \cup C$ che è connesso [per 3-3-14]; ricordiamo che θ è continua (anzi C^1) su $A \cup B \cup C$ [vedi 3-5-3]. Ma θ salta di 2π quando si taglia il semiasse delle x negative, quindi f non può essere continua su Ω come supposto. Notiamo comunque che su $\mathbf{R}^2$ meno il semiasse delle $x \leq 0$ si ha $d\theta = \omega$, e quindi $d\theta$ si prolunga ad una forma C^1 su $\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus 0$ anche se θ non è definito su tutto Ω.

Per studiare più a fondo il problema, introduciamo il concetto di integrale di una forma lungo una curva.

4. Definizione Ricordiamo che una *curva* in Ω è un'applicazione continua $\gamma : [a, b] \to \Omega$. γ si dice C^1 *a tratti* se $[a, b]$ si spezza in un numero finito di intervalli su ciascuno dei quali γ è C^1. $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ si dicono *estremo iniziale* e *finale* della curva, e se coincidono la curva si dice *chiusa*. Il *sostegno* di γ è la sua immagine $\gamma([a, b])$, spesso indicata ancora con γ. Un *cambiamento di parametro* è un'applicazione $\tau : [a, b] \to [c, d]$ di classe C^1 con $\tau' \neq 0$ (quindi invertibile con inversa C^1). Due curve $\phi : [a, b] \to \Omega$, $\psi : [c, d] \to \Omega$ si dicono *equivalenti* se esiste un cambiamento di parametro $\tau : [a, b] \to [c, d]$ tale che $\phi(t) = \psi(\tau(t))$ con $\tau' > 0$; è chiaro che si tratta di una relazione di equivalenza [verificare!]. Notiamo che curve equivalenti hanno lo stesso sostegno.

Con $-\gamma$ indichiamo la curva $\gamma(-t)$; date due curve $\phi : [a, b] \to \Omega$, $\psi : [c, d] \to \Omega$ tali che $\phi(b) = \psi(c)$, con $\phi + \psi$ indichiamo la curva

$$(\phi + \psi)(t) = \begin{cases} \phi(t) & \text{per } t \in [a, b], \\ \psi(t + c - b) & \text{per } t \in [b, b + d - c]. \end{cases}$$

Con $\phi - \psi$ si indica la curva $\phi + (-\psi)$.

5. Definizione Sia ω una forma continua su Ω, sia $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva C^1. L'*integrale di ω lungo* γ è il numero

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j=1}^n \int_a^b \omega_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)dt.$$

Se γ è C^1 a tratti, si definisce l'integrale spezzando nei tratti in cui γ è C^1, integrando su ciascun tratto e sommando. Nel seguito supporremo *tutte* le curve C^1 a tratti.

6. Proposizione *Sia ω una forma continua su Ω e ϕ, ψ curve C^1 a tratti in Ω. Allora*
(a) Se ϕ e ψ sono equivalenti, $\int_\phi \omega = \int_\psi \omega$.
(b) $\int_{-\phi} \omega = -\int_\phi \omega$.
(c) Se $\omega = df$ è esatta e $\phi : [a, b] \to \Omega$, allora $\int_\phi \omega = f(\phi(b)) - f(\phi(a))$.

DIM. (a): sia $\phi : [a, b] \to \Omega$, $\psi : [c, d] \to \Omega$, $\tau : [a, b] \to [c, d]$ il cambiamento di variabili, e $\phi = \psi \circ \tau$. Allora

$$\int_\phi \omega = \int_a^b \sum \omega_j(\phi(t))\phi_j'(t)dt = \int_a^b \sum \omega_j(\psi(\tau(t)))\psi_j'(\tau(t))\tau'(t)dt = \int_c^d \sum \omega_j(\psi(s))\psi_j'(s)ds = \int_\psi \omega$$

effettuando il cambiamento di variabile $s = \tau(t)$. (b) è ovvia. (c) segue dal fatto che

$$\sum_{j=1}^n \omega_j(\phi(t))\phi_j'(t) = Df(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = \frac{d}{dt}[f(\phi(t))],$$

quindi $\int_\phi \omega = \int_a^b \frac{d}{dt}[f(\phi(t))]dt = f(\phi(b)) - f(\phi(a))$.

Nel seguito cercheremo di individuare una classe di aperti sui quali ogni forma chiusa è anche esatta. A questo scopo abbiamo bisogno di qualche risultato di topologia.

7. Definizione Sia X un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$. Diciamo che $G \subseteq X$ è *aperto in* X se esiste un aperto A di $\mathbf{R}^n$ tale che $G = X \cap A$. Allo stesso modo, diciamo che $K \subseteq X$ è *chiuso in* X se esiste un chiuso C di $\mathbf{R}^n$ tale che $K = X \cap C$. Notare che G è aperto in X se e solo se $X \setminus G$ è chiuso in X. Notare anche che $\emptyset$ e X sono sia aperti sia chiusi in X.

Diremo che X è *connesso* se non si può spezzare in due sottoinsiemi disgiunti non vuoti, entrambi aperti in X. Ciò equivale a dire che esso non si può scrivere come unione di due chiusi in X disgiunti non vuoti; ed equivale a dire anche che gli unici insiemi che sono allo stesso tempo aperti e chiusi in X sono $\emptyset$ e X.

Infine, una *componente connessa* di X è un sottoinsieme di X connesso, non vuoto, che non è contenuto in alcun connesso più grande; due componenti connesse distinte sono disgiunte ed ogni insieme X si scrive come unione disgiunta delle sue componenti connesse.

(Tutte queste definizioni si possono esprimere in forma più semplice e generale nel linguaggio degli spazi topologici: uno spazio topologico si dice *connesso* se non è possibile scriverlo come unione di due aperti disgiunti non vuoti, etc.)

8. Lemma *Se Ω è un aperto connesso di $\mathbf{R}^n$, allora dati due punti qualunque di Ω esiste una curva C^1 a tratti in Ω che li congiunge.*

DIM. Sia $x_0 \in \Omega$, e definiamo A come l'insieme di tutti i punti di Ω che sono congiunti a x_0 da una curva C^1 a tratti in Ω. Per dimostrare che $A = \Omega$, ossia la tesi, basta far vedere che A è sia aperto che chiuso in Ω.

A è aperto: infatti sia $x_1 \in A$, ossia esiste ϕ da x_0 a x_1; essendo Ω aperto esiste $B(x_1, r) \subseteq \Omega$, e preso qualunque $y \in B(x_1, r)$, detto ψ il segmento da x_1 a y chiaramente $\phi + \psi$ congiunge x_0 a y, da cui $y \in A$; in conclusione $B(x_1, r) \subseteq A$.

$\Omega \setminus A$ è aperto: infatti sia $x_1 \in \Omega \setminus A$, dunque x_1 non si può congiungere a x_0; sia $B(x_1, r) \subseteq \Omega$, $y \in B(x_1, r)$; allora neanche y si può congiungere a x_0, perché se esistesse ϕ da x_0 a y, detto ψ il segmento da y a x_1 avremmo che $\phi + \psi$ congiunge x_0 a x_1. In conclusione, $B(x_1, r) \subseteq \Omega \setminus A$.

Vediamo anzitutto un criterio molto semplice per riconoscere le forme esatte.

9. Proposizione *Una forma continua in un aperto è esatta se e solo se il suo integrale su ogni curva chiusa C^1 a tratti è nullo.*

DIM. Se $\omega = df$ è esatta e ϕ è chiusa, allora $\int_\phi \omega = f(\phi(a)) - f(\phi(b)) = 0$.

Viceversa, supponiamo di sapere che $\int_\phi \omega = 0$ per ogni curva chiusa. Supponiamo anzitutto che Ω sia connesso. Fissato $x_0 \in \Omega$, per ogni altro $x \in \Omega$ esiste un curva ϕ C^1 a tratti da x_0 a x [Lemma 10], quindi possiamo porre $f(x) = \int_\phi \omega$. Perché questa definizione abbia senso, dobbiamo verificare che se ψ è un'altra curva da x_0 a x, si ha $\int_\psi \omega = \int_\phi \omega$; ma basta osservare che $\psi - \phi$ è una curva chiusa e applicare la Prop. 6 per avere $0 = \int_{\psi-\phi} \omega = \int_\psi \omega - \int_\phi \omega$.

Resta da verificare che $f(x)$ è una primitiva di ω su Ω, cioè che $D_j f = \omega_j$. Calcoliamo il rapporto incrementale di f in x nella direzione e_j: scegliamo una curva ϕ da x_0 a x, quindi $f(x) = \int_\phi \omega$; sia poi ψ il segmento che unisce x a $x+he_j$, cioè $\psi(t) = x + the_j$, $t \in [0,1]$, quindi $f(x+he_j) = \int_{\phi+\psi}\omega$; allora il rapporto incrementale si scrive [notare che $\psi_i'(t) = 0$ se $i \neq j$, $\psi_j'(t) = h$]

$$\frac{1}{h}[f(x+he_j) - f(x)] = \frac{1}{h}\left[\int_{\phi+\psi}\omega - \int_\phi \omega\right] = \frac{1}{h}\int_\psi \omega = \frac{1}{h}\int_0^1 \omega_j(x+the_j)hdt$$

$$= \int_0^1 \omega_j(x+the_j)dt = \frac{1}{h}\int_0^h \omega_j(x+se_j)ds$$

che tende a $\omega_j(x)$ se $h \to 0$.

Infine, se Ω non è connesso, abbiamo dimostrato che ω ammette una primitiva su ogni componente connessa di Ω; queste funzioni definiscono un funzione C^1 su Ω che è una primitiva di ω su tutto Ω.

10. Esempio Con il criterio precedente è molto più facile verificare che la forma $d\theta$ dell'esempio 3 non è esatta. Ad esempio il suo integrale sulla circonferenza ϕ di centro 0 e raggio 1 non fa 0: parametrizziamola come $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$, ed abbiamo

$$\int_\phi \omega = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = 2\pi.$$

11. Definizione Una curva chiusa $\phi : [a,b] \to \Omega$ si dice *omotopa in* Ω ad un punto $x_0 \in \Omega$ se esiste un'applicazione continua $h : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ tale che

$$h(t,0) = \phi(t), \quad h(t,1) = x_0 \qquad \forall t \in [a,b]$$

$$h(a,s) = h(b,s) \qquad \forall s \in [0,1].$$

Se h è di classe C^k per $s \in]0,1[$, ϕ si dice *omotopa* C^k al punto x_0. Non è difficile dimostrare [ma noi non lo faremo] che se Ω è un aperto di $\mathbf{R}^n$, una curva chiusa è omotopa ad un punto se e solo se è omotopa C^k a quel punto per ogni k.

L'aperto Ω si dice *semplicemente connesso* se ogni curva chiusa in Ω è omotopa ad un punto. Se $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$, è molto facile visualizzare gli aperti semplicemente connessi: sono quelli "senza buchi".

Concludiamo con il teorema fondamentale della teoria delle 1-forme.

12. Teorema *In un aperto semplicemente connesso ogni forma C^1 chiusa è esatta.*

DIM. Dimostriamo che l'integrale di ω su una qualunque curva C^1 a tratti chiusa $\phi : [a,b] \to \Omega$ è nullo, da cui la tesi per la proposizione precedente. Sappiamo che ϕ è omotopa C^2 ad un punto; sia $h(t,s)$ l'omotopia. Chiaramente per ogni $s \in]0,1[$ fissato, $t \mapsto h(t,s)$ è una curva C^2 in Ω, chiusa; poniamo

$$\alpha(s) = \int_a^b \sum_{j=1}^n \omega_j(h(t,s))\partial_t h_j(t,s)dt$$

ossia l'integrale di ω lungo tale curva. Dato che $\alpha(0) = \int_\phi \omega$, $\alpha(1) = 0$ [per $s = 1$ la curva si riduce ad un punto], se mostriamo che $\alpha'(s) = 0$ cioè che α è costante avremo la tesi.

Derivando sotto il segno di integrale [lecito perché l'integrando è C^1] si ha

$$\alpha'(s) = \int_a^b \sum_{j=1}^n \omega_j(h)\partial_s\partial_t h_j dt + \int_a^b \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n D_i\omega_j(h)\partial_s h_i \partial_t h_j dt.$$

Dato che ω è chiusa, possiamo sostituire l'identità $D_i\omega_j = D_j\omega_i$ nel secondo integrale e integrando per parti abbiamo

$$\int_a^b \sum\sum D_j\omega_i(h)\partial_s h_i \partial_t h_j dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n \partial_t \left[\omega_i(h)\right] \partial_s h_i dt = \left[\sum \omega_i(h)\partial_s h_i\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \sum \omega_i(h)\partial_t\partial_s h_i dt$$

da cui

$$\alpha'(s) = \sum_{i=1}^n \omega_i(h(b,s))\partial_s h_i(b,s) - \sum_{i=1}^n \omega_i(h(a,s))\partial_s h_i(a,s).$$

Ora basta ricordare che $h_i(a,s) = h_i(b,s)$ per ogni s e quindi anche $\partial_s h_i(a,s) = \partial_s h_i(b,s)$, da cui $\alpha'(s) = 0$.

13. Osservazione Chiaramente una sfera è semplicemente connessa [una curva chiusa ϕ in $B(x_0, r)$ è omotopa al centro x_0 tramite l'omotopia $h(t,s) = x_0 + (1 - s)(\phi(t) - x_0)$]. Quindi un corollario del teorema precedente è: ogni forma chiusa è *localmente* esatta, vale a dire ammette una primitiva nell'intorno di ogni punto. Il teorema invece afferma che se l'aperto di definizione è semplicemente connesso, esiste un'unica primitiva globale su tutto l'aperto. Il problema evidentemente è "incollare" le diverse primitive nei diversi intorni; notare che se due intorni si hanno intersezione non vuota (e connessa), le due primitive differiscono al più per una costante. Nel punto 3 abbiamo studiato un esempio concreto di questo fenomeno.

14. Esempio Dimostrare che $\omega(x,y) = 2xydx + x^2dy$ su $\mathbf{R}^2$ è esatta e calcolarne una primitiva. Si ha $D_2\omega_1 = 2x = D_1\omega_2$, quindi ω è chiusa; $\mathbf{R}^2$ è stellato, quindi ω è esatta. Una primitiva si può calcolare scegliendo arbitrariamente una curva ϕ da 0 a (x,y) e ponendo $f(x,y) = \int_\phi \omega$; ma c'è un modo più semplice. Infatti dev'essere $D_1 f = \omega_1 = 2xy$, quindi $f(x,y) = x^2y + g(y)$ con g da determinare; ma $D_2 f = \omega_2$, quindi $x^2 + g'(y) = x^2 \Rightarrow g' = 0 \Rightarrow g$ è costante. Possiamo così prendere $f(x,y) = x^2y$ o più in generale $f(x,y) = x^2y + C$ (la primitiva è sempre determinata a meno di una costante).

ESERCIZI

1 Calcolare $\int_\phi \omega$, dove

$$\begin{array}{lll}
\omega(x,y) = x^2y\,dx + (x-y)dy, & \phi(t) = (\cos t, \sin t), & t \in [0, 2\pi] \\
\omega(x,y) = xy\,dx + ye^x dy, & \phi(t) = (t, t^2), & t \in [0,1] \\
\omega(x,y) = y\,dx + \log x\,dy, & \phi(t) = (t, \sqrt{1+t}), & t \in [1,2] \\
\omega(x,y) = d(xy^2), & \phi(t) = (t^3, t^4), & t \in [0,1] \\
\omega(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy, & \phi(t) = (\cos t, \sin t), & t \in [0, 2\pi].
\end{array}$$

2 Determinare quali delle seguenti forme sono chiuse e quali esatte sugli aperti indicati a fianco, e calcolare (se possibile) una primitiva.

$$\begin{array}{ll}
\omega = (x+1)dx + (y+2)dy, & \Omega = \mathbf{R}^2 \\
\omega = (y+1)dx + (x+2)dy, & \Omega = \mathbf{R}^2 \\
\omega = x\,dx - y\,dy, & \Omega = \mathbf{R}^2 \\
\omega = y\,dx - x\,dy, & \Omega = \mathbf{R}^2 \\
\omega = \dfrac{2x}{2x^2+y^2}dx + \dfrac{y}{2x^2+y^2}dy, & \Omega = \mathbf{R}^2 \setminus 0 \\
\omega = \dfrac{2y}{x^2+2y^2}dx - \dfrac{x}{x^2+2y^2}dy, & \Omega = \mathbf{R}^2 \setminus 0 \\
\omega = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz, & \Omega = \mathbf{R}^3
\end{array}$$

$$\omega = (3y-1)dx + (3x+1)dy + 3z\,dz, \qquad \Omega = \mathbf{R}^3$$
$$\omega = \frac{2xy}{(1+x^2)^2}dx - \frac{1}{1+x^2}dy, \qquad \Omega = \mathbf{R}^2.$$

3 Trovare per quali valori di $a \in \mathbf{R}$ la forma su $\mathbf{R}^2$

$$\omega(x,y) = -\frac{2xy}{1+y^2+2x^2+x^4}dx + \frac{a+x^2}{1+y^2+2x^2+x^4}dy$$

è chiusa ed esatta, e calcolarne una primitiva [$a = 1$, $f = \arctan(y/(1+x^2))$; per calcolare f procedere come nell'esempio 14].

---

01 Sia Ω aperto connesso, ω una forma esatta su Ω, e siano f, g due primitiva di ω. Allora $f - g$ è costante. Che succede se Ω non è connesso?

02 Sia ω una forma su $\mathbf{R}^2$ del tipo $\omega(x,y) = \alpha(y)dx + \beta(x)dy$, con α, β di classe C^1. Determinare per quali funzioni α, β la forma è chiusa, per quali è esatta, e calcolarne una primitiva.

03 Stessa domanda per $\omega(x,y) = y\alpha(x)dx + x\beta(y)dy$.

04 Stessa domanda per la forma su $\mathbf{R}^3$ $\omega(x,y,z) = ydx + xdy + \alpha(x,y,z)dz$.

05 Stessa domanda per la forma $\omega(x,y,z) = xzdx + 2yzdy + \alpha(x,y)dz$.

06 Sia $\Omega = \{(x,y) : x + y \neq 0\}$, e sia

$$\omega = \frac{y}{(x+y)^2}dx - \frac{x}{(x+y)^2}dy.$$

Determinare se essa è chiusa, esatta, e in caso affermativo calcolarne *tutte* le primitive [si; si; una primitiva è $f = -y/(x+y)$; le altre si ottengono...]

07 *(Microcorso di variabile complessa).*

(i) Sia Lz un'applicazione lineare (su $\mathbf{C}$) da $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}$, quindi $Lz = \alpha \cdot z$ per un fissato $\alpha \in \mathbf{C}$. Allora essa può essere vista come un'applicazione lineare da R^2 in R^2 rappresentata da una matrice 2×2. Che forma ha tale matrice, e come si scrive nei termini di α?
[Se $\alpha = a + ib$, $z = x + iy$, si ha

$$\alpha \cdot z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.]$$

(ii) Sia A un aperto di $\mathbf{C}$ e $f : A \to \mathbf{C}$. f si dice *derivabile in senso complesso* in $z_0 \in A$ se esiste il limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

detto *derivata* (in senso complesso) di f in z_0. Se f è derivabile in senso complesso in tutti i punti di A, si dice che essa è *olomorfa* in A. Possiamo considerare f come una funzione da A aperto di $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$; dimostrare che si ha $f'(z_0) = D_1 f(z_0) = \frac{1}{i} D_2 f(z_0)$. Ponendo $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, questa relazione equivale alle due relazioni $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, dette *equazioni di Cauchy-Riemann.*
[Basta fare il limite del rapporto incrementale complesso scegliendo $z = x + iy_0 \to z_0$ oppure $z = x_0 + iy \to z_0$; i due limiti ovviamente devono coincidere]

(iii) Se f è derivabile in senso complesso in z_0 allora f è differenziabile in z_0, e $df(z_0) \cdot h = f'(z_0) \cdot h$, ossia l'applicazione lineare $df(z_0)$ coincide con la moltiplicazione per il numero complesso $f'(z_0)$. Viceversa, se f è differenziabile in z_0 e si ha $D_2 f(z_0) = iD_1 f(z_0)$, allora f è derivabile in senso complesso in z_0.
[Dalla definizione

$$\frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0) \cdot (z - z_0)}{|z - z_0|} = \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right) \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \to 0.]$$

(iv) Somma, prodotto e quoziente di funzioni olomorfe sono funzioni olomorfe. $f(z) = z$ è olomorfa, $f(z) = \overline{z}$ non lo è.

(v) Si possono definire le 1-forme a valori complessi su $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ semplicemente considerando le $\omega = \omega_1(z)dx + \omega_2(z)dy$ con ω_j a valori complessi. Le nozioni e i risultati relativi alle 1-forme si possono estendere senza difficoltà alle forme complesse; in particolare l'integrale è definito come l'integrale della parte reale di ω più i volte l'integrale della parte complessa. Usando le notazioni $dz = dx + idy$, $d\overline{z} = dx - idy$, mostrare che ogni forma si scrive come $\omega = \alpha(z)dz + \beta(z)d\overline{z}$. Dimostrare che la forma $\omega = f(z)dz$ di classe C^1 è chiusa se e solo se $f(z)$ è olomorfa.

(vi) Data $f : \Omega \to \mathbf{C}$, e γ curva C^1 a tratti in Ω, l'integrale di f su γ è definito come l'integrale su γ della forma $\omega = f(z)dz$; si usa la notazione $\int_\gamma f(z)dz$. Dimostrare il Teorema Integrale di Cauchy: se l'integrale di $f(z)$ su ogni curva chiusa in Ω è nullo, allora f è olomorfa in Ω. Inoltre se Ω è semplicemente connesso, vale anche il viceversa.

(vii) Dimostrare che $\int_{\gamma_R} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ se $\gamma_R(t) = Re^{2\pi i t}$, $0 \le t \le 2\pi$ (circonferenza di raggio R).

(viii) Dimostrare che se $f(z)$ è C^1

$$\lim_{R\to 0} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i\, f(0).$$

[Usare Taylor: $f(z) = f(0) + R_1(z)$ con $|R_1(z)| \le |z| \cdot \sup_{|z|\le\epsilon} |Df(z) - Df(0)|$ per $|z| \le \epsilon$.]

(ix) Dimostrare che $\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z} dz$ non dipende dal raggio R e dedurne la *formula di Cauchy*

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z} dz.$$