

Algebra

FOGLIO 2 DI ESERCIZI

Esercizio 1. Sia

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \sim$$

ove

$$(m, n) \sim (h, k) \iff mk = nh.$$

Dimostrare che \sim è una relazione di equivalenza; detta $[(m, n)]$ la classe di (m, n) dimostrare che le operazioni

$$[(m, n)] + [(h, k)] = [(mk + nh, hk)], \quad [(m, n)] \cdot [(h, k)] = [(mh, nk)]$$

sono ben poste e che $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un campo.

Esercizio 2. Si provi che in \mathbb{Z} valgono le seguenti leggi di cancellazione:

$$ac = bc, c \neq 0 \implies a = b$$

$$ca = c, c \neq 0 \implies a = b$$

Esercizio 3. Eseguire le seguenti divisioni euclidee

$$123 : 34, \quad -123 : 34, \quad -12 : (-5), \quad 389 : (-111).$$

Esercizio 4. Calcolare il MCD e il mcm delle seguenti coppie di interi. Scrivere poi un'identità di Bezout

$$(68, 23), \quad (680, 230), \quad (6801, 2301)$$

Esercizio 5. Si scriva la tabella della somma in \mathbb{Z}_7 e \mathbb{Z}_8 . Si determinino gli elementi invertibili di \mathbb{Z}_{21} e si trovi per ciascun elemento l'inverso.