LT in Informatica, Canale M-Z, Prof. Paolo Papi - Anno accademico 2017/2018

Algebra

Foglio 1 di esercizi

Esercizio 1. Dimostrare che $f : A \to B$ è biunivoca se e solo se esiste $g : B \to A$ tale che $g \circ f = id_A$, $f \circ g = Id_B$.

Esercizio 2. Sia $g\colon R \to S$ una funzione.
Siano $R_1, R_2 \subset R$ sottoinsiemi di R e siano $S_1, S_2 \subset S$ sottoinsiemi di S.

(i) Dimostrare che $g(R_1 \cup R_2) = g(R_1) \cup g(R_2)$ e $g(R_1 \cap R_2) \subset g(R_1) \cap g(R_2)$.
(ii) Trovare un esempio in cui $g(R_1 \cap R_2) \neq g(R_1) \cap g(R_2)$.
(iii) Dimostrare che, se g è iniettiva, allora $g(R_1 \cap R_2) = g(R_1) \cap g(R_2)$.
(iv) Dimostrare che $g^{-1}(S_1 \cap S_2) = g^{-1}(S_1) \cap g^{-1}(S_2)$ e $g^{-1}(S_1 \cup S_2) = g^{-1}(S_1) \cup g^{-1}(S_2)$.
(v) Dimostrare che $g^{-1}(g(R_1)) \supset R_1$ e trovare un esempio in cui $g^{-1}(g(R_1)) \neq R_1$.
(vi) Dimostrare che $g(g^{-1}(S_1)) \subset S_1$ e trovare un esempio in cui $g(g^{-1}(S_1)) \neq S_1$.

Esercizio 3. Siano $p, q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ le funzioni

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{q} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{p} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & [x] \end{array}$$

dove la *parte intera* $[x]$ di x è il *massimo* $n \in \mathbb{Z}$ tale che $n \leq x$.

(i) Dire se p, q sono iniettive. Dire se sono suriettive.
(ii) Verificare che $p \circ q \neq q \circ p$.

Esercizio 4. Siano $\mathscr{R}, \mathscr{S}, \mathscr{T}$ le relazioni sull'insieme $\mathbb{R}$ definite come segue:

(i) dati $x, y \in \mathbb{R}$, dichiariamo $x\mathscr{R}y$ se $2x = -2y$.
(ii) dati $x, y \in \mathbb{R}$, dichiariamo $x\mathscr{T}y$ se $x^2 - 2|xy| + y^2 = 0$.
(iii) dati $x, y \in \mathbb{R}$, dichiariamo $x\mathscr{S}y$ se $x + 3x^2 + 7x^3 = y + 3y^2 + 7y^3$.

Determinare quali tra $\mathscr{R}, \mathscr{S}, \mathscr{T}$ sono relazioni di equivalenza.

Esercizio 5. Dato un'insieme X, denotiamo con $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X, ovvero l'insieme dei sottoinsiemi di X. Stabilire una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{P}(X)$ e l'insieme 2^X di tutte le funzioni $f : X \to \{0, 1\}$. Dedurre che se X ha n elementi, $\mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi. Provare infine quest'ultima asserzione per induzione su n.

Esercizio 6. Dimostrare per induzione l'enunciato seguente:

$$\boxed{\text{per ogni intero } n \geq 1, \text{ vale } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)}$$

dove il simbolo $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ significa $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$.

Esercizio 7. Siano S, T relazioni d'ordine su insiemi A, B, rispettivamente. Dimostrare che la relazione R su $X = A \times B$ definita da

$$(a_1, b_1) R (a_2, b_2) \iff a_1 S a_2 \text{ e } b_1 T b_2$$

è una relazione d'ordine. Descrivere tale ordine quando $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$ ed entrambi gli insiemi sono dotati dell'ordine naturale. Precisamente, disegnare il cosiddetto grafo di Hasse, avente per vertici gli elementi di X e un lato tra x, y se xRy e $xRz, zRy \implies x = z$ o $z = y$.