LT in Informatica, Canale M-Z, Prof. Paolo Papi - Anno accademico 2017/2018

Algebra

Foglio 9 di esercizi

Esercizio 1. Provare che esiste un unico operatore lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $Ker(F)$ ha per base i vettori $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ e tale che $F((1,0,1)) = (2,3,4)$. Determinare la matrice di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ presa come base di partenza e di arrivo. Dire, infine, se il vettore $(1,2,3)$ appartiene a $Im(F)$.

Esercizio 2. Si consideri l'operatore lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$F(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori di F e dire se F è diagonalizzabile. (b) Determinare gli autovettori di F. (c) Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di F è diagonale.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Si consideri l'operatore lineare $F : V \to V$,

$$F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_0 + (a_2 - a_1)t + (a_0 + 2a_2)t^2.$$

(a) Scrivere la matrice A di F rispetto alla base $\{1, t, t^2\}$ presa come base di partenza e di arrivo in V. (b) Calcolare autovalori e autovettori per A. (c) Dire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 3x_3 - x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice di F rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^4$ presa come base di partenza in $\mathbb{R}^4$ e a $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ presa come base di arrivo in $\mathbb{R}^3$. (b) Determinare una base per $Ker(F)$ e una per $Im(F)$. (c) Si determini $F^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale V delle matrici reali quadrate 2×2 si consideri l'endomorfismo $F(X) = AX - XA$ ove $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) Si determini la matrice A di F rispetto alla base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

di V.

(2) Si determini una base di $Ker(F)$.

(3) Verificare che il polinomio caratteristico di F è $x^2(x^2 - 5)$. Studiare la diagonalizzabilità di F.