

Algebra

FOGLIO 6 DI ESERCIZI

Esercizio 1. Dimostrare che il nucleo di un omomorfismo $\phi : G \rightarrow G'$ è un sottogruppo normale di G .

Esercizio 2. Dimostrare che un sottogruppo di indice due è normale.

Esercizio 3. Dimostrare che per un sottogruppo N di un gruppo G le seguenti condizioni sono equivalenti

- (1) N è normale in G ;
 - (2) $xNx^{-1} = N$ per ogni $x \in G$;
 - (3) $xnx^{-1} \in N$ per ogni $x \in G$ e $n \in N$;
 - (4) N è unione di classi coniugate.
-

Esercizio 4. Sia G un gruppo e sia

$$Z(G) = \{g \in G \mid xg = gx \forall x \in G\}.$$

Dimostrare che è un sottogruppo normale di G . $Z(G)$ è detto *centro* di G .

Esercizio 5. Un *automorfismo* di un gruppo G è un isomorfismo $G \rightarrow G$. Dimostrare che

- (1) Se G è abeliano allora $x \mapsto x^{-1}$ è un automorfismo di G ;
 - (2) Se G è qualsiasi e $g \in G$ allora $T_g : x \mapsto gxg^{-1}$ è un automorfismo di G (detto automorfismo interno associato a g).
-

Esercizio 6. Sia G un gruppo, H un sottogruppo di G e N un sottogruppo normale di G . Dimostrare che HN è un sottogruppo di G .