LT in Informatica, Canale M-Z, Prof. Paolo Papi - Anno accademico 2017/2018

Algebra

Foglio 7 di esercizi

Esercizio 1. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di V sono sottospazi vettoriali.

(a) $V = \mathbb{R}^3$.

(1) $W_1 = \{(x_1, 0, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$.
(2) $W_2 = \{(x_1, 1, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$.
(3) $W_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.
(4) $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0\}$.
(5) $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$.

(b) $V = M_n(\mathbb{R})$

(1) $U_1 = \{A \in V \mid \ {}^tA\, A = I_n\}$.
(2) $U_2 = \{A \in V \mid \ {}^tA = A\}$.
(3) $U_3 = \{A \in V \mid \ {}^tA = -A\}$.
(4) $U_4 = \{A \in V \mid \ {}^tA = -2A\}$.
(5) $U_5 = \{A \in V \mid tr(A) = 0\}$. Ricordiamo che $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. U_5 si denota usualmente con $sl(n)$.
(6) $U_6 = \{A \in V \mid tr(A) = 1\}$.
(7) $U_7 = \{A \in V \mid a_{11} = 0\}$.
(8) $U_8 = \{A \in V \mid n \text{ qualsiasi elementi sono nulli}\}$.
(9) $U_9 = \{A \in V \mid n \text{ fissati elementi sono nulli}\}$.
(10) $U_{10} = \{A \in V \mid a_{11}a_{22} = 0\}$.
(11) $U_{11} = \{A \in V \mid a_{ij} = 0 \ \forall\ i \leq j\}$.
(12) $U_{12} = \{A \in V \mid a_{ij} = 0 \ \forall\ i < j\}$.

(c) $V = \mathbb{R}_n[t]$

(1) $Z_1 = \{p \in V \mid deg(p) = n - 2\}$.
(2) $Z_2 = \{p \in V \mid deg(p) \leq n - 2\}$.
(3) $Z_3 = \{p \in V \mid deg(p) < n - 2\}$.
(4) $Z_4 = \{p \in V \mid p(5) = 0\}$.
(5) $Z_5 = \{p \in V \mid p(0) = 0, p(1) = 1\}$.
(6) $Z_6 = \{p \in V \mid p(0) = 0, p'(1) = 0\}$. $(p'(x) = \frac{dp}{dx})$.

Esercizio 2. Nell'esercizio precedente si ponga $n = 3$; si determinino generatori lineari per i sottoinsiemi di V che sono sottospazi.

Esercizio 3. Nell'esercizio 1) si ponga $n = 3$; si determinino basi per i sottoinsiemi di V che sono sottospazi.

Esercizio 4. 4). Si determinino basi per lo spazio delle soluzioni dei sistemi lineari omogenei la cui matrice dei coeffcienti è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Stabilire in ogni caso se gli insiemi di vettori $v_1, v_2, \ldots$ sono linearmente dipendenti o indipendenti. Ricordiamo che T_n^+ sono le matrici triangolari superiori e S_n^+, S_n^-, quelle simmetriche, antisimmetriche, rispettivamente.

(1) $V = \mathbb{R}^2$, $\quad v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (2, 4)$, $v_3 = (-1, 0)$.
(2) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad v_1 = (1, 0, 3)$, $v_2 = (-2, 3, 4)$, $v_3 = (4, -1, 0)$.
(3) $V = \mathbb{R}^4$, $\quad v_1 = (1, -1, 1, -1)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$.
(4) $V = \mathbb{R}^4$, $\quad v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (1, 2, 0, 0), v_3 = (1, 0, 1, 0)$, $\qquad v_4 = (0, 0, 0, 2)$, $v_5 = (1, 1, 1, 1)$.
(5) $V = M_{2\,2}(\mathbb{R})$, $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(6) $V = T_2^+, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $V = S_3^-, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(8) $V = sl(2) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

(9) $V = \mathbb{R}_2[t], \quad v_1 = t + 2t^2,\ v_2 = 1 + t.$