L'equazione di Laplace

I riferimenti riguardano il libro di Lawrence C. Evans, "Partial differential equations" (II 15 1326, II 15 1378, II 15 1579, II 15 1597, II 15 1598).

- Definizione dell'equazione di Laplace e di funzione armonica (§2.2, pag. 20–21).
- La soluzione fondamentale: costruzione (§2.2.1a, pag. 21–22); il problema di Poisson (§2.2.1b, pag. 22–25).
- Formule di media (§2.2.2, pag. 25–26).
- Proprietà delle funzioni armoniche: il principio del massimo; unicità della soluzione per il problema di Poisson; regolarità della soluzione (§2.2.3, pag. 27-28); la disuguaglianza di Harnack (§2.2.3, pag. 32–33).
- Metodi di energia: il principio di Dirichlet (§2.2.5, pag. 41–43).

Gli spazi di Sobolev

Si veda il capitolo IX del libro "Analisi funzionale" di Haïm Brezis (II 15 1349, II 15 1368, II 15 1369), ed in particolare la definizione di spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, la completezza degli spazi di Sobolev, la definizione di $W_0^{1,p}(\Omega)$, le disuguaglianze di immersione (Poincaré, Sobolev) ed i teoremi di compattezza (Rellich-Kondrachov).

Cerchiamo di trovare una soluzione di (2.1) con un metodo diverso da quello esposto nel primo capitolo.

Definizione 2.1.2. *Sia X uno spazio di Banach e sia $(x_n) \subset X$ una successione. Diciamo che x_n* **converge debolmente** *a $x \in X$, (e si indica $x_n \rightharpoonup x$) se:*

$$\langle T, x_n \rangle \ \to \ \langle T, x \rangle \quad \forall \ T \in X'.$$

□

Definizione 2.1.3. *Sia X uno spazio di Banach. Un funzionale $J : X \to \mathbf{R}$ è detto* **debolmente semicontinuo inferiormente** (**d.s.c.i.**)*, se per tutte le successioni $(x_n) \subset X$ convergenti debolmente verso un limite $x \in X$ si ha che:*

$$J(x) \leq \liminf_{n \to +\infty} J(x_n).$$

□

Un risultato fondamentale di esistenza di minimi per un funzionale è dato da seguente:

Teorema 2.1.4 (Weierstrass)**.** *. Sia X uno spazio di Banach riflessivo, $K \subset X$ un convesso chiuso e $J : \ K \ \to \ \mathbf{R}$ un funzionale t.c.*

i) J è d.s.c.i..

In più se K non è limitato:

ii) per tutte le successioni $(x_n) \subset K$ t.c. $\|x_n\| \to +\infty$, $J(x_n) \to +\infty$ (coercitività).

Allora J ammette minimo su K, cioè

$$\exists \ u \in K, \quad J(u) = \inf_{v \in K} J(v) = \min_{v \in K} J(v).$$

Dimostrazione. Sia $m = \inf_{v \in K} J(v)$ e sia (u_n) una successione minimizzante. La successione (u_n), in virtù dell'ipotesi *ii*), è limitata. Se così non fosse esisterebbe una sottosuccessione (u_{n_k}) di (u_n) : $\|u_{n_k}\| \to +\infty$, allora

$$m \leftarrow \ J(u_{n_k}) \to +\infty,$$

e ciò è assurdo.
Siccome X è riflessivo, esiste una sottosuccessione $(u_{n_k})_k$ e $u \in K$ tale che $u_{n_k} \rightharpoonup u$. Essendo K un convesso chiuso, K è debolmente chiuso e quindi $u \in K$. In conclusione

$$\alpha \leq J(u) \leq \liminf_{k \to +\infty} J(u_{n_k}) \ = \alpha,$$

essendo J d.s.c.i.. Quindi $\alpha = J(u) \in \mathbf{R}$ e J ammette come minimo $u \in K$.
$\square$

Applichiamo il teorema di Weierstrass al funzionale

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \; - \; \int_\Omega fv \qquad v \in H_0^1(\Omega),\; f \in L^{\frac{2N}{N+2}}, \tag{2.4}$$

con $N \geq 3$. Dimostriamo che (2.4) è coercitivo e d.s.c.i.
i) coercitività: osserviamo che: $\left(\frac{2N}{N+2}\right)' = \frac{2N}{N-2} = 2^*$, e quindi:

$$\left|\int_\Omega fv\right| \leq \left(\int_\Omega |f|^{\frac{2N}{N+2}}\right)^{\frac{N+2}{2N}} \left(\int_\Omega |v|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} = \|f\|_{\frac{2N}{N+2}}\|v\|_{2^*} \leq \frac{1}{S}\;\|f\|_{\frac{2N}{N+2}}\|v\|_{H_0^1}$$

con S la costante di Sobolev.
Pertanto

$$-\int_\Omega fv \geq -\frac{1}{S}\;\|f\|_{\frac{2N}{N+2}}\|v\|_{H_0^1}.$$

In conclusione

$$J(v) \geq \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^1} \; - \; \frac{1}{S}\|f\|_{\frac{2N}{N+2}}\|v\|_{H_0^1},$$

e quindi

$$\lim_{\|v\|\to+\infty} J(v) = +\infty.$$

ii) d.s.c.i.: sia $(v_n) \subset H_0^1$ una successione t.c. $v_n \rightharpoonup v$ in H_0^1. Per definizione di convergenza debole, e per il fatto che $\varphi : H_0^1(\Omega) \to \mathbf{R}$ definita da $\varphi(w) = \int_\Omega fw$ è in $H^{-1}(\Omega)$, si ha che $\int_\Omega fv_n \to \int_\Omega fv$.
Perciò

$$J \text{ è d.s.c.i.} \iff (\; v_n \rightharpoonup v \Longrightarrow \int_\Omega |\nabla v|^2 \leq \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 \;).$$

Ora

$$0 \leq \int_\Omega |\nabla(v_n - v)|^2 = \int_\Omega |\nabla v_n|^2 \; - \; 2\int_\Omega \nabla v_n \nabla v \; + \; \int_\Omega |\nabla v|^2$$

e quindi

$$-\int_\Omega |\nabla v|^2 \; + \; 2\int_\Omega \nabla v_n \nabla v \leq \int_\Omega |\nabla v_n|^2, \tag{2.5}$$

di conseguenza

$$-\int_\Omega |\nabla v|^2 \; + \; 2\liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega \nabla v_n \nabla v \leq \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega |\nabla v_n|^2$$

essendo la (2.5) vera $\forall\; n \in \mathbf{N}$.
Per definizione di convergenza debole, essendo l'applicazione $\varphi : H_0^1(\Omega) \to \mathbf{R}$ definita da $\varphi(w) = \int_\Omega \nabla u \nabla w$ un elemento di $H^{-1}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla v_n \nabla v \longrightarrow \int_\Omega |\nabla v|^2$$

e quindi

$$2\int_\Omega \nabla v \nabla v \; - \int_\Omega |\nabla v|^2 \le \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^2,$$

cioè

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \le \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^2.$$

Pertanto, essendo verificate le ipotesi del teorema di Weierstrass, il funzionale $J(v)$ ammette minimo.

Mostriamo che tale minimo è soluzione debole del problema (2.1).
Sia $u = \min_{v\in H_0^1} J(v)$, allora $J(u) \le J(v)\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$.
Scegliamo $v = u + t\varphi$, con $t \in \mathbf{R}$, e con $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.
$J(u) \le J(u+t\varphi)$ e quindi

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \; - \int_\Omega fu \le \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u+t\varphi)|^2 \; - \int_\Omega f(u+t\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \; + \; t\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \; + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \; - \int_\Omega fu \; - \; t\int_\Omega f\varphi.$$

Abbiamo quindi

$$0 \le t\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \; + \; \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \; - \; t\int_\Omega f\varphi \quad \forall\ t \in \mathbf{R},\ \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.6}$$

Consideriamo $t > 0$, e dividiamo la (2.6) per t. Passando al limite per $t \to 0^+$ si ottiene:

$$0 \le \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi \; - \; \int_\Omega f\varphi \quad \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.7}$$

D'altra parte, dividiamo la (2.6) per $t < 0$. Passando al limite per $t \to 0^-$ si ottiene:

$$0 \ge \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi \; - \; \int_\Omega f\varphi \quad \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.8}$$

Unendo la (2.7) e la (2.8) si ha che:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

e cioè, u è **soluzione debole del problema (2.1)**.
Inoltre tale soluzione è **unica**. Infatti siano u e v due soluzioni di (2.3).
Allora

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w = \int_\Omega fw \;\text{ e }\; \int_\Omega \nabla v \nabla w = \int_\Omega fw \quad \forall\ w \in H_0^1(\Omega),$$

sottraendo membro a membro le due equazioni si ha che:

$$\int_\Omega \nabla(u-v)\nabla w = 0 \quad \forall\, w \in H_0^1(\Omega). \tag{2.9}$$

Ponendo $w = v - u$ nella (2.9) otteniamo

$$\int_\Omega |\nabla(u-v)|^2 = \|v-u\|^2_{H_0^1} = 0$$

e cioè $u = v$. $\square$

Ricordiamo che:

$$s^+ = \max(s,0),$$

$$s^- = \max(-s,0),$$

$$s = s^+ - s^-,\ |s| = s^+ + s^-.$$

Teorema 2.1.5. *Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione del problema* (2.1)*. Se $f \geq 0$ allora $u \geq 0$.*

Dimostrazione. u è soluzione di (2.1), quindi

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Scegliamo come funzione test u^- (lo si può fare per l'osservazione del Capitolo 1 a pag 9). Si ha che:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla u^- = \int_\Omega f u^- \geq 0.$$

Ma

$$\int_\Omega \nabla u \nabla u^- = \int_\Omega \nabla(u^+ - u^-)\nabla u^- = -\int_\Omega |\nabla u^-|^2.$$

Pertanto

$$-\int_\Omega |\nabla u^-|^2 \geq 0,$$

di conseguenza

$$|\nabla u^-|^2 = 0.$$

Questo vuol dire che $\|u^-\|_{H_0^1} = 0$, e cioè $u^- = 0$, e quindi $u = u^+ \geq 0$. $\square$

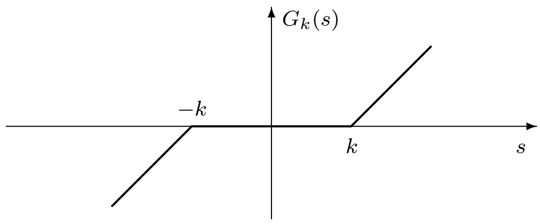
Si può dimostrare, in modo analogo, che se $f \leq 0$ allora $u \leq 0$.

2.2 Regolarità delle soluzioni deboli

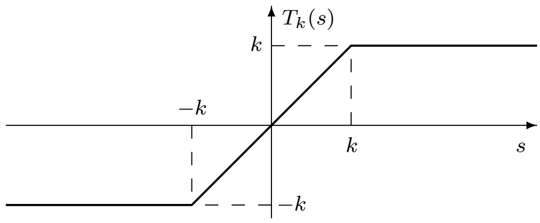
Il problema che ci poniamo ora è il seguente: facendo variare la regolarità della funzione f nel problema (2.1), quanto e in che modo questa influisce sulla regolarità della soluzione u?
Iniziamo col definire alcune funzioni:

$$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \geq 0 \\ -1 & \text{se } s < 0 \end{cases}$$

$$G_k(s) = (|s| - k)^+ \; sgn(s) \quad k \geq 0,$$



$$T_k(s) = s - G_k(s) = \min(k, \max(s, -k)).$$



$G_k(s)$ e $T_k(s)$ sono due funzioni lipschitziane, che si annullano nell'origine. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, $G_k(u)$, $T_k(u) \in H_0^1(\Omega)$. Inoltre

$$\nabla G_k(u) = \nabla u \cdot G_k'(u) \text{ q.o.}$$

$$\nabla T_k(u) = \nabla u \cdot T_k'(u) \text{ q.o.}$$

con

$$G_k'(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } |s| > k \\ 0 & \text{se } |s| < k \end{cases}$$

e

$$T_k'(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } |s| < k \\ 0 & \text{se } |s| > k \end{cases}$$

e quindi

$$\nabla G_k(u) = \nabla u \; \mathcal{X}_{\{|u|>k\}} \text{ q.o.}$$

$$\nabla T_k(u) = \nabla u \ \mathcal{X}_{\{|u|<k\}} \text{ q.o.}$$

Osservazione. $G_k(u)$ si annulla dove $|u| < k$, ovvero dove u è limitata. Quindi dire che u è limitata vuol dire che $\exists\ k_0 :\ G_{k_0}(u) \equiv 0$.
Vale il seguente

Lemma 2.2.1 (Stampacchia)**.** *Sia $\psi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ non crescente. Allora,*

$$\forall\ h > k \geq 0 \quad \psi(h) \leq \frac{c}{(h-k)^\beta}\ \psi(k)^\alpha, con\ \beta > 0\ e\ \alpha > 1.$$

Ne segue che

$$\psi(h) = 0\ \ \forall\ h \geq d,\ con\ d^\beta =\ c\ \psi(0)^{\alpha-1}\ 2^{\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}}.$$

□

Teorema 2.2.2 (Stampacchia)**.** *Sia u soluzione del problema* (2.1)*. Se $f \in L^p(\Omega)$, $p > \frac{N}{2}$, allora $u \in L^\infty(\Omega)$. Inoltre $\|u\|_\infty \leq\ C\|f\|_p$.*

Dimostrazione. Per ipotesi u soddisfa:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v \quad\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.10}$$

Scegliamo $v = G_k(u)$, $k > 0$, e definiamo

$$A_k = \{x \in \Omega :\ |u(x)| > k\}.$$

Allora, essendo $G_k(u(x)) = 0$ se $x \notin A_k$, dalla (2.10) si ha che:

$$\int_{A_k} \nabla u \nabla G_k(u) = \int_{A_k} f G_k(u). \tag{2.11}$$

Osserviamo che $\int_{A_k} \nabla u \nabla G_k(u) = \int_{A_k} |\nabla u|^2$.
Ma su A_k, $|\nabla u|^2 = |\nabla G_k(u)|^2$ e quindi otteniamo

$$\int_{A_k} |\nabla u|^2 = \int_{A_k} |\nabla G_k(u)|^2. \tag{2.12}$$

Applichiamo la disuguaglianza di Sobolev al secondo membro della (2.12), ed usando la (2.11):

$$S\left(\int_\Omega |G_k(u)|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_\Omega |\nabla G_k(u)|^2 = \int_{A_k} f G_k(u) \leq \int_{A_k} |f||G_k(u)| \leq$$

$$\leq \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |G_k(u)|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} |A_k|^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{2^*}},$$

con S la costante di Sobolev.
Nell'ultima disuguaglianza si è applicata la disuguaglianza di Hölder con esponenti $p, q, 2^*$, con q t.c. $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}$. Ciò è possibile se $q > 1$, ma questo è vero se $p > \frac{2N}{N+2}$, vero per ipotesi essendo $p > \frac{N}{2} > \frac{2N}{N+2}$ se $N \geq 3$.
Riassumendo:

$$S\left(\int_\Omega |G_k(u)|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \|f\|_p \left(\int_\Omega |G_k(u)|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} |A_k|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{N}},$$

e quindi dividendo per $\left(\int_\Omega |G_k(u)|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}}$ (stiamo supponendo che $G_k(u) \neq 0$) otteniamo:

$$S\left(\int_\Omega |G_k(u)|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq \|f\|_p |A_k|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{N}}.$$

Scegliamo $h \in \mathbf{R}$, $h > k$, cosicché $A_h \subseteq A_k$. Osserviamo che $|G_k(s)| \geq h-k$, se $|s| > k$, e quindi

$$S\left(\int_{A_h} |G_k(u)|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \geq S\left(\int_{A_h} |h-k|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} = S|h-k||A_h|^{\frac{1}{2^*}}.$$

Di conseguenza

$$|A_h| \leq \left(\frac{1}{S}\|f\|_p\right)^{2^*} \frac{|A_k|^{2^*\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{N}\right]}}{(h-k)^{2^*}} \tag{2.13}$$

Ma

$$2^*\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{N}\right] > 1 \iff \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{N}\right) > \frac{1}{2^*} = \frac{1}{2}-\frac{1}{p} \iff p > \frac{N}{2}.$$

Quindi nella (2.13) l'esponente di $|A_k|$ è maggiore di 1. Posso applicare il Lemma (2.2.1) con $\psi(k) = |A_k|$, $c = \left(\frac{1}{S}\|f\|_p\right)^{2^*}$, $\beta = 2^*$, $\alpha = 2^*(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{N}) > 1$.
Questo vuol dire che:

$$\psi(h) = 0 \ \ \forall\ h \geq d,$$

con

$$d = \left(\frac{1}{S}\|f\|_p\right) |\Omega|^{2^*(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{N})-\frac{1}{2^*}} 2^{\frac{2^*(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{N})}{2^*(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{N})-1}} = C(N,p,\Omega)\|f\|_p.$$

Sappiamo che $\psi(d) = |\{x \in \Omega : |u| > d\}|$, e quindi $|u| \leq d$ q.o. ovvero

$$u \in L^\infty \text{ e inoltre } \|u\|_\infty \leq C(N,p,\Omega)\|f\|_p.$$

□

Il teorema è ottimale nel senso che $\exists\ f \in L^p(\Omega),\ p \leq \frac{N}{2}$ la cui corrispondente soluzione del problema (2.1) non è limitata.
Per esempio

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{|x|^2} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.14}$$

con $\Omega = B(0,1) \subset \mathbf{R}^N$. La funzione $\frac{1}{|x|^2} \in L^p(B(0,1))$ per $p < \frac{N}{2}$, ma la soluzione del problema è $u = -C_N \ln(|x|)$ che su $B(0,1)$ non è limitata.

Teorema 2.2.3. *Sia u soluzione del problema* (2.1).
Se $f \in L^p(\Omega)$ con $\frac{2N}{N+2} \leq p < \frac{N}{2}$, allora $u \in L^m(\Omega)$ con $m = \frac{Np}{N-2p}$. Inoltre, $\|u\|_m \leq\ C\|f\|_p$.

Dimostrazione. Sia $\alpha \geq 0$ e $v = |T_k(u)|^{2\alpha}T_k(u)$. Allora

$$v \in H_0^1(\Omega) \text{ e } \nabla v = \nabla u(2\alpha+1)|T_k(u)|^{2\alpha}T_k'(u).$$

Essendo u soluzione, si ha che:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w = \int_\Omega fw \qquad \forall\ w \in H_0^1(\Omega). \tag{2.15}$$

Sostituiamo nella (2.15) $w = v$. Otteniamo

$$(2\alpha+1)\int_\Omega \nabla u \nabla T_k(u)|T_k(u)|^{2\alpha} = \int_\Omega f|T_k(u)|^{2\alpha}T_k(u).$$

Ma

$$\int_\Omega \nabla u \nabla T_k(u)|T_k(u)|^{2\alpha} = \int_{\{|u|<k\}} |\nabla u|^2|T_k(u)|^{2\alpha} = \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^2|T_k(u)|^{2\alpha}$$

e quindi, per la disuguaglianza di Hölder,

$$(2\alpha+1)\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^2|T_k(u)|^{2\alpha} \leq \int_\Omega |f||T_k(u)|^{2\alpha+1} \leq$$

$$\leq \|f\|_p \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(2\alpha+1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Siccome

$$\int_\Omega ||\nabla T_k(u)||T_k(u)|^\alpha|^2 = \frac{1}{(\alpha+1)^2}\int_\Omega |\nabla|T_k(u)|^{\alpha+1}|^2,$$

si ha, utilizzando la disuguaglianza di Sobolev, che:

$$\frac{(2\alpha+1)S}{(\alpha+1)^2}\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(\alpha+1)2^*}\right)^{\frac{2}{2*}} \leq \|f\|_p \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(2\alpha+1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \tag{2.16}$$

Osservazione.

i) $\frac{2}{2^*} = 1 - \frac{2}{N} > 1 - \frac{1}{p} \Longleftrightarrow p < \frac{N}{2}$;

ii) $(\alpha+1)2^* = (2\alpha+1)p \Longleftrightarrow \alpha = \frac{2^*-p'}{2p'-2^*}$.
Quindi $\alpha \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{2^*}{2} < p' \leq 2^* \Longleftrightarrow \frac{2N}{N+2} \leq p < \frac{N}{2}$;

iii) $\alpha = \frac{2^*-p'}{2p'-2^*}$ quindi $2^*(\alpha+1) = \frac{2^*p'}{2p'-2^*} = \frac{Np}{N-2p} = m$.
Il reciproco $\frac{1}{m} = \frac{2}{2^*} - \frac{1}{p'} = 1 - \frac{2}{N} - 1 + \frac{1}{p'} = \frac{N-2p}{Np}$

Dalle osservazioni precedenti discende che possiamo dividere entrambi i membri della (2.16) per $\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(2\alpha+1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$ e ottenere

$$\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{\frac{Np}{N-2p}}\right)^{\frac{2}{2^*}-\frac{1}{p'}} \leq \frac{\|f\|_p(\alpha+1)^2}{(2\alpha+1)S},$$

e quindi

$$\|T_k(u)\|_m \leq \frac{\|f\|_p(\alpha+1)^2}{(2\alpha+1)S}, \qquad \forall\, k \in \mathbf{N}.$$

Facciamo tendere $k \to +\infty$ e otteniamo (per il Teorema di Beppo-Levi)

$$\|u\|_m \leq \frac{\|f\|_p(\alpha+1)^2}{(2\alpha+1)S} = C(N,p)\|f\|_p.$$

$\square$

Osservazione. Trovare una stima su $T_k(u)$ in L^1 è molto facile, infatti $\|T_k(u)\|_1 \leq k|\Omega|$, ma nella dimostrazione del Teorema 2.2.3 la stima su $T_k(u)$ in L^m è uniforme in k il che permette di passare al limite.
Per maggiori dettagli cf. [14].

~~Torniamo a parlare della costante di Poncaré C. Si può stimare questa costante, e trovare la migliore costante di Poincaré. Ovviamente si ha, dalla disuguaglianza di Poincaré:~~

$$\cancel{C \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega |u|^2} \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega),\ u \neq 0,}$$

~~e quindi~~

$$\cancel{C = \inf_{\substack{u \in H_0^1 \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega |u|^2}.}$$

~~**Teorema 2.2.4.** *Sia C la costante di Poincaré. Allora*~~

$$\cancel{C = \min_{\substack{u \in H_0^1 \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega |u|^2}. \qquad (2.17)}$$

Il caso dei dati in L^1

Ricordiamo che se $A : \Omega \to \mathbb{R}^{N\times N}$ è una matrice simmetrica di funzioni tale che

$$\alpha\,|\xi|^2 \le A(x)\,\xi\cdot\xi \le \beta\,|\xi|^2\,, \tag{1}$$

per quasi ogni x in Ω, per ogni ξ in $\mathbb{R}^N$, con $0 < \alpha \le \beta$, allora per ogni f in $L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ esiste un'unica soluzione al problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A(x)\,\nabla u) = f & \text{in } \Omega,\\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Ovvero, esiste un'unica u in $H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega A(x)\,\nabla u\cdot\nabla v = \int_\Omega f\,v\,, \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega)\,, \tag{3}$$

e tale u è l'unico punto di minimo del funzionale

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)\,\nabla u\cdot\nabla u - \int_\Omega f\,u\,, \qquad u\in H_0^1(\Omega)\,.$$

Se $N \ge 3$, allora $\frac{2N}{N+2} > 1$; in altre parole, se f è solo in $L^1(\Omega)$ non si possono applicare all'equazione (2) i teoremi di esistenza appena ricordati. D'altra parte, se f è solo sommabile il funzionale I non è definito su tutto $H_0^1(\Omega)$ (dato che esistono funzioni v in $H_0^1(\Omega)$ tali che $f\,v$ non sia sommabile) e — soprattutto — è illimitato inferiormente e quindi non ammette minimo.

Per affrontare il problema dell'esistenza delle soluzioni per (2) nel caso in cui f sia solo $L^1(\Omega)$ è allora necessario ricorrere a tecniche alternative. Iniziamo con un risultato di stime *a priori*.

Teorema 1. *Sia f in $L^\infty(\Omega)$ e sia u la soluzione di (2). Fissato $1 \le q < \frac{N}{N-1}$, esiste una costante C_q (dipendente solo da q, N, α ed Ω) tale che*

$$\|u\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \le C_q\,\|f\|_{L^1(\Omega)}\,. \tag{4}$$

Dimostrazione. Fissato $k > 0$, scegliamo $T_k(u)$ come funzione test in (3). Ricordando che $\nabla T_k(u) = \nabla u$ dove $|u| \le k$ (e zero altrimenti), otteniamo

$$\int_{\{|u|\le k\}} A(x)\,\nabla u\cdot\nabla u = \int_\Omega A(x)\,\nabla u\cdot\nabla T_k(u) = \int_\Omega f\,T_k(u)\,.$$

Usando l'ellitticità (1), e ricordando il legame tra il gradiente di u e la sua troncata, otteniamo

$$(5) \qquad \alpha \int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^2 = \alpha \int_{\{|u|\leq k\}} |\nabla u|^2 \leq \int_{\Omega} |f|\,|T_k(u)| \leq k\,\|f\|_{L^1(\Omega)}\,.$$

Ricordando la disuguaglianza di Sobolev, abbiamo allora

$$\alpha\,S \left(\int_{\Omega} |T_k(u)|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \alpha \int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^2 \leq k\,\|f\|_{L^1(\Omega)}\,.$$

Osservando che $|T_k(u)| = k$ dove $|u| \geq k$, si ottiene

$$\begin{aligned} \alpha\,S\,k^2\,(\mathrm{mis}(\{|u|\geq k\}))^{\frac{2}{2^*}} &= \alpha\,S \left(\int_{\{|u|\geq k\}} |T_k(u)|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &\leq \alpha\,S \left(\int_{\Omega} |T_k(u)|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq k\,\|f\|_{L^1(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

Da quest'ultima disuguaglianza si ottiene, ricordando che $2^* = \frac{2N}{N-2}$,

$$(6) \qquad \mathrm{mis}(\{|u|\geq k\}) \leq \left(\frac{\|f\|_{L^1(\Omega)}}{\alpha\,S}\right)^{\frac{N}{N-2}} \frac{1}{k^{\frac{N}{N-2}}}$$

Sia ora $\lambda > 0$. Allora, per ogni $k > 0$,

$$\{|\nabla u| > \lambda\} = \left\{\begin{array}{c} |\nabla u| > \lambda \\ |u| < k \end{array}\right\} \cup \left\{\begin{array}{c} |\nabla u| > \lambda \\ |u| \geq k \end{array}\right\},$$

so that

$$\mathrm{mis}(\{|\nabla u| > \lambda\}) = \mathrm{mis}\left(\left\{\begin{array}{c} |\nabla u| > \lambda \\ |u| < k \end{array}\right\}\right) + \mathrm{mis}\left(\left\{\begin{array}{c} |\nabla u| > \lambda \\ |u| \geq k \end{array}\right\}\right).$$

Osserviamo che

$$\mathrm{mis}\left(\left\{\begin{array}{c} |\nabla u| > \lambda \\ |u| < k \end{array}\right\}\right) \leq \frac{1}{\lambda^2} \int_{\left\{\substack{|\nabla u|>\lambda \\ |u|<k}\right\}} |\nabla u|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} \int_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^2\,,$$

da cui segue che

$$\mathrm{mis}\left(\left\{\begin{array}{c} |\nabla u| > \lambda \\ |u| < k \end{array}\right\}\right) \leq \frac{k\,\|f\|_{L^1(\Omega)}}{\lambda^2}\,.$$

Inoltre, per la (6),

$$\mathrm{mis}\left(\left\{\begin{array}{c} |\nabla u| > \lambda \\ |u| \geq k \end{array}\right\}\right) \leq \mathrm{mis}\left(\{|u|\geq k\}\right) \leq \left(\frac{\|f\|_{L^1(\Omega)}}{\alpha\,S}\right)^{\frac{N}{N-2}} \frac{1}{k^{\frac{N}{N-2}}}\,.$$

Pertanto

$$\operatorname{mis}(\{|\nabla u| > \lambda\}) \le \frac{k\,\|f\|_{L^1(\Omega)}}{\alpha\,\lambda^2} + \left(\frac{\|f\|_{L^1(\Omega)}}{\alpha\,S}\right)^{\frac{N}{N-2}} \frac{1}{k^{\frac{N}{N-2}}}\,,$$

e questa disuguaglianza è vera per ogni $k > 0$. Minimizzando su k, si ottiene

$$\operatorname{mis}(\{|\nabla u| > \lambda\}) \le C(N, S, \alpha) \left(\frac{\|f\|_{L^1(\Omega)}}{\lambda}\right)^{\frac{N}{N-1}}.$$

Ricordiamo ora che

$$\int_\Omega |\nabla u|^q = \int_0^{+\infty} q\,t^{q-1} \operatorname{mis}(\{|\nabla u| > t\})\,dt\,.$$

Pertanto, per ogni $A > 0$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^q \le \int_0^A q\,t^{q-1} \operatorname{mis}(\Omega)\,dt + \int_A^{+\infty} C(N, S, \alpha, q)\,t^{q-1-\frac{N}{N-1}}\,\|f\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{N}{N-1}}\,dt\,,$$

da cui si ottiene

$$\int_\Omega |\nabla u|^q \le C(\Omega, q) A^q + C(N, S, \alpha, q)\,A^{q-\frac{N}{N-1}}\,\|f\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{N}{N-1}}\,.$$

Scegliendo $A = \|f\|_{L^1(\Omega)}$ si ottiene

$$\int_\Omega |\nabla u|^q \le C_q\,\|f\|_{L^1(\Omega)}^q\,,$$

come volevasi dimostrare. □

OSSERVAZIONE 2. Dal momento che l'equazione è lineare, se u e v sono soluzioni di (2) con dati f e g rispettivamente, si ha

$$\|u - v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \le C_q\,\|f - g\|_{L^1(\Omega)}$$

La precedente osservazione permette di dimostrare un teorema di esistenza di soluzioni per (2) se il dato è in $L^1(\Omega)$.

TEOREMA 3. *Sia f in $L^1(\Omega)$. Allora esiste almeno una soluzione di* (2) *con dato f, nel senso che esiste u in $W_0^{1,q}(\Omega)$, per ogni $q < \frac{N}{N-1}$, tale che*

$$\int_\Omega A(x)\,\nabla u \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega f\,\varphi\,, \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)\,.$$

Dimostrazione. Data f in $L^1(\Omega)$, sia $f_n = T_n(f)$. Chiaramente, ognuna delle f_n è in $L^\infty(\Omega)$; inoltre, f_n converge a f in $L^1(\Omega)$ per il teorema di Lebesgue.

Dato che le f_n sono in $L^\infty(\Omega)$, esiste ed è unica la soluzione u_n (in $H_0^1(\Omega)$) di (2) con dato f_n. Per il Teorema 1 si ha allora, fissato $q < \frac{N}{N-1}$,

$$\|u_n\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq C_q \|f_n\|_{L^1(\Omega)},$$

cosicché la successione $\{u_n\}$ è limitata in $W_0^{1,q}(\Omega)$. Grazie all'Osservazione 2, si ha

$$\|u_n - u_m\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq C_q \|f_n - f_m\|_{L^1(\Omega)},$$

e quindi la successione $\{u_n\}$ è di Cauchy in $W_0^{1,q}(\Omega)$, che è completo. Detto u il limite delle u_n, le convergenze di u_n e di f_n sono sufficienti per passare al limite nella (3), a patto di scegliervi funzioni test non in $H_0^1(\Omega)$ (si osservi che $\frac{N}{N-1} < 2$ dato che $N \geq 3$) ma in $C_0^1(\Omega)$. □

Una volta dimostrata l'esistenza di una soluzione, rimane però aperto il problema dell'unicità di tale soluzione. Non è infatti pi possibile scegliere come funzione test la soluzione stessa (non avendo la regolarità sufficiente) e quindi non si può concludere che una soluzione nel senso delle distribuzioni con dato $f \equiv 0$ sia obbligatoriamente la funzione nulla.

Un primo risultato (positivo) verso l'unicità della soluzione è dato dal seguente risultato.

Teorema 4. *Date f_n e g_n due successioni di funzioni in $L^\infty(\Omega)$ convergenti ad f in $L^1(\Omega)$, e dette u_n e v_n le soluzioni di (2) con dati f_n e g_n rispettivamente, allora u_n e v_n convergono alla stessa funzione u.*

Dimostrazione. È ancora una conseguenza del Teorema 1 e della linearità dell'equazione. Dal momento che $u_n - v_n$ risolve (2) con dato $f_n - g_n$, si ha

$$\|u_n - v_n\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq C_q \|f_n - g_n\|_{L^1(\Omega)},$$

e quindi $u_n - v_n$ tende a zero. □

In altre parole, la soluzione di (2) data dal Teorema 3 non dipende dalla successione scelta per approssimare f (a patto che si scelga una successione "ragionevole", fatta cioè di funzioni limitate).

Il precedente risultato non afferma però che la soluzione nel senso delle distribuzioni è unica. D'altra parte, di tali soluzioni ce ne possono essere infinite, come affermato dal seguente risultato.

Teorema 5 (Serrin, 1965). *Sia $A^\varepsilon(x)$ la matrice le cui componenti sono date da*

$$a_{ij}^\varepsilon(x) = \delta_{ij} + (a_\varepsilon - 1)\,\frac{x_i\,x_j}{|x|^2}\,.$$

Se $a_\varepsilon = \frac{N-1}{\varepsilon(N-2+\varepsilon)}$, allora la funzione

$$w^\varepsilon(x) = x_1\,|x|^{1-N+\varepsilon}\,,$$

è soluzione nel senso delle distribuzioni di

$$-\mathrm{div}(A^\varepsilon\,\nabla w^\varepsilon) = 0\,, \quad \text{in } \mathbb{R}^N.$$

Sia ora $\Omega = B_1(0)$, la sfera unitaria di $\mathbb{R}^N$. Sulla frontiera di Ω la funzione $u^\varepsilon(x)$ vale x_1 ed è quindi regolare. Calcolando $\mathrm{div}(A^\varepsilon(x)\,\nabla x_1)$ si ottiene una funzione appartenente ad $L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ (anche più sommabile, invero) e dunque esiste ed è unica la soluzione v^ε in $H_0^1(\Omega)$ del problema

$$-\mathrm{div}(A^\varepsilon(x)\,\nabla v^\varepsilon) = -\mathrm{div}(A^\varepsilon(x)\,\nabla x_1)\,, \quad \text{in } \Omega,$$

con condizioni nulle al bordo. La funzione $z^\varepsilon = v^\varepsilon - x_1$ è allora l'unica soluzione in $H^1(\Omega)$ del problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A^\varepsilon(x)\,\nabla z^\varepsilon) = 0 & \text{in } \Omega, \\ z^\varepsilon = x_1 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Definendo allora $u^\varepsilon = w^\varepsilon - z^\varepsilon$, abbiamo una soluzione (nel senso delle distribuzioni) di

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A^\varepsilon(x)\,\nabla u^\varepsilon) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Tale soluzione non è identicamente nulla dal momento che w^ε non appartiene ad $H^1(\Omega)$, ma solo allo spazio (più grande) $W_0^{1,q}(\Omega)$, con $q < q_\varepsilon = \frac{N}{N-1+\varepsilon}$, ed è dunque diversa da z^ε.

Avendo trovato una soluzione non nulla del problema omogeneo, è allora chiaro che l'equazione

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A^\varepsilon(x)\,\nabla u) = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

con f in $L^1(\Omega)$ ha infinite soluzioni nel senso delle distribuzioni, della forma $u = \bar{u} + t\,u^\varepsilon$ ($t \in \mathbb{R}$), essendo $\bar{u}$ l'unica soluzione del problema trovata per approssimazione.

Ci chiediamo a questo punto se sia possibile "aggiungere" alla definizione di soluzione nel senso delle distribuzioni delle proprietà ulteriori in grado di garantire l'unicità. Una prima possibilità "ragionevole" è quella di richiedere che la soluzione appartenga a **tutti** gli spazi di Sobolev $W_0^{1,q}(\Omega)$ con $q < \frac{N}{N-1}$. Si noti infatti che la soluzione data dal controesempio di Serrin è solo in *alcuni* spazi $W_0^{1,q}(\Omega)$ con $q < \frac{N}{N-1}$, ma non in tutti (proprietà di cui gode invece la soluzione ottenuta per approssimazione).

Sfortunatamente, è possibile modificare (in dimensione maggiore di 2) il controesempio di Serrin in modo da ottenere una soluzione non nulla del problema omogeneo, appartenente a tutti gli spazi di Sobolev $W_0^{1,q}(\Omega)$ con $q < \frac{N}{N-1}$.

Una seconda possibilità consiste nell'aggiungere al concetto di soluzione nel senso delle distribuzioni la proprietà di avere tutte le troncate in $H_0^1(\Omega)$ (proprietà di cui gode la soluzione ottenuta per approssimazione, si veda (5)). In questa maniera si "elimina" il controesempio di Serrin (dato che le troncate di u^ε non sono in $H^1(\Omega)$) e la sua "modificazione". Anche in questo caso, però, non si è in grado di dimostrare l'unicità di una tale soluzione.

Si deve, perciò, scegliere un'altra via: è questa l'idea di Stampacchia nel 1965.

Ricordiamo (si veda il Teorema 2.2.2) che se f appartiene ad $L^p(\Omega)$ con $p > \frac{N}{2}$, allora l'unica soluzione u in $H_0^1(\Omega)$ del problema (2) appartiene ad $L^\infty(\Omega)$ e si ha

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \, \|f\|_{L^p(\Omega)} \,, \tag{7}$$

con C dipendente solo da Ω, N e p.

Supponiamo ora di avere due dati regolari f e g, con le corrispondenti soluzioni u e v di (2). Dal momento che u e v sono in $H_0^1(\Omega)$, è possibile scegliere una come funzione test nella formulazione di soluzione debole dell'altra, e viceversa. Dal momento che la matrice A è simmetrica, si ha

$$\int_\Omega u\, g = \int_\Omega A(x)\, \nabla v \cdot \nabla u = \int_\Omega A(x)\, \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\, v.$$

In altre parole, detta $R(g)$ la soluzione v di (2) con dato g regolare, si ha (se u risolve (2) con dato f regolare

$$\int_\Omega u\, g = \int_\Omega f\, R(g)\,.$$

L'idea di Stampacchia consiste nell'osservare che quest'ultima formula ha senso anche se u ed f sono in $L^1(\Omega)$, a patto che g ed $R(g)$ siano funzioni di $L^\infty(\Omega)$. Questo fatto — ed il fatto che l'identità valga nel caso in cui i dati (e dunque le soluzioni) siano regolari — è il motivo della seguente definizione di soluzione.

Definizione 6. Data f in $L^1(\Omega)$, una funzione u in $L^1(\Omega)$ si dice **soluzione per dualità** di (2) (con dato f), se

$$\int_\Omega u\, g = \int_\Omega f\, R(g)\,, \quad \forall g \in L^\infty(\Omega) \text{ tali che } R(g) \in L^\infty(\Omega)\,.$$

Ricordando la (7), è evidente che la definizione di soluzione per dualità si può così riformulare: una funzione u in $L^1(\Omega)$ si dice **soluzione per dualità** di (2) (con dato f in $L^1(\Omega)$) se

$$\int_\Omega u\, g = \int_\Omega f\, R(g)\,, \quad \forall g \in L^\infty(\Omega)\,,$$

dato che $R(g)$ è automaticamente in $L^\infty(\Omega)$ se g è in $L^\infty(\Omega)$. Dopo aver dato la definizione di soluzione, Stampacchia dimostra il seguente risultato.

Teorema 7. *Sia f in $L^1(\Omega)$. Allora esiste un'unica soluzione u per dualità di* (2). *Inoltre, u appartiene a $L^r(\Omega)$ per ogni $r < \frac{N}{N-2}$.*

Dimostrazione. Sia $p > \frac{N}{2}$, e sia g in $L^p(\Omega)$. Allora $R(g)$ è in $L^\infty(\Omega)$ per la (7), cosicché è ben definito l'operatore T da $L^p(\Omega)$ in $\mathbb{R}$ dato da

$$T(g) = \int_\Omega f\, R(g)\,.$$

Tale operatore è evidentemente lineare (essendo l'equazione lineare) ed inoltre, sempre per la (7),

$$|T(g)| \leq \int_\Omega |f|\, |R(g)| \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \|R(g)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\, \|f\|_{L^1(\Omega)} \|g\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

In altre parole, T è un operatore lineare e continuo da $L^p(\Omega)$ in $\mathbb{R}$, ovvero un elemento del duale di $L^p(\Omega)$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste allora un'unica funzione u in $L^{p'}(\Omega)$ tale che

$$T(g) = \int_\Omega u\, g\,, \quad \forall g \in L^p(\Omega)\,.$$

Ricordando la definizione di T ed il fatto che $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, otteniamo allora

$$\int_\Omega u\, g = \int_\Omega f\, R(g)\,, \quad \forall g \in L^\infty(\Omega)\,,$$

cosicché u è soluzione per dualità di (2). Essendo $p > \frac{N}{2}$, si ha $p' < \frac{N}{N-2}$, come volevasi dimostrare. □

Osservazione 8. A voler essere precisi, il teorema precedente fornisce un'unica soluzione per dualità u in $L^{p'}(\Omega)$ di (2) per ogni p **fissato** e maggiore di $\frac{N}{2}$. In altre parole, dalla dimostrazione precedente discende l'esistenza di una soluzione u_p per dualità, soluzione *a priori* dipendente da p. Dal momento, però, che si ha

$$\int_\Omega u_{p_1}\, g = \int_\Omega u_{p_2}\, g\,, \quad \forall g \in L^\infty(\Omega)\,,$$

e per ogni p_1, p_2 maggiori di $\frac{N}{2}$, si vede subito che $u_{p_1} = u_{p_2}$ quasi ovunque. In definitiva, la soluzione per dualità non dipende dalla scelta di p.

E le derivate? Dalla definizione di soluzione per dualità non si ricavano informazioni sulle derivate della u: una soluzione per dualità è infatti "solo" una funzione di $L^1(\Omega)$. Vale però il seguente teorema.

Teorema 9. *Sia f in $L^1(\Omega)$. Allora la soluzione u per dualità di* (2) *con dato f è una soluzione per approssimazione, e quindi appartiene a $W_0^{1,q}(\Omega)$ per ogni $q < \frac{N}{N-1}$.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $L^\infty(\Omega)$ convergente ad f in $L^1(\Omega)$. Per il Teorema 3, le soluzioni u_n di (2) con dati f_n convergono in $W_0^{1,q}(\Omega)$ (con $q < \frac{N}{N-1}$) alla soluzione u per approssimazione di (2) con dato f. Dal momento che la convergenza in $W_0^{1,q}(\Omega)$ implica la convergenza in $L^1(\Omega)$, è possibile passare al limite su n nelle identità (valide per l'essere u_n soluzioni con dati regolari)

$$\int_\Omega u_n\, g = \int_\Omega f_n\, R(g)\,, \quad \forall g \in L^\infty(\Omega)\,,$$

ottenendo che u è soluzione per dualità. □

Osservazione 10. L'essere la soluzione per dualità una soluzione ottenuta per approssimazione implica — con una dimostrazione alternativa a quella del Teorema 4 — l'unicità di quest'ultima.

Il concetto di soluzione per dualità può essere esteso a dati meno "regolari" delle funzioni $L^1(\Omega)$.

Definizione 11. Sia μ una misura a variazione limitata su Ω. Una funzione u in $L^1(\Omega)$ si dice soluzione per dualità di (2) con dato μ se

$$\int_\Omega u\, g = \int_\Omega R(g)\, d\mu\,, \quad \forall g \in L^\infty(\Omega) \text{ tali che } R(g) \in C^0(\bar{\Omega})\,.$$

Si può dimostrare, sotto opportune ipotesi di regolarità sulla frontiera di Ω, che la soluzione di (2) è continua se il dato g è in $L^\infty(\Omega)$, cosicché anche la richiesta "$R(g)$ in $C^0(\bar{\Omega})$" può essere eliminata nella definizione di soluzione per dualità con dato misura. Con lo stesso metodo usato per i dati in $L^1(\Omega)$ si riesce a dimostrare che esiste un'unica soluzione per dualità di (2) per ogni μ misura a variazione limitata.

Definizione 12. Sia y in Ω. Definiamo $G_y(x)$ la soluzione per dualità di (2) con dato $\mu = \delta_y$, la delta di Dirac concentrata in y. G si dice "funzione di Green".

Per definizione di soluzione per dualità si ha, ovviamente

$$\int_\Omega G_y(x)\, g(x) = \int_\Omega R(g)(x)\, d\delta_y(x) = R(g)(y)\,, \quad \forall g \in L^\infty(\Omega)\,.$$

Leggendo quest'ultima formula "al contrario" otteniamo una formula di rappresentazione per le soluzioni di (2) con dati regolari: se g è in $L^\infty(\Omega)$, l'unica soluzione $v = R(g)$ in $H_0^1(\Omega)$ di (2) è data da

$$v(y) = \int_\Omega G_y(x)\, g(x)\, dx\,, \quad \forall y \in \Omega\,.$$

Si può dimostrare che $G_y(x) = G_x(y)$ (per ogni $x \neq y$) e che, per ogni compatto K in Ω, esistono due costanti A_k e B_k tali che

$$\frac{A_k}{|x-y|^{N-2}} \leq G_y(x) \leq \frac{B_k}{|x-y|^{N-2}}\,, \quad \forall x\,, y \in K\,,\ x \neq y\,.$$

In altre parole, la funzione G ha lo stesso comportamento della soluzione fondamentale del laplaciano (fatto questo che non dovrebbe stupire...).

Un'equazione non lineare

Supponiamo ora di avere una funzione $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che

$$\alpha \leq a(s) \leq \beta\,, \quad \forall s \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

con $0 < \alpha \leq \beta$ costanti reali. Ci chiediamo se, data f in $L^2(\Omega)$, esista una soluzione debole dell'equazione

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(u)\,\nabla u) = f & \text{in } \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

ovvero una funzione u di $H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega a(u)\,\nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\,v\,, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Si noti che, essendo $a(u)$ in $L^\infty(\Omega)$ per ogni u misurabile, l'integrale a primo membro è ben definito.

Una prima risposta, positiva, segue da un semplice cambio di variabile: detta

$$A(s) = \int_0^s a(t)\,dt\,,$$

e posta $v = A(u)$, allora $\nabla v = A'(u)\,\nabla u = a(u)\,\nabla u$, cosicché u risolve (2) se e solo se v risolve in $H_0^1(\Omega)$ l'equazione $-\Delta v = f$. Siccome quest'ultima equazione ha una ed una sola soluzione, ed A è invertibile (essendo iniettiva), $u = A^{-1}(R(f))$ risolve (2).

Sfortunatamente, il "trucco" del cambio di variabile non è più applicabile nel caso in cui la funzione a dipenda anche da x, il che vuol dire che nel caso generale è necessario seguire un'altra strada.

Una strada sbagliata

Un primo tentativo possibile consiste, per analogia con il caso dell'operatore lineare, nel considerare il funzionale

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega a(u)\,|\nabla u|^2 - \int_\Omega f\,u\,, \quad u \in H_0^1(\Omega)\,,$$

e vedere se ad esso si può applicare il teorema di Weierstrass. Essendo $a(s) \geq \alpha > 0$ si vede facilmente che se $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ diverge, allora $J(u)$ diverge. D'altra parte, se u_n converge debolmente ad u in $H_0^1(\Omega)$, è facile dimostrare la debole semicontinuità inferiore di J passando al limite nell'identità

$$0 \leq \int_\Omega a(u_n)\,|\nabla u_n|^2 + \int_\Omega a(u_n)\,|\nabla u|^2 - 2\int_\Omega a(u_n)\,\nabla u_n \cdot \nabla u\,,$$

ed usando la continuità (per il teorema di Rellich-Kondrachov) del termine $\int f\,u$.

Dal teorema di Weierstrass segue allora l'esistenza del minimo u di J su $H_0^1(\Omega)$:

$$J(u) \leq J(v)\,, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Fin qui tutto bene; quale equazione possiamo però scrivere (in forma debole) per u? Partendo dalla disuguaglianza $J(u) \leq J(u+tv)$ si arriva, dopo alcuni passaggi, a

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{2} & \int_\Omega [a(u+tv) - a(u)]\,|\nabla u|^2 \\ & + t \int_\Omega a(u+tv)\,\nabla u \cdot \nabla v + \frac{t^2}{2} \int_\Omega a(u+tv)\,|\nabla v|^2 - t \int_\Omega f\,v\,. \end{aligned}$$

Dividendo per $t > 0$ e passando al limite per t tendente a zero, si troverebbe (se ogni passaggio fosse lecito)

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_\Omega a'(u)\,|\nabla u|^2\,v + \int_\Omega a(u)\,\nabla u \cdot \nabla v - \int_\Omega f\,v\,,$$

e la disuguaglianza opposta dividendo per $t < 0$. Dunque, u in $H_0^1(\Omega)$ sarebbe tale che

$$\int_\Omega a(u)\,\nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{2} \int_\Omega a'(u)\,|\nabla u|^2\,v = \int_\Omega f\,v\,, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Il problema, nell'identità appena scritta, è duplice. Innanzitutto la funzione a è solo continua, per cui $a'(s)$ non esiste. Poco male, aggiungiamo l'ipotesi che a sia derivabile con derivata continua (si noti, però, che tale ipotesi è superflua per ottenere l'esistenza del minimo). Successivamente, ed anche se a è derivabile, il termine

$$\int_\Omega a'(u)\,|\nabla u|^2\,v$$

non è detto sia definito per ogni v in $H_0^1(\Omega)$: già il termine $|\nabla u|^2$ da solo è solamente in $L^1(\Omega)$. Il che vuol dire che dobbiamo "restringere" la classe delle funzioni test, passando da $H_0^1(\Omega)$ a $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$; e non basta: dobbiamo aggiungere anche l'ipotesi $a'(s)$ limitata (il fatto che a sia limitata non implica che lo sia la sua derivata...).

Fatte tutte queste ipotesi, ogni minimo u di J è tale che

$$\int_\Omega a(u)\,\nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{2} \int_\Omega a'(u)\,|\nabla u|^2\,v = \int_\Omega f\,v\,, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\,,$$

ed è quindi soluzione debole dell'equazione

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(u)\,\nabla u) + \frac{1}{2}\,a'(u)\,|\nabla u|^2 = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

la quale si guarda però bene dall'essere (2): abbiamo sbagliato strada, sostanzialmente perché la derivata del prodotto non è il prodotto delle derivate!

Osservazione 1. Non trovate strano il fatto che il minimo u sia in $H_0^1(\Omega)$ nonostante il termine $a'(u)\,|\nabla u|^2$ sia solo in $L^1(\Omega)$? Non c'è contraddizione con quello che abbiamo visto studiando il problema con dati $L^1(\Omega)$?

La strada giusta

Fissiamo v in $L^2(\Omega)$. Allora, essendo $a(v)$ una funzione limitata e strettamente positiva, la matrice $A(x) = a(v(x))\,I$ è uniformemente ellittica e simmetrica ed esiste quindi unica la soluzione u in $H_0^1(\Omega)$ del problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(v)\,\nabla u) = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

In altre parole, è ben definita l'applicazione $S : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ data da $S(v) = u$. Inoltre, dato che $H_0^1(\Omega)$ si immerge in $L^2(\Omega)$, S può essere vista come un'applicazione da $L^2(\Omega)$ in sé. È a questo punto chiaro che una soluzione di (2) è un punto fisso per S. Proviamo ad applicare il teorema delle contrazioni?

Siano v e w in $L^2(\Omega)$, e siano $u = S(v)$ e $z = S(w)$. Scegliendo $u - z$ come funzione test nelle formulazioni deboli per u e z e sottraendo, si ottiene

$$\int_\Omega a(v)\,\nabla u \cdot \nabla(u-z) - \int_\Omega a(w)\,\nabla z \cdot \nabla(u-z) = 0\,,$$

da cui

$$\int_\Omega a(v)\,\nabla(u-z) \cdot \nabla(u-z) = \int_\Omega [a(v) - a(w)]\,\nabla z\, \cdot \nabla(u-z)$$

Ricordando l'ellitticità di a, ed applicando la disuguaglianza di Hölder, si ha

$$\alpha\,\|u-z\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \|a(v) - a(w)\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|z\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|u-z\|_{H_0^1(\Omega)}\,.$$

Ricordando che $\|z\|_{H_0^1(\Omega)} \le R$, si ottiene allora

$$\alpha\,\|u-z\|_{H_0^1(\Omega)} \le R\,\|a(v) - a(w)\|_{L^\infty(\Omega)}\,,$$

Usando la disuguaglianza di Poincaré si ottiene allora

$$\|S(v) - S(w)\|_{L^2(\Omega)} = \|u-z\|_{L^2(\Omega)} \le B\,\|a(v) - a(w)\|_{L^\infty(\Omega)}\,.$$

Possiamo andare avanti da qui senza ulteriori ipotesi? A destra avremmo bisogno di controllare $a(v) - a(w)$ con $v - w$ e senza supporre che a sia lipschitziana non ci riusciamo. Poco male, aggiungiamo l'ipotesi di lipschitzianità su a. Otteniamo allora

$$\|S(v) - S(w)\|_{L^2(\Omega)} \leq B\,L\,\|v - w\|_{L^\infty(\Omega)}\,.$$

Siamo contenti? Di nuovo, no: non c'è modo di controllare la norma di $v - w$ in $L^\infty(\Omega)$ con la norma di $v - w$ in $L^2(\Omega)$ (vale infatti la disuguaglianza opposta). Si può sostituire la norma in $L^2(\Omega)$ a sinistra con la norma in $L^\infty(\Omega)$? La dimostrazione del teorema di Stampacchia funziona? Innanzitutto dobbiamo prendere f più regolare di $L^2(\Omega)$ per avere $S(v)$ in $L^\infty(\Omega)$ (serve f in $L^p(\Omega)$, con $p > \frac{N}{2}$). Poi, scegliendo $G_k(u-z)$ come funzione test nelle due equazioni e sottraendo si ottiene

$$\int_\Omega a(v)\,\nabla(u-z)\cdot\nabla G_k(u-z) = \int_\Omega [a(v) - a(w)]\,\nabla z\,\cdot\nabla G_k(u-z)\,.$$

Usando l'ellitticità da una parte e la disuguaglianza di Hölder dall'altra, si arriva a

$$\alpha\,\int_\Omega |\nabla G_k(u-z)|^2 \leq \left(\int_{A_k} |a(v) - a(w)|^2\,|\nabla z|^2\right)^{\frac12}\,\left(\int_\Omega |\nabla G_k(u-z)|^2\right)^{\frac12}\,,$$

dove $A_k = \{|u - z| > k\}$. Semplificando ed elevando al quadrato, si ottiene

$$\int_\Omega |\nabla G_k(u-z)|^2 \leq C\int_{A_k} |a(v) - a(w)|^2\,|\nabla z|^2\,.$$

Sfortunatamente a destra c'è una funzione che, anche supponendo a lipschitziana, è solo in $L^1(\Omega)$; in altre parole, non possiamo applicare la disuguaglianza di Hölder una seconda volta per ottenere una potenza della misura di A_k (che era la chiave per far funzionare il metodo di Stampacchia e la stima in $L^\infty(\Omega)$).

In sostanza, il metodo delle contrazioni non funziona: non c'è modo di stimare una norma delle soluzioni con la stessa norma dei "dati".

Fortunatamente, il teorema delle contrazioni non è l'unico teorema di punto fisso esistente...

Teorema 2 (Schauder). *Sia K un convesso chiuso e limitato di uno spazio di Banach e sia $S : K \to K$ un'applicazione continua tale che $\overline{S(K)}$ sia compatto. Allora esiste almeno un punto fisso di S.*

Per applicare il teorema di Schauder nel nostro caso, osserviamo innanzitutto che esiste $R > 0$ tale che $\|S(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq R$ per ogni

v in $L^2(\Omega)$. Scegliendo infatti $u = S(v)$ come funzione test nella formulazione debole di (3), ed usando l'ellitticità, si ha

$$\text{(4)} \qquad \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 \le \int_\Omega a(v)\, |\nabla u|^2 = \int_\Omega f\, u \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} .$$

Ricordando la disuguaglianza di Poincaré, si ottiene

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} ,$$

e quindi la tesi con $R = C \|f\|_{L^2(\Omega)}$. In questa maniera, la sfera di $L^2(\Omega)$ raggio R è un convesso chiuso e limitato invariante per S. Mostriamo ora che S è continua. Sia $\{v_n\}$ una successione convergente a v in $L^2(\Omega)$, e siano $u_n = S(v_n)$ le corrispondenti soluzioni di (3). Dalla (4) si ottiene, ricordando che la norma di u_n in $L^2(\Omega)$ è minore di R,

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \le R \|f\|_{L^2(\Omega)} ,$$

da cui segue la limitatezza di u_n in $H^1_0(\Omega)$. Possiamo dunque estrarre sottosuccessioni da v_n ed u_n in modo tale che v_n converga a v quasi ovunque e che u_n converga ad u debolmente in $H^1_0(\Omega)$ e fortemente in $L^2(\Omega)$. A questo punto è possibile passare al limite su n nelle identità

$$\int_\Omega a(v_n)\, \nabla u_n \cdot \nabla z = \int_\Omega f\, z\,, \quad \forall z \in H^1_0(\Omega)\,,$$

per dimostrare che u è soluzione di (3) con $a(v)$, ovvero che $u = S(v)$ (per l'unicità della soluzione di (3)). Dal momento che il limite u non dipende dalle sottosuccessioni estratte, tutta la successione $u_n = S(v_n)$ converge ad $u = S(v)$, e quindi S è continua.

Rimane da dimostrare la compattezza di $\overline{S(K)}$. Abbiamo però appena dimostrato che $S(K)$ è limitato in $H^1_0(\Omega)$: per il teorema di Rellich-Kondrachov, $S(K)$ è precompatto in $L^2(\Omega)$, come volevasi dimostrare.

In definitiva, applicando il teorema di Schauder all'operatore S, si dimostra che esiste almeno una soluzione di (2).