Algebra

Proff. A. D'Andrea e P. Papi

Secondo esonero

12 gennaio 2018

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	8	
4	8	
Totale	32	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti. Il tempo a disposizione è due ore. Non si possono usare testi e i cellulari devono essere tenuti spenti e non in vista. Si possono consultare due fogli formato A4 con eventuali appunti.*

Voto/30: ☐

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}_3[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a tre, e

$$W = \{p \in V \mid p(1) = p(-1) = 0\}.$$

- Determinare una base di V.
- Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di V e trovarne una base B.
- Completare B a una base di V.

Risoluzione:

Esercizio 2. 1. Trovare, se esiste, una base del sottoinsieme U di $\mathbb{R}^4$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

2. Che dimensione ha l'intersezione di U con il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Risoluzione:

Esercizio 3. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- Determinare gli autovalori di F.
- Discutere la diagonalizzabilità di F.
- Scrivere una base dell'autospazio relativo all'autovalore di molteplicità algebrica due.

Risoluzione:

Esercizio 4. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dare una dimostrazione se è vera o esibire un controesempio se è falsa. V denota uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e $F : V \to V$ un'applicazione lineare.

1. Se $v_1, v_2, v_3 \in V$ sono a due a due non proporzionali allora sono linearmente indipendenti.
2. $Ker(F)$ è un sottospazio vettoriale di V.
3. Se il sistema lineare $AX = b$ non è compatibile, il sistema omogeneo associato $AX = 0$ ha sempre una sola soluzione.
4. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ generano V, allora anche $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ generano V.
5. Se 0 non è autovalore di F, allora F è suriettiva.

Risoluzione: