Algebra

Proff. A. D'Andrea e P. Papi

Primo esonero

10 novembre 2017

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	8	
4	8	
Totale	32	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 punti. Il tempo a disposizione è un'ora e cinquanta. Non si possono usare testi e i cellulari devono essere tenuti spenti e non in vista. Si possono consultare due fogli formato A4 con eventuali appunti.

Voto/30: | |

Esercizio 1.

- Elencare tutti i sottogruppi **normali** del gruppo simmetrico S_3.
- Elencare tutti gli elementi del gruppo moltiplicativo $U(\mathbb{Z}_{15}) = \mathbb{Z}_{15}^{\times}$ e dire se sia ciclico.
- L'applicazione $\phi : \mathrm{S}_4 \to \mathrm{S}_4$ manda ogni permutazione x nel suo cubo $x^3 = x \circ x \circ x$. Mostrare che ϕ non è un omomorfismo di gruppi.

Risoluzione:

Esercizio 2. Risolvere il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 2x \equiv 3 \mod 5 \\ 2x \equiv 4 \mod 6 \\ 2x \equiv 5 \mod 7. \end{cases}$$

Risoluzione:

Esercizio 3. Nel gruppo simmetrico S_{10} si considerino gli elementi:

$$x = (1\,3\,5\,7)(6\,8)(9\,10), \quad y = (1\,2\,3\,5)(6\,9)(8\,10).$$

- Determinare ordine e parità di xy.
- Esistono elementi in S_{10} che non sono coniugati ad xy ma hanno il suo stesso ordine?
- Calcolare $x^{2017}y^{-2017}$.

Risoluzione:

Esercizio 4. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dare una dimostrazione se è vera o esibire un controesempio se è falsa.

1. Se $H \subsetneqq \mathrm{S}_4$ è un sottogruppo, allora H è ciclico.
2. S_8 non possiede elementi di ordine 9.
3. Gli elementi non nulli di $\mathbb{Z}_{21}$ sono tutti moltiplicativamente invertibili.
4. Se a è un intero, allora $a^3 - a$ è multiplo di 6.

Risoluzione:

Algebra

Proff. A. D'Andrea e P. Papi

Primo esonero

10 NOVEMBRE 2017

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	8	
4	8	
Totale	32	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 punti. Il tempo a disposizione è un'ora e cinquanta. Non si possono usare testi e i cellulari devono essere tenuti spenti e non in vista. Si possono consultare due fogli formato A4 con eventuali appunti.

Voto/30: ☐

Esercizio 1.

- Elencare tutti i sottogruppi **normali** del gruppo simmetrico S_4.
- Elencare tutti gli elementi del gruppo moltiplicativo $U(\mathbb{Z}_7) = \mathbb{Z}_7^\times$ e dire se sia ciclico.
- L'applicazione $\phi : S_4 \to S_4$ manda ogni permutazione x nella sua quarta potenza $x^4 = x \circ x \circ x \circ x$. Mostrare che ϕ non è un omomorfismo di gruppi.

Risoluzione:

Esercizio 2. Risolvere il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 3x \equiv 2 \mod 5 \\ 3x \equiv 3 \mod 6 \\ 3x \equiv 4 \mod 7. \end{cases}$$

Risoluzione:

Esercizio 3. Nel gruppo simmetrico S_{10} si considerino gli elementi:

$$x = (1\,3\,6\,8)(5\,7)(9\,10), \quad y = (1\,2\,6\,9)(3\,5)(8\,10).$$

- Determinare ordine e parità di xy.
- Esistono elementi in S_{10} che non sono coniugati ad xy ma hanno il suo stesso ordine?
- Calcolare $x^{2017}y^{-2017}$.

Risoluzione:

Esercizio 4. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dare una dimostrazione se è vera o esibire un controesempio se è falsa.

1. Se $H \subsetneq S_3$ è un sottogruppo, allora H è ciclico.
2. S_7 non possiede elementi pari di ordine 6.
3. Gli elementi non nulli di $\mathbb{Z}_{17}$ sono tutti moltiplicativamente invertibili.
4. Se a è un intero, allora $a^5 - a$ è multiplo di 10.

Risoluzione: