Sia, per Ω aperto limitato in $I\!R^N$, $\rho > 0$ e $0 < \theta < 1$, u_ρ la soluzione di

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} -\triangle u_\rho = \rho\, u_\rho^\theta, & \text{in } \Omega; \\ u_\rho = 0, & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

1a) Dimostrare che u_ρ è in $L^\infty(\Omega)$.

1b) Calcolare il limite per ρ tendente ad infinito della norma u_ρ in $L^\infty(\Omega)$.

1c) Se $\rho(x)$ è in $L^\infty(\Omega)$, e v risolve

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} -\triangle v = \rho\, v^\theta, & \text{in } \Omega; \\ v = 0, & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

dimostrare che $v \leq u_{\|\rho\|_{L^\infty(\Omega)}}$ (si ricordi che la soluzione è unica).

1d) Data $\rho \in L^1(\Omega) \setminus L^\infty(\Omega)$, dette $\rho_n = T_n(\rho)$ e v_n la soluzione di

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} -\triangle v_n = \rho_n\, v_n^\theta, & \text{in } \Omega; \\ v_n = 0, & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

determinare una condizione sufficiente su $\alpha > 0$ affinchè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx = 0.$$

Siano Ω aperto limitato in $I\!R^N$ e $1 < p < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$.

2a) Dimostrare che esiste $M > 0$ tale che se la norma di f in $L^\infty(\Omega)$ è minore di M, allora esiste una soluzione limitata di

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} -\triangle u = u^p + f, & \text{in } \Omega; \\ u = 0, & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

2b) Sia $\lambda > 0$. Dimostrare che esiste $\mu_1 > 0$ tale che se $\lambda > \mu_1$, allora non esiste la soluzione di

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} -\triangle u = u^p + \lambda, & \text{in } \Omega; \\ u = 0, & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dimostrare successivamente che esiste $\mu_2 > 0$ tale che (5) ha almeno una soluzione (limitata) per $\lambda < \mu_2$.

2c) Detto
$$\Lambda = \sup\{\lambda > 0 : \text{ esiste soluzione di (5)}\}$$
dimostrare che per ogni λ in $(0, \Lambda)$ esiste una soluzione minimale u_λ di (5).

2d) Dimostrare che se $\lambda < \mu$, allora $u_\lambda \leq u_\mu$.