Algebra

FOGLIO 4 DI ESERCIZI

Esercizio 1. Dimostrare che un gruppo di ordine minore o uguale a quattro è abeliano.

Esercizio 2. Sia G un gruppo.

- Se G è abeliano, allora $(ab)^n = a^n b^n$ per ogni $a, b, \in G$.
- Se $(ab)^2 = a^2 b^2$ per ogni $a, b, \in G$ allora G è abeliano.

Esercizio 3. Sia G un gruppo. Dimostrare che $H \leq G$ se e solo se $ab^{-1} \in H$ per ogni $a, b \in H$.

Esercizio 4. Siano S, T sottogruppi di un gruppo G. Dimostrare che

$$ST = \{st \mid s \in S, t \in T\}$$

è un sottogruppo di G se e se solo se $ST = TS$ (ovvero se dati $s \in S, t \in T$ esistono $s' \in S, t' \in T$ tali che $st = y's'$).

Esercizio 5. Si determinino gli ordini degli elementi di $\mathbb{Z}_{20}$. Determinare poi $U(\mathbb{Z}_{15})$ e scriverne la tabella moltiplicativa

---

Esercizio 6. In S_8 si considerimo le seguneti permutazioni

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 8 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 5 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Scrivere tali permutazioni come prodotto di cicli disgiunti e come prodotto di trasposizioni; calcolarne parità e ordine. Stesso esercizio per gli elementi $\alpha\beta\gamma$ e $\beta^{35}\alpha^{-12}\gamma^3$.

Esercizio 7. Si provi che S_{15} ha almeno un sottogruppo di ordine $13, 26, 35$.

Esercizio 8. Disegnare il diagramma di Hasse del reticolo dei sottogruppi di $\mathbb{Z}_{630}$.