Capitolo 5

Equazioni sub-lineari con dati regolari ed irregolari

In questo capitolo, ci proponiamo di affrontare un problema omogeneo differente dal problema agli autovalori; il nostro scopo, sarà quello di risolvere:

$$\begin{cases} L(u) \;=\; \rho(x)f(u) & \text{in } \Omega \\ \quad u > 0 & \text{in } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{su } \Gamma \;=\; \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

dove:

I) $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, $N \geq 3$, è un aperto limitato;

II) $L(u) = -\text{div}(A(x)\nabla u)$, con $A(x) = (a_{i,j}(x))_{i,j=1,..,N}$, $a_{i,j} : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, sono funzioni limitate come nei capitoli precedenti, $A(x)$ è ancora simmetrica ed esistono $\alpha, \Lambda \in \mathbf{R}^+$ per cui si ha

$$\alpha|\xi|^2 \leq A(x)\xi \cdot \xi \leq \Lambda|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^N.$$

Per quanto riguarda le ipotesi su f e su ρ, vedremo in seguito come assegnarle; al momento, possiamo dire soltanto che:

III) $\rho : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, è una funzione misurabile;

IV) $f : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+$, f è continua, crescente e tale che $f(0) = 0$.

Il metodo che sfrutteremo per studiare equazioni di questo tipo è il cosiddetto metodo di soprasoluzioni e sottosoluzioni, ma per poterlo usare ci servono alcune definizioni ed alcuni risultati preliminari.

5.1 Definizioni e risultati preliminari

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} L(u) = g(x,u) & \text{in } \Omega \\ \quad u \;=\; 0 & \text{su } \Gamma \;=\; \partial\Omega\ , \end{cases} \tag{5.2}$$

supponendo che

i) $g : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^+$ sia misurabile rispetto alla prima variabile e continua rispetto alla seconda, inoltre $g(x,0) = 0$ qualsiasi sia $x \in \Omega$.

Definizione 5.1.1. *Diremo che* $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ *è una* **sottosoluzione** *del problema* (5.2)*, se:*

$$\begin{cases} L(\underline{u}) \leq g(x,\underline{u}) & \textit{in } \Omega \\ \quad \underline{u} \leq\; 0 & \textit{su } \Gamma \;=\; \partial\Omega \end{cases} \tag{5.3}$$

e cioè se:

$$\begin{cases} g(x,\underline{u}) \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) \\ \\ \int_\Omega A(x)\nabla\underline{u}\nabla\varphi dx \leq \int_\Omega g(x,\underline{u})\varphi dx \quad \forall\varphi \in\; H_0^1(\Omega),\; \varphi \geq 0. \end{cases}$$

Definizione 5.1.2. *Diremo che* $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ *è una* **soprasoluzione** *del problema* (5.2)*, se:*

$$\begin{cases} L(\overline{u}) \geq g(x,\overline{u}) & \textit{in } \Omega \\ \quad \overline{u} \geq\; 0 & \textit{su } \Gamma \;=\; \partial\Omega \end{cases} \tag{5.4}$$

e cioè se:

$$\begin{cases} g(x,\overline{u}) \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) \\ \\ \int_\Omega A(x)\nabla\overline{u}\nabla\varphi dx \geq \int_\Omega g(x,\overline{u})\varphi dx \quad \forall\varphi \in\; H_0^1(\Omega),\; \varphi \geq 0. \end{cases}$$

Iniziamo con l'enunciare e dimostrare i seguenti Lemmi.

Lemma 5.1.3. *Sia w una soprasoluzione del problema* (5.2)*, con* $g(x,s) \equiv 0$*, allora* $w \geq 0$ *q.o. in* Ω*.*

Dimostrazione. Dal momento che w è soprasoluzione del problema (5.2), possiamo considerare come funzione test nella formulazione variazionale del problema (5.4), $\varphi = w^-$

$$\int_\Omega A(x)\nabla(w^+ - w^-)\nabla w^- dx \geq 0$$

quindi

$$-\int_\Omega A(x)\nabla w^- \nabla w^- dx \geq 0$$

grazie all'ipotesi II), si ha

$$-\lambda \int_\Omega |\nabla w^-|^2 dx \geq 0$$

e cioè

$$\|w^-\|_{1,0}{}^2 \leq 0$$

pertanto $w^- = 0$ q.o., ovvero $w \geq 0$ q.o..

□

Con dimostrazione identica alla precedente, scegliendo però w^+ come funzione test, si vede che

Lemma 5.1.4. *Sia w una sottosoluzione del problema* (5.2)*, con $g(x,s) \equiv 0$, allora $w \leq 0$ q.o. in Ω.*

□

Un Teorema di fondamentale importanza è il seguente

Teorema 5.1.5. *Consideriamo il problema* (5.2)*, supponendo che siano valide le ipotesi $I), II), i)$. Supponiamo inoltre che esistano $\underline{u}, \overline{u}$, sottosoluzione e soprasoluzione del problema* (5.2)*, tali che*

a) $\underline{u} \leq \overline{u}$;

b) $g(x,t)$ è crescente in t qualsiasi sia $x \in \Omega$ fissata.

Allora esiste u soluzione del problema (5.2)*, ed u soddisfa:*

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \text{ q.o.in } \Omega.$$

Dimostrazione. Rinominiamo $u_0 = \underline{u}$, e sia u_1 l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} L(u_1) = g(x, u_0) & \text{in } \Omega \\ u_1 = 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \tag{5.5}$$

(siamo sicuri sia dell'esistenza che dell'unicità della soluzione u_1 grazie al fatto che, essendo u_0 una sottosoluzione del problema (5.2), $g(x,u_0) \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$). Per ipotesi u_0 soddisfa il problema (5.3), quindi sottraendo membro a membro (5.3) da (5.5), si ha

$$\begin{cases} L(u_1 - u_0) \leq 0 & \text{in } \Omega \\ u_1 - u_0 \leq 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

Il Lemma 5.1.3 ci garantisce che $u_1 - u_0 \geq 0$ q.o..
Definiamo ricorsivamente, la successione di funzioni $\{u_n\}$:

$$\begin{cases} u_0 = \underline{u} \\ \\ u_n \text{ risolve } \begin{cases} L(u_n) = g(x, u_{n-1}) & \text{in } \Omega \\ u_n = 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega; \end{cases} \end{cases}$$

possiamo dimostrare che u_n è monotona crescente, sfruttando un argomento induttivo; $u_0 \leq u_1$ perché lo si è dimostrato pocanzi, supponiamo ora (ipotesi induttiva) che $u_{n-1} \leq u_n$ e dimostriamo che $u_n \leq u_{n+1}$:

$$\begin{cases} L(u_n - u_{n+1}) = g(x, u_{n-1}) - g(x, u_n) & \text{in } \Omega \\ u_n - u_{n+1} = 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

Grazie all'ipotesi induttiva, ed al fatto che $g(x,t)$ è crescente nella seconda variabile (fissato $x \in \Omega$), si ha:

$$\begin{cases} L(u_n - u_{n+1}) \leq 0 & \text{in } \Omega \\ u_n - u_{n+1} = 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega; \end{cases}$$

quindi il Lemma 5.1.4, ci assicura che $u_n \leq u_{n+1}$ q.o..Inoltre si ha $u_n \leq \overline{u}$ q.o. qualsiasi sia $n \in \mathbf{N}$ e per farlo vedere si userà ancora il principio di induzione; per ipotesi $u_0 \leq \overline{u}$, supponiamo che $u_n \leq \overline{u}$ (ipotesi induttiva) e dimostriamo che $u_{n+1} \leq \overline{u}$:

$$\begin{cases} L(u_{n+1} - \overline{u}) \leq g(x, u_n) - g(x, \overline{u}) & \text{in } \Omega \\ u_{n+1} - \overline{u} \leq 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega; \end{cases}$$

grazie ancora all'ipotesi induttiva ed alle proprietà di g, si ha:

$$\begin{cases} L(u_{n+1} - \overline{u}) \leq 0 & \text{in } \Omega \\ u_{n+1} - \overline{u} \leq 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega; \end{cases}$$

il Lemma 5.1.4, ci assicura che $u_{n+1} \leq \overline{u}$. Pertanto, per quasi ogni x in Ω, $u_n(x)$ è monotona crescente e limitata, come successione numerica, dunque esiste $u(x)$ tale che $u_n(x)$ converge ad $u(x)$ q.o. in Ω. Facciamo ora vedere che u_n converge debolmente ad u in $H_0^1(\Omega)$, mostrando semplicemente che u_n è limitata in $H_0^1(\Omega)$:

$$\|u_n\|_{1,0}^2 \leq \frac{1}{\alpha}\left(\int_\Omega g(x, u_{n-1}) u_n dx\right)$$

allora, usando la disuguaglianza di Hölder, la monotonia di g, il fatto che $u_n \leq \overline{u}\ \forall n \in \mathbf{N}$ e che $|g(x,\overline{u})|, |g(x,\underline{u})| \in L^{(2)*'}(\Omega)$ per ipotesi, si ha

$$\|u_n\|_{1,0}^2 \leq \frac{1}{\alpha}\| \max\{|g(x,\overline{u})|, |g(x,\underline{u})|\}\|_{(2^*)'} \|u_n\|_{2^*};$$

quindi, sfruttando la disuguaglianza di Sobolev, si ottiene

$$\|u_n\|_{1,0}^2 \leq \frac{1}{\alpha S} \| \max\{|g(x,\overline{u})|, |g(x,\underline{u})|\}\|_{(2^*)'} \|u_n\|_{1,0}$$

con S costante di Sobolev. Dividendo ambo i membri della precedente relazione, per $\|u_n\|_{1,0}$, si perviene a

$$\|u_n\|_{1,0} \leq \frac{1}{\alpha S} \| \max\{|g(x,\overline{u})|, |g(x,\underline{u})|\}\|_{(2^*)'},$$

dunque, essendo limitata e convergendo ad u q.o., u_n converge ad u debolmente in $H_0^1(\Omega)$, allora:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega A(x)\nabla u_n \nabla\varphi dx = \int_\Omega A(x)\nabla u \nabla \varphi dx \qquad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Inoltre:

- $g(x,u_{n-1}) \longrightarrow g(x,u)$ per q.o. $x \in \Omega$ (essendo g continua nella seconda variabile);
- $|g(x,u_{n-1})| \leq \max\{|g(x,\overline{u})|, |g(x,\underline{u})|\} \in L^{(2^*)'}(\Omega)$.

Quindi $g(x,u_{n-1})$ converge a $g(x,u)$ in $L^{(2^*)'}(\Omega)$, pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g(x,u_{n-1})\varphi dx\varphi = \int_\Omega g(x,u)\varphi dx \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Allora u è soluzione del problema (5.2) e per costruzione, è compresa tra $\underline{u}$ ed $\overline{u}$ come richiesto nell'enunciato.

□

Esempio Un semplice esempio di applicazione di questo Teorema, si ha considerando: $\theta \in [0,1)$ fissato, $g(x,t) = t^\theta$, $t \in \mathbf{R}$, e di conseguenza il problema

$$\begin{cases} L(u) = u^\theta & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega; \end{cases} \tag{5.6}$$

scegliendo $u > 0$, stiamo escludendo di poter scegliere $u = 0$ come sottosoluzione.

Consideriamo $\underline{u} = \varepsilon\, \varphi_1$, e cerchiamo ε tale che $\underline{u}$ sia una sottosoluzione del problema (5.6), imponendo:

$$\lambda_1 \varepsilon\, \varphi_1 \leq (\varepsilon\, \varphi_1)^\theta,$$

così facendo, $\underline{u}$ è sottosoluzione, non appena si scelga $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ dove $\varepsilon_0 = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \frac{1}{M}$ con $M = \|\, \varphi_1\|_\infty$.

Per determinare $\overline{u}$, invece, consideriamo il problema

$$\begin{cases} L(\overline{u}) = T & \text{in } \Omega \\ \overline{u} = 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega; \end{cases}$$

e ricerchiamo T in modo che:

- $\overline{u}$ sia una soprasoluzione per il problema (5.6);
- $\underline{u} \leq \overline{u}$.

Perché $\overline{u}$ sia una soprasoluzione, è sufficiente che

$$T \geq (\overline{u})^{\theta}$$

il Teorema di Stampacchia, cioè il Teorema 2.1.4 del Capitolo 2, ci garantisce poi che esiste $c \in \mathbf{R}^{+}$ tale che

$$\|\overline{u}\|_{\infty} \leq cT.$$

Dunque, perché $\overline{u}$ sia una soprasoluzione, ci basta che $T \geq T_0$, dove $T_0 = c^{\frac{\theta}{1-\theta}}$. Tuttavia, per poter applicare il Teorema 5.1.5, ci serve che $\underline{u} \leq \overline{u}$, e perché questo avvenga, è sufficiente scegliere $\overline{T} = \max\{T_0, T_1\}$ con $T_1 = \lambda_1 \varepsilon_0 M$ ed M è ancora $M = \| \varphi_1 \|_{\infty}$. Per quanto riguarda poi la sommabilità di $(\underline{u})^{\theta}$ ed $(\overline{u})^{\theta}$, si ha che per costruzione $\underline{u}$, $\overline{u} \in \ L^{\infty}(\Omega)$ e così anche $(\underline{u})^{\theta}$ ed $(\overline{u})^{\theta}$; pertanto il Teorema 5.1.5 ci assicura che esiste u soluzione del problema (5.6), con $\underline{u} \leq u\overline{u}$, quindi $u \in \ L^{\infty}(\Omega)$.
A questo punto, è legittimo porsi due domande:

- una soluzione che sia stata ottenuta per iterazioni monotone dal Teorema 5.1.5 è unica?
- E' possibile risolvere problemi "super-lineari" sfruttando il metodo fino ad ora descritto, dal momento che a g si richiede soltanto di essere monotona?

La risposta è negativa in tutti e due i casi; se infatti si definisce ricorsivamente $\{v_n\}$ come

$$\begin{cases} v_0 = \overline{u} \\ \\ v_n \text{ risolve } \begin{cases} L(v_n) = g(x, v_{n-1}) & \text{in } \Omega \\ \quad v_n = 0 & \text{su } \Gamma \ = \ \partial\Omega, \end{cases} \end{cases}$$

allora con gli stessi metodi usati nella dimostrazione del Teorema 5.1.5, si può far vedere che

- $v_n(x)$ è, per q.o. x in Ω, una successione monotona decrescente;
- $v_n(x)$ è, per q.o. x in Ω, incastrata tra $\underline{u}$ ed $\overline{u}$, quindi esiste v in $H_0^1(\Omega)$ tale che v_n converge debolmente a v in $H_0^1(\Omega)$, $\underline{u} \leq v \leq \overline{u}$, v risolve il problema (5.2) ed $u \leq v$, dove u è la soluzione ottenuta mediante il Teorema.

Per quanto concerne la seconda domanda, la risposta è espressa dal fatto che una soprasoluzione e sottosoluzione di un problema super-lineare, non sono ordinate come richiede il Teorema 5.1.5, e quindi non si riesce ad ottenere un limite q.o. per le eventuali successioni $\{u_n\}$, $\{v_n\}$.
Ancora in merito alla prima domanda, possiamo tuttavia dimostrare la seguente:

Proposizione 5.1.6. *Siano u_1, u_2 due soluzioni del problema* (5.2)*, con $0 < u_1 < u_2$, e sia $g : \Omega \times \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+$ tale che $\frac{g(x,t)}{t}$ è decrescente (nella variabile t) per q.o. $x \in \Omega$.*
Allora $u_1 = u_2$ q.o..

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\int_\Omega A(x)\nabla u_1 \nabla \varphi dx = \int_\Omega g(x, u_1)\varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{5.7}$$

e

$$\int_\Omega A(x)\nabla u_2 \nabla \varphi dx = \int_\Omega g(x, u_2)\varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{5.8}$$

posta $\varphi = u_2$ nella relazione (5.7) e $\varphi = u_1$ nella relazione (5.8) si hanno le due relazioni:

$$\int_\Omega A(x)\nabla u_1 \nabla u_2 dx = \int_\Omega g(x, u_1)u_2 dx, \quad \int_\Omega A(x)\nabla u_2 \nabla u_1 dx = \int_\Omega g(x, u_2)u_1 dx,$$

che sottratte membro a membro, sfruttando la simmetria della matrice A, forniscono

$$\int_\Omega g(x, u_1)u_2 - g(x, u_2)u_1 dx = 0.$$

Pertanto

$$\int_\Omega \left(\frac{g(x, u_1)}{u_1} - \frac{g(x, u_2)}{u_2} \right) u_1 u_2 dx = 0,$$

ma $u_1 > 0$ ed $u_2 > 0$, quindi $u_1 u_2 > 0$ e $\frac{g(x,t)}{t}$ è decrescente; dunque, poiché, per ipotesi $u_1 \leq u_2$ q.o., si ha $u_1 = u_2$ q.o..

□

Così, per quanto riguarda l'esempio precedente, si ha che le due soluzioni che si trovano per iterazioni monotone, a partire da $\underline{u}$ e da $\overline{u}$, sono coincidenti, dal momento che $h(t) = \frac{t^\theta}{t}$ è decrescente.

5.2 Due risultati di esistenza nel caso limitato, $\rho \in L^\infty(\Omega)$

Consideriamo il problema (5.1)

$$\begin{cases} L(u) \;=\; \rho(x) f(u) & \text{in } \Omega \\ \quad u > 0 & \text{in } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{su } \Gamma \;=\; \partial\Omega, \end{cases}$$

supponendo che valgano le ipotesi $I) - IV)$, e che inoltre sussista:

V) esistono $\gamma \in \mathbf{R}^+$, $\theta \in [0,1)$ tali che

$$f(t) \leq \gamma t^\theta \qquad \forall t \geq 0.$$

Allora possiamo dimostrare il seguente

Teorema 5.2.1. *Supponiamo che valgano le ipotesi $I) - V)$, e che inoltre:*

a) $\rho \in L^\infty(\Omega)$*;*

b) esiste ρ_0 *in* $\mathbf{R}^+$ *tale che*

$$\rho(x) \geq \rho_0 > 0;$$

c) si abbia

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t} > \frac{\lambda_1}{\rho_0}$$

con λ_1 *primo autovalore dell'operatore* L *in* Ω*.*

Allora esiste u *soluzione del problema* (5.1)*,* $u \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$*.*

Dimostrazione. La funzione $g(x,t) = \rho(x) f(t)$, soddisfa in primo luogo l'ipotesi i), inoltre unendo l'ipotesi IV) all'ipotesi b), si ha che $g(x,t)$ è crescente nella seconda variabile per q.o. $x \in \Omega$. Se troviamo una sottosoluzione $\underline{u}$ ed una soprasoluzione $\overline{u}$, ordinate in modo che $\underline{u} \leq \overline{u}$, applicando il Teorema 5.1.5, avremo l'asserto. Se consideriamo $\underline{u} = \varepsilon\ \varphi_1$, affinché $\underline{u}$ sia una sottosoluzione del problema (5.1), è sufficiente che $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, dove ε_0 soddisfa:

$$(\varepsilon_0\ \varphi_1)^{-1} f(\varepsilon_0\ \varphi_1) > \frac{\lambda_1}{\rho_0},$$

(l'esistenza di ε_0 è garantita dall'ipotesi c)). Per quanto riguarda la soprasoluzione, consideriamo $\overline{u}$ tale che

$$\begin{cases} L(\overline{u}) \ = \ T & \text{in } \Omega \\ \quad \overline{u} = 0 & \text{su } \Gamma \ = \ \partial\Omega, \end{cases}$$

e scegliamo T in modo che $\overline{u}$ sia una soprasoluzione per il problema (5.1); cioè $T \geq \left(\|\rho\|_\infty \gamma c^\theta\right)^{\frac{1}{1-\theta}} = T_0$, dove c è la costante fornita dal Teorema di Stampacchia 2.1.4 e quindi soddisfa $\|\overline{u}\|_\infty \leq cT$. Vogliamo infine che $\underline{u} \leq \overline{u}$, e affinché ciò avvenga è sufficiente scegliere $T = \max\{T_0, T_1\}$ dove $T_1 = \varepsilon_0 M \lambda_1$ ed $M = \|\ \varphi_1\|_\infty$. Allora u risolve l'equazione, inoltre $0 < \underline{u} \leq u \leq \overline{u}$, così u risolve il problema (5.1) ed essendo $\overline{u} \in L^\infty(\Omega)$, si ha che $u \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

□

Il precedente risultato può essere migliorato, facendo delle ipotesi più deboli sul segno della funzione $\rho(x)$, cioè supponendo $\rho(x)$ positiva non su tutto Ω, ma soltanto su di un insieme compattamente contenuto in Ω stesso; a patto però di sfruttare il Lemma seguente, che ci occorre a stabilire il comportamento di un'autofunzione dell'operatore L su $\Omega' \subset\subset \Omega$, al di fuori di Ω' e cioè su tutto l'insieme Ω.

Lemma 5.2.2. *Sia A un operatore differenziale ellittico, che agisca tra $H_0^1(\Omega)$ ed $H^{-1}(\Omega)$. Sia Ω' un aperto, compattamente contenuto in Ω, cioè $\Omega' \subset\subset \Omega$, $g \in H^{-1}(\Omega)$, con $g \geq 0$, e $\zeta \in H_0^1(\Omega)$ con $\zeta \geq 0$ in Ω' ed $A(\zeta) \leq g$ in Ω'. Definiamo $\tilde{\zeta}$ come $\tilde{\zeta} = \zeta$ in Ω' e $\tilde{\zeta} = 0$ altrove in Ω. Allora $A(\tilde{\zeta}) \leq g$ in Ω.*

Dimostrazione. Sia $K = \{w \in H_0^1(\Omega) : v \leq \tilde{\zeta} in \Omega\}$, e consideriamo la soluzione w della disuguaglianza variazionale:

$$w \in K \text{ t.c. } \langle A(w) - g, v - w \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K \tag{5.9}$$

usando w^- come funzione test nell'equazione 5.9, si prova che $w^- = 0$ q.o., allora $w \geq 0$ q.o., pertanto $0 \leq w \leq \tilde{\zeta}$, e così $w = 0$ q.o. in $\Omega \setminus \Omega'$. In particolare, si ha

$$\left\langle A(\tilde{\zeta}) - g, \tilde{\zeta} - w \right\rangle_{\Omega} = \langle A(\zeta) - g, \zeta - w \rangle_{\Omega'} , \tag{5.10}$$

grazie alle ipotesi su $\tilde{\zeta}$. Inoltre, le proprietà di monotonia di A, (5.9) ed (5.10), ci assicurano che:

$$\left\langle A(w) - A(\tilde{\zeta}), w - \tilde{\zeta} \right\rangle_{\Omega} \leq \left\langle A(\tilde{\zeta}) - g, w - \tilde{\zeta} \right\rangle_{\Omega'} \leq 0,$$

e così $w = \tilde{\zeta}$ su Ω. D'altra parte la soluzione w dell'equazione (5.9), soddisfa $A(w) \leq g$ in Ω, da cui la tesi.

□

Teorema 5.2.3. *Supponiamo che valgano le ipotesi $I) - V)$, e che:*

a) $\rho \in L^\infty(\Omega)$*;*

b) esistono ρ_0 in $\mathbf{R}^+$, $\Omega' \subset\subset \Omega$, aperto, tali che

$$\rho(x) \geq \rho_0 > 0 \quad \text{in } \Omega';$$

c) si abbia

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t} > \frac{\lambda_1}{\rho_0}$$

dove λ_1 è il primo autovalore di L su Ω' e ρ_0 è quello introdotto nel punto b).

Allora, esiste u soluzione del problema (5.1)*, con* $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$*.*

Dimostrazione. Sia $\rho^+(x) = \max(\rho(x), 0)$, e sia v la soluzione del problema

$$\begin{cases} L(v) = \gamma\rho^+(x) & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.11}$$

con γ introdotto nell'ipotesi V), allora per il Teorema 2.1.2 v è positiva, essendo tali, sia γ che $\rho^+(x)$; inoltre, dal momento che $\gamma\rho^+(x) \in L^{\infty}(\Omega)$ allora per il Teorema 2.1.4, $v \in L^{\infty}(\Omega)$. Definiamo $\overline{u} = Tv$ (naturalmente, appena $T > 1$, $\overline{u}$ è una soprasoluzione del problema (5.11)), allora perché $\overline{u}$ sia una soprasoluzione del problema (5.1), occorre che

$$\begin{cases} L(\overline{u}) - \rho(x)f(\overline{u}) \geq 0 & \text{in } \Omega \\ \overline{u} \geq 0 & \text{su } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.12}$$

Ma $L(\overline{u}) - \rho(x)f(\overline{u}) \geq T\gamma\rho^+(x) - \rho(x)f(vT) \geq T\gamma\rho^+(x) - \rho(x)\gamma\,(vT)^{\theta}$, dunque, perché $\overline{u}$ sia soprasoluzione del problema (5.1), basta trovare T tale che $T\gamma\rho^+(x) - \rho(x)\gamma\,(vT)^{\theta} \geq 0$; sfruttando il Teorema 2.1.4, si ha $v \leq \|v\|_{\infty} \leq \gamma c\|\rho^+(x)\|_{\infty}$, dunque, perché sia soddisfatto il problema (5.12), basta che

$$T\gamma\rho^+(x) - \rho(x)\gamma^{\theta+1}\left(cT\|\rho^+(x)\|_{\infty}\right)^{\theta} \geq 0$$

e cioè:

$$T^{1-\theta} \geq \frac{\rho\left(\|\rho^+(x)\|_{\infty}c\gamma\right)^{\theta}}{\rho^+(x)},$$

pertanto

$$T^{1-\theta} \geq \left(\|\rho^+(x)\|_{\infty}c\gamma\right)^{\theta} - \rho^- \frac{\left(\|\rho^+(x)\|_{\infty}c\gamma\right)^{\theta}}{\rho^+(x)}.$$

Dal momento che $\rho^- \geq 0$, $c > 0$, $\rho^+ \geq 0$, $\|\rho^+(x)\|_{\infty} \geq 0$, perché sia soddisfatto il problema (5.12), è sufficiente che

$$T \geq \left(\|\rho^+(x)\|_{\infty}c\gamma\right)^{\frac{\theta}{1-\theta}} = T_0.$$

Sia ora $\underline{u} = \varepsilon\varphi$ con

$$\varphi = \begin{cases} \tilde{\varphi}_1 & \text{in } \Omega' \\ 0 & \text{in } \Omega \setminus \Omega', \end{cases}$$

e $\tilde{\varphi}_1$ prima autofunzione di L in Ω'. Il Lemma 5.2.2, con $g = \lambda_1\varphi$, λ_1 primo autovalore in Ω', $\zeta = \tilde{\varphi}_1$, ci garantisce che

$$L(\varphi) \leq \lambda_1\varphi \quad \text{in } \Omega;$$

quindi

$$L(\underline{u}) - \rho(x)f(\underline{u}) \leq \lambda_1\underline{u} - \rho_0 f(\underline{u}),$$

se ε è scelto abbastanza piccolo, si ha effettivamente

$$\begin{cases} L(\underline{u}) - \rho(x)f(\underline{u}) \leq 0 & \text{in } \Omega \\ \quad \underline{u} \leq 0 & \text{su } \Gamma \; = \; \partial\Omega. \end{cases}$$

Basta scegliere $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, dove ε_0 è tale che

$$(\varepsilon_0 \varphi)^{-1} f(\varepsilon_0 \varphi) > \frac{\lambda_1}{\rho_0}$$

(l'esistenza di un tale ε_0 è garantita dall'ipotesi c) del Teorema).
Vogliamo ora ordinare $\underline{u}, \overline{u}$, in modo che $\underline{u} \leq \overline{u}$, ma dal momento che se ε è abbastanza piccolo, $\underline{u}$ è anche una sottosoluzione per il problema (5.11) e che basta porre $T > 1$, perché $\overline{u}$ sia una soprasoluzione dello stesso problema, allora è sufficiente per ottenere il giusto ordinamento, che ε sia piccolo, e $T = \max\{T_0, 1\}$.
Procediamo ora come già fatto nella dimostrazione del Teorema 5.1.5, per iterazioni monotone, osservando che non è possibile applicare il suddetto Teorema, a causa del fatto che, $\rho(x)f(t)$ potrebbe anche non essere crescente nella variabile t stante la mutevolezza di segno della funzione $\rho(x)$. Definiamo pertanto ricorsivamente, la successione di funzioni $\{u_n\}$:

$$\begin{cases} u_0 = \underline{u} \\ \\ u_n \text{ risolve } \begin{cases} L(u_n) + \rho^-(x) = \rho^+(x) f(u_{n-1}) & \text{in } \Omega \\ \quad u_n = 0 & \text{su } \Gamma \; = \; \partial\Omega. \end{cases} \end{cases}$$

Dimostriamo, mediante un procedimento induttivo che $\{u_n\}$ è monotona crescente: $u_1 \geq u_0$, infatti si ha che

$$L(u_0 - u_1) \leq \rho^-(x) \left[f(u_1) - f(u_0) \right]$$

scelta come funzione test $(u_0 - u_1)^+$, si ha

$$\int_\Omega A(x) \nabla (u_0 - u_1)^+ \, \nabla (u_0 - u_1)^+ \, dx \leq \int_\Omega \rho^-(x) \left[f(u_1) - f(u_0) \right] (u_0 - u_1)^+ \, dx$$

così, usando l'ipotesi II) sula matrice A, ed il fatto che f è crescente, si ottiene

$$\alpha \int_\Omega |\nabla (u_0 - u_1)^+|^2 dx \leq 0,$$

pertanto $(u_0 - u_1)^+ = 0$ q.o., cioè $u_0 \leq u_1$ q.o.. Supponiamo che $u_{n-1} \leq u_n$ q.o. (ipotesi induttiva) e dimostriamo che $u_n \leq u_{n+1}$ q.o.:

$$L(u_n - u_{n+1}) = \rho^-(x) \left[f(u_{n+1}) - f(u_n) \right] + \rho^+(x) \left[f(u_{n-1}) - f(u_n) \right].$$

Sfruttando l'ipotesi induttiva e la monotonia di f, si ha

$$L(u_n - u_{n+1}) = \rho^-(x) \left[f(u_{n+1}) - f(u_n) \right]$$

da cui procedendo come nel primo passo (scegliendo come test $(u_n - u_{n+1})^+$) si ottiene $u_n \leq u_{n+1}$ q.o..
Sfruttando ancora un processo induttivo, si può dimostrare che $u_n \leq \overline{u}$ q.o. per ogni $n \in \mathbf{N}$, infatti: $u_0 \leq \overline{u}$ q.o. per costruzione, supponiamo che $u_n \leq \overline{u}$ q.o. (ipotesi induttiva) e dimostriamo che $u_{n+1} \leq \overline{u}$ q.o.;

$$L(u_{n+1} - \overline{u}) \leq \rho^+(x)f(u_n) - \rho(x)f(\overline{u}) - \rho^-(x)f(u_{n+1}),$$

allora

$$L(u_{n+1} - \overline{u}) \leq \rho^+(x)f(u_n) - \rho^+(x)f(\overline{u}) + \rho^-(x)f(\overline{u}) - \rho^-(x)f(u_{n+1}),$$

grazie nuovamente all'ipotesi induttiva ed al fatto che f è crescente, si ha

$$L(u_{n+1} - \overline{u}) \leq \rho^-(x)\left[f(\overline{u}) - f(u_{n+1})\right];$$

scelta come funzione test $(u_{n+1} - \overline{u})^+$, si ha $u_{n+1} \leq \overline{u}$ q.o.. Pertanto, per q.o. x fissato in Ω, $u_n(x)$ è monotona crescente e limitata, come successione numerica, dunque esiste $u(x)$ tale che $u_n(x)$ converge ad $u(x)$ q.o. in Ω. Facciamo ora vedere che $u_n(x)$, converge debolmente ad u in $H_0^1(\Omega)$, mostrando che u_n è limitata in $H_0^1(\Omega)$:

$$\|u_n\|_{1,0}^2 \leq \frac{1}{\alpha}\left[\int_\Omega \rho^+ f(u_{n-1})u_n dx - \int_\Omega \rho^- f(u_n)u_n dx\right],$$

$u_n \geq \underline{u} > 0$, $f : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+$ e $\rho^-(x) \geq 0$ q.o., quindi

$$\|u_n\|_{1,0}^2 \leq \frac{1}{\alpha}\int_\Omega \rho^+ f(u_{n-1})u_n dx.$$

Dal momento che f è crescente e $u_n \leq \overline{u}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, si ha

$$\|u_n\|_{1,0}^2 \leq \frac{1}{\alpha}\int_\Omega \rho^+ f(\overline{u})u_n dx.$$

Così, sfruttando la disuguaglianza di Hölder, perveniamo a

$$\|u_n\|_{1,0}^2 \leq \frac{1}{\alpha}\|\rho^+\|_\infty \|\max\{|f(\underline{u})|, |f(\overline{u})|\}\|_{(2^*)'}\|u_n\|_{2^*}$$

(si è usata anche la limitatezza di $\rho^+(x)$). Usando sull'ultima relazione ottenuta la disuguaglianza di Sobolev, si arriva a

$$\|u_n\|_{1,0}^2 \leq \frac{1}{S\alpha}\|\rho^+\|_\infty \|\max\{|f(\underline{u})|, |f(\overline{u})|\}\|_{(2^*)'}\|u_n\|_{1,0},$$

dividendo ambo i membri per $\|u_n\|_{1,0}$, si ha

$$\|u_n\|_{1,0} \leq \frac{1}{S\alpha}\|\rho^+\|_\infty \|\max\{|f(\underline{u})|, |f(\overline{u})|\}\|_{(2^*)'}.$$

Dunque $u_n \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$, pertanto

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega A(x)\nabla u_n \nabla w dx = \int_\Omega A(x)\nabla u \nabla w dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega);$$

inoltre

- $\rho^+(x)f(u_{n-1}) - \rho^-(x)f(u_n)$ converge q.o. in Ω a $\rho(x)f(u)$;
- $|\rho^+(x)f(u_{n-1}) - \rho^-(x)f(u_n)| \le |\rho^+(x)f(u_{n-1})| + |\rho^-(x)f(u_n)| \le$
$$\le 2\|\rho\|_\infty \max\{|f(\underline{u})|, |f(\overline{u})|\} \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega).$$

Così, $\rho^+(x)f(u_{n-1}) - \rho^-(x)f(u_n)$ in $L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ a $\rho(x)f(u)$, pertanto

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \left(\rho^+(x)f(u_{n-1}) - \rho^-(x)f(u_n)\right) w dx =$$
$$= \int_\Omega \rho(x)f(u) w dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Dunque passando al limite su entrambi i membri del problema che definisce u_n, cioè:

$$\int_\Omega A(x)\nabla u_n \nabla w dx = \int_\Omega \left(\rho^+(x)f(u_{n-1}) - \rho^-(x)f(u_n)\right) w dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

si ottiene

$$\int_\Omega A(x)\nabla u \nabla w dx = \int_\Omega \rho(x)f(u) w dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

allora u risolve l'equazione del problema (5.1), ed inoltre $0 < \underline{u} \le u \le \overline{u}$, così, effettivamente u risolve il problema (5.1) ed $u \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

□

Osservazione. Si noti che la sottosoluzione $\underline{u} = \varepsilon\varphi$ è del tutto indipendente dalla $\|\rho\|_\infty$. Essa infatti dipende esclusivamente da f e da ρ_0, e questo ci sarà molto utile in seguito.

5.3 Esistenza e regolarità nel caso variazionale

In questo terzo paragrafo, ci proponiamo di indebolire ulteriormente le ipotesi sulla funzione $\rho(x)$, pur continuando a ricercare soluzioni in senso debole del problema (5.1), e cioè facendo in modo che la sommabilità della funzione $\rho(x)$, ci consenta di scegliere ancora, come funzioni test, delle funzioni in $H_0^1(\Omega)$; il motivo per cui è ragionevole aspettarsi di poter considerare $\rho(x)$ che non sia in $L^\infty(\Omega)$ è interamente contenuto nell'osservazione che troviamo alla fine del precedente paragrafo, e consiste appunto nel fatto che per trovare una sottosoluzione del problema in questione, ci basta avere una stima dal basso della funzione $\rho(x)$. Sussiste il seguente